

- 12 ILLUSIE L. Complexe cotangent et déformations. Lectures Notes in Mathematics 239-283. Berlin, Heidelberg, New-York. Springer (1972).
- 13 LAZARD M. Lois de groupes et analyseurs. Annales Scient. Ec. Norm. Sup. 72, 299-400 (1955).
- 14 MAC LANE S. Homologie des anneaux et des modules, C.B.R.M. Louvain, 55-80 (1956).
- 15 MAY J.P. : Simplicial objects in algebraic topology. Van Nostrand Mathematical Studies 11, Princeton : Van Nostrand (1967).
- 16 MILNE J. Duality in the flat cohomology of a surface. Ann. Scient. ENS 4^e série, t.9, p. 171-202 (1976).
- 17 MILNOR J. The Steenrod algebra and its dual, Ann. of Math. 67, 150-171 (1958).
- 18 PRIDDY S. Mod p right derived functor algebras of the symmetric algebra functor J. Pure and Applied Algebra 3, 337-356 (1973).
- 19 SPANIER E.H. Algebraic Topology, New-York Mc Graw-Hill (1966)
- 20 WHITEHEAD G.W. : Generalized homology theories, Trans. Amer. Math. Soc. 102, 227-283 (1962).

Université de Rennes I
 Département de Mathématique
 B.P. 25 A
 35031 RENNES CEDEX

Exposé VIII

INSTABILITÉ DANS LES ESPACES VECTORIELS

par G. ROUSSEAU

§1. INSTABILITÉ

Pour des détails sur les résultats non démontrés de ce paragraphe on consultera Mumford [5], [6] et Seshadri [7], [8], [9].

Soient k un corps, \bar{k} sa clôture algébrique et G un k -groupe algébrique affine. Un G -schéma est un schéma muni d'une action de G ; un G -morphisme est un morphisme entre deux G -schémas compatible aux actions de G ; un morphisme G -invariant est un G -morphisme dans un G -schéma muni de l'action triviale de G .

DEFINITIONS 1.1. Soit X un G -schéma.

- 1) Un quotient de X par G est un morphisme G -invariant $\varphi : X \rightarrow Y$ universel pour cette propriété.
- 2) Un bon quotient de X par G est un morphisme affine, surjectif, G -invariant $\varphi : X \rightarrow Y$ tel que :
 - i) $\mathcal{O}_Y = \varphi_*(\mathcal{O}_X)^G$.
 - ii) Si Z est une partie fermée (resp. ouverte) G -stable de X , alors $\varphi(Z)$ est fermée (resp. ouverte).
 - iii) Si $(Z_i)_{i \in I}$ est une famille finie de parties fermées G -stables disjointes (i.e. $\cap Z_i = \emptyset$) alors les $\varphi(Z_i)$ sont disjointes

(i.e. $\cap \varphi(Z_i) = \emptyset$).

3) Un quotient géométrique de X est un bon quotient dont les fibres géométriques sont les orbites géométriques de G dans X.

PROPOSITION 1.2. 1) Un bon quotient est un quotient.

2) Si $\varphi : X \rightarrow Y$ est un bon quotient, toute fibre géométrique de φ contient une unique orbite fermée.

3) Un bon quotient de X est un quotient géométrique si et seulement si l'action de G sur X est fermée.

Pour construire de tels quotients on se limite au cas d'un groupe G réductif [4]. En caractéristique 0 on utilise le fait qu'alors toutes les représentations de G sont semi-simples ; en caractéristique p, c'est beaucoup plus technique [3], [7], [8], [9].

THÉOREME 1.3. Soient G un groupe réductif et $X = \text{Spec}(R)$ un G-schéma affine. Notons $Y = \text{Spec}(R^G)$; alors $\varphi : X \rightarrow Y$ est un bon quotient et si X est noethérien (resp. algébrique) il en est de même de Y.

On veut maintenant traiter le cas projectif : on considère une variété projective X plongée dans un espace projectif $P(V)$ et un groupe réductif G agissant linéairement sur V de façon que l'action induite sur $P(V)$ stabilise X.

On note P l'ensemble des polynômes G-invariants homogènes, non constants sur V et, pour $p \in P$, X_p l'ouvert affine $\{\xi \in X/p(\xi) \neq 0\}$.

DÉFINITION 1.4. Soit $\xi \in X(\bar{k})$.

ξ semi-stable $\iff \exists p \in P, x \in X_p$.

ξ instable $\iff \xi$ non semi-stable $\iff \forall p \in P, x \notin X_p$.

ξ stable $\iff \exists p \in P$ tel que $x \in X_p$, l'action de G sur X_p est fermée et le stabilisateur de x (noté $\text{stab}(x)$) est fini.

REMARQUES. 1) Ces notions sont relatives au plongement de X dans $P(V)$. On peut les définir de manière plus générale [5] mais les théorèmes

importants se situent dans ce cadre.

2) L'ensemble des points semi-stables (resp. stables) est la trace sur $X(\bar{k})$ d'un ouvert X^{ss} (resp. X^s) de X.

PROPOSITION 1.5. Sous les conditions ci-dessus, notons $X = \text{Proj}(R)$, alors G agit de manière homogène sur l'algèbre graduée R et si on note $Y = \text{Proj}(R^G)$ alors l'application naturelle $\varphi : X^{ss} \rightarrow Y$ est un bon quotient. Il existe un ouvert Y' de Y tel que $X^s = \varphi^{-1}(Y')$ et que $\varphi : X^s \rightarrow Y'$ soit un quotient géométrique.

THÉOREME 1.6. Gardons les conditions ci-dessus et supposons de plus k algébriquement clos. Soient $\xi \in X(k)$ et $x \in V - \{0\}$ au-dessus de ξ . Les notions de stabilité et d'instabilité ont des caractérisations résumées dans le tableau ci-dessous.

| ξ instable | ξ semi-stable | ξ stable |
|---|---|---|
| $\forall p \in P \quad p(x) = 0$ | $\exists p \in P \quad p(x) \neq 0$ | 1) $\forall y \in V - 0(x)$ $\exists p \in P \quad p(x) \neq p(y)$ 2) $\text{deg. tr.}_k(V)^G = \dim V - \dim(G)$ |
| $0 \in \overline{0(x)}$ | $0 \notin \overline{0(x)}$ | 1) $0(x)$ fermée 2) $\text{Stab}(x)$ fini |
| $x \in \psi^{-1}(\psi(0))$ | $x \notin \psi^{-1}(\psi(0))$ | 1) $0(x) = \psi^{-1}(\psi(x))$ 2) $\text{Stab}(x)$ fini |
| $\exists \lambda \in Y(G)$ tel que les poids de x par rapport à λ sont tous > 0 | $\forall \lambda \in Y(G)$ il existe des poids de x par rapport à λ qui sont ≤ 0 | $\forall \lambda \in Y(G)$ non trivial x a des poids < 0 et > 0 par rapport à λ |
| $\exists \lambda \in Y(G) \quad \mu(x, \lambda) < 0$ | $\forall \lambda \in Y(G) \quad \mu(x, \lambda) \geq 0$ | $\forall \lambda \in Y(G)$ non trivial $\mu(x, \lambda) > 0$ |
| $\exists \lambda \in Y(G)$ tel que x soit instable pour l'action de $\lambda(G_m)$ | $\forall \lambda \in Y(G)$ x est semi-stable pour l'action de $\lambda(G_m)$ | $\forall \lambda \in Y(G)$ x est stable pour l'action de $\lambda(G_m)$ |
| | | $G \rightarrow V$ propre $g \rightarrow g.x$ |

NOTATIONS. $O(x) = \mathbb{C}.x$ est l'orbite de x sous G , $\psi: V \rightarrow Z$ est le bon quotient de V défini en 1.3. Un sous-groupe à un paramètre de G est un homomorphisme de groupes algébriques λ du groupe multiplicatif \mathbb{C}_m dans G . On note $Y(G)$ l'ensemble de ces λ . A $\lambda \in Y(G)$ correspond une représentation $\rho: \mathbb{C}_m \rightarrow GL(V)$ qui est diagonalisable : $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$, $V_n = \{x \in V / \rho(a)x = a^n x\}$.

Si $x \in V$, il s'écrit $x = \sum_n x_n$ avec $x_n \in V_n$. Les $n \in \mathbb{Z}$ tels que $x_n \neq 0$ sont les poids de x par rapport à λ .

On note $\mu(x, \lambda) = \text{Max}\{-n, x_n \neq 0\}$.

REMARQUES 1.7. 1) On constate que les définitions envisagées ne dépendent pas de la sous-variété X de $R(V)$ et valent pour $x \in V - \{0\}$. Le point 0 est dit instable.

2) Il y a plusieurs variantes (moins restrictives) de la définition de stable :

S') $\exists p \in \mathbb{P}$, $\xi \in X_p$ et l'action de G sur X est fermée (c'est la définition naturelle pour la proposition 1.5 mais elle dépend de X).

S'') x semi-stable et $O(x)$ de dimension maximale parmi les orbites (si $V^S \neq \emptyset$ alors $V^{S''} = V^S$).

Pour toutes ces définitions, stable implique semi-stable et (sous réserve que $X = \mathbb{P}(V)$ pour S') $O(x) = \psi^{-1}(\psi(x))$. La définition adoptée se justifie par sa caractérisation par les sous-groupes à un paramètre.

EXEMPLE 1.8. GL_2 agit sur k^2 donc sur l'espace vectoriel $V = S^n(k^2)$ de base $(X^i Y^{n-i})_{i=0, n}$. Il est facile de voir que tout point est instable pour cette action. Etudions la restriction de cette action à SL_2 . Le sous-groupe à un paramètre canonique λ_0 de SL_2 (canonique car $\forall \lambda \in Y(SL_2)$, λ est conjugué à une puissance de λ_0) est défini par $\lambda_0(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$; les espaces de poids correspondants sont les $k.X^i Y^{n-i}$ de poids $2i-n$.

Comme les définitions de 1.4 sont invariantes par extension algébrique du corps, le théorème 1.6 se traduit par : ($x \in V$).

x instable (resp. non stable) pour l'action de SL_2
 \iff quitte à changer λ_0 par conjugaison dans $SL_2(\bar{k})$ (i.e. quitte à changer la base (X, Y) de \bar{k}^2) x est instable (resp. non stable) pour l'action de $\lambda(\mathbb{C}_m)$.

\iff Il existe une base X, Y de \bar{k}^2 telle que $x = \sum_{i=0}^n a_i X^i Y^{n-i}$ avec $a_i = 0 \ \forall i \leq \frac{n}{2}$ (resp. $\forall i \geq \frac{n}{2}$).

$\iff x$ interprété comme polynôme homogène de degré n en 2 variables a dans $\mathbb{P}_1(\bar{k})$ une racine de multiplicité $> \frac{n}{2}$ (resp. $>> \frac{n}{2}$).

1.9 EXTENSION DE 1.6. Si le critère d'instabilité ou de stabilité par des sous-groupes à un paramètre du théorème 1.6 était valable sur un corps quelconque on pourrait supposer que la racine ci-dessus est dans $\mathbb{P}_1(k)$.

Or cette racine est bien déterminée par x dans le cas de l'instabilité et il peut y avoir ambiguïté (2 racines) dans le cas de la non-stabilité.

Ceci suggère que le critère d'instabilité est valable sur un corps parfait; par contre on voit facilement que ces critères sont faux sur un corps non parfait et que le critère de stabilité est faux sur un corps non algébriquement clos.

THÉORÈME 1.10 [10]. Soient $\rho: G \rightarrow GL(V)$ une représentation d'un groupe réductif sur un corps k parfait et $v \in V$; alors, v instable pour $G \iff \exists \lambda \in Y(G)$ tel que $\mu(v, \lambda) < 0$.

Pour démontrer ce critère d'instabilité, il reste, d'après 1.6, à montrer que :

$$\exists \lambda \in Y(G \otimes \bar{k}), \mu(x, \lambda) < 0 \implies \exists \lambda \in Y(G), \mu(x, \lambda) < 0.$$

Cela sera fait en 2.22 après une grosse parenthèse.

§2. IMMEUBLE VECTORIEL D'UN GROUPE RÉDUCTIF

Soit G un groupe réductif sur un corps k . On fait dans la suite appel à des résultats de [1], résumés en [4, §34]. Pour la seule démonstration de 1.10 on pourrait dans la suite supposer k algébriquement clos.

2.0. Soit $\lambda \in Y(G)$; il existe un tore k -déployé maximal S de G contenant l'image de λ et un tore maximal T défini sur k contenant S . Soit k' une extension galoisienne qui déploie T . Alors $G \otimes k'$ est engendré par $T \otimes k'$ et des sous-groupes fermés $(U_\alpha)_{\alpha \in \Phi(T)}$, normalisés par T , isomorphes au groupe additif \mathbb{G}_a par une application φ_α telle que : $t \cdot \varphi_\alpha(u) \cdot t^{-1} = \varphi_\alpha(\alpha(t) \cdot u)$ pour tous $t \in T(\bar{k})$ et $u \in \bar{k}$. Les $\alpha \in \Phi(T)$ sont des caractères de T (c'est-à-dire des homomorphismes de T dans \mathbb{G}_m) : les racines de G par rapport à T .

Pour tout caractère $\chi \in X(T)$ (ou $\chi \in X(S)$), $\chi \circ \lambda$ est un caractère du groupe multiplicatif i.e. un entier de \mathbb{Z} .

On définit $P(\lambda)$ comme le sous-groupe parabolique de $G \otimes k'$ engendré par $T \otimes k'$ et les U_α tels que $\alpha \circ \lambda \gg 0$.

PROPOSITION 2.1. $P(\lambda)$ ne dépend que de λ ; il est défini sur k .

DÉMONSTRATION. Si la première assertion est vraie, $P(\lambda)$ est défini sur une extension galoisienne de k et invariant par le groupe de Galois, il est donc défini sur k .

Soit P' le sous-groupe de G formé des g tels que le morphisme de schémas $\mathbb{G}_m \rightarrow G : x \mapsto \lambda(x) \cdot g \cdot \lambda(x^{-1})$ se prolonge en un morphisme de $\mathbb{A}^1 = \mathbb{G}_m \cup \{0\}$ dans G . Il contient T et les U_α pour $\alpha \circ \lambda \gg 0$ (et seulement ceux-ci car $\lambda(x) \cdot \varphi_\alpha(u) \cdot \lambda(x^{-1}) = \varphi_\alpha(x^{\alpha(\lambda)} \cdot u)$). Ainsi P' contient $P(\lambda)$ et est parabolique; il est donc déterminé par les U_α qu'il contient et $P(\lambda) = P'$ est bien déterminé par λ .

PROPOSITION 2.2. Soient $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation de G et $V = \bigoplus_{\chi} V_{\chi}$ la décomposition de V selon les poids de T (i.e. $\forall v \in V \quad v = \sum_{\chi} v_{\chi} \in V_{\chi}$ et $\rho(t) \cdot v_{\chi} = \chi(t) \cdot v_{\chi}$ pour tous $t \in T$ et

$\chi \in X(T)$). On rappelle que $\lambda \in Y(S) \subset Y(T)$. Alors

- 1) $\mu(v, \lambda) = \text{Max}\{-\chi \circ \lambda, v_{\chi} \neq 0\}$
- 2) $\mu(v, \lambda^n) = n \cdot \mu(v, \lambda) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
- 3) $\forall \gamma \in P(\lambda)(\bar{k}) : \mu(v, \lambda) = \mu(v, \gamma^{-1} \lambda \gamma)$.

DÉMONSTRATION. Pour les deux premières assertions c'est clair. Pour la troisième, comme $\mu(v, \gamma^{-1} \lambda \gamma) = \mu(\gamma v, \lambda)$ elle résulte de la définition de $P(\lambda)$ et du lemme 2.3 :

LEMME 2.3 [4; 27.2]. Soient $\chi \in X(T)$, $v \in V_{\chi}$, $\alpha \in \Phi(T)$ et $g \in U_{\alpha}(\bar{k})$ alors $\rho(g) \cdot v - v \in \sum_{\ell \gg 1} V_{\chi + \ell \alpha}$.

DÉFINITION 2.4. On note $I_{\mathbb{Q}}(G)$ le quotient de $Y(G) \times \mathbb{N}^*$ par : $(\lambda, n) \sim (\lambda', n') \iff \exists \gamma \in P(\lambda)(k) / \lambda' \cdot n' = \gamma \lambda \cdot n \cdot \gamma^{-1}$.

C'est l'immeuble vectoriel rationnel de G sur k .

- REMARQUES 2.5. 1) On note λ/n la classe de (λ, n) .
- 2) Les notations $P(\lambda/n) = P(\lambda)$ et $\mu(v, \lambda/n) = \mu(v, \lambda)/n$ ne sont pas ambiguës.
- 3) Soit P un parabolique de G défini sur k , on note $\Delta_{\mathbb{Q}}(P) = \{\lambda/n \in I_{\mathbb{Q}}(G) / P(\lambda/n) \supset P\}$ c'est une facette de l'immeuble; si P est un parabolique défini sur k minimal, $\Delta_{\mathbb{Q}}(P)$ est une chambre.
- 4) Si G est anisotrope, $\Delta_{\mathbb{Q}}(G)$ est réduit au point $0/n$ (où 0 est le sous-groupe à un paramètre trivial) noté 0 .

EXEMPLE 2.6. Si G est un tore déployé $S : G \simeq \mathbb{G}_m^r$. Le groupe $Y(S)$ est un \mathbb{Z} -module libre de rang r , dual du \mathbb{Z} -module libre de rang r $X(S)$. Comme S est commutatif on voit que $I_{\mathbb{Q}}(T) = Y(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension r .

PROPOSITION 2.7. Soit S un tore k -déployé maximal de G .

- 1) $\forall g \in G(k)$, $\forall \lambda \in Y(T)$ si $g \cdot \lambda \cdot g^{-1} \in Y(T)$, alors $\exists h \in N_G(T)(k)$ tel que $g \cdot \lambda \cdot g^{-1} = h \cdot \lambda \cdot h^{-1}$.
- 2) L'application évidente de $I_{\mathbb{Q}}(S)$ dans $I_{\mathbb{Q}}(G)$ est injective.

DÉFINITION. L'image de $I_{\mathbb{Q}}(S)$ est l'appartement $A_{\mathbb{Q}}(S)$ de S dans $I_{\mathbb{Q}}(G)$.

DÉMONSTRATION. 1) Soit $Z = Z_G(g\lambda g^{-1})$ alors S et gSg^{-1} sont deux tores k -déployés maximaux de Z . Donc il existe $g' \in Z(k)$ tel que $g'Sg'^{-1} = S$ et ainsi $h = g'g$ convient.

2) Si $\lambda, \lambda' \in Y(S)$ et $g \in P(\lambda)(k)$ sont tels que $\lambda' = g\lambda g^{-1}$ il faut montrer que $\lambda = \lambda'$. Mais on peut supposer d'après 1) que $g \in N_{P(\lambda)}(S)(k)$. Alors g agit sur $Y(S)$, par son image w dans le groupe de Weyl $W(S) = N_G(S)/C_G(S)$. Or $W(S)$ agit par des réflexions sur $Y(S) \otimes \mathbb{R}$ et w fixe $P(\lambda)$, il stabilise donc la facette de $Y(S) \otimes \mathbb{R}$ déterminée par λ . Mais une chambre de Weyl est un domaine fondamental pour $W(S)$, donc w fixe cette facette et en particulier λ ; ainsi $\lambda = \lambda'$.

PROPOSITION 2.8. Soient $\mu \in I_{\mathbb{Q}}(G)$ et S un tore k -déployé maximal alors : $S \subset P(\mu) \iff \mu \in A(S)$

$$\iff \exists \lambda \in Y(S), n \in \mathbb{N}^* \quad \mu = \frac{\lambda}{n}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\mu = \lambda_1/n$, $\lambda_1 \in Y(S_1)$ tel que $S \subset P(\mu)$ alors S et S_1 sont deux tores k -déployés maximaux de $P(\mu)$ et en conjuguant dans $P(\mu)$ on peut supposer $\lambda_1 \in Y(S)$. Les autres implications sont claires.

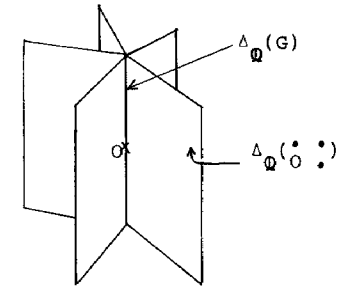
2.9 FORME DES FACETTES. Elle découle de la définition de $P(\lambda)$ et des propositions 2.7, 2.8 :

Si P est un parabolique contenant le tore k -déployé maximal S , il est déterminé par l'ensemble $\Phi(P, S)$ des racines $\alpha \in \Phi(S)$ telles que $U_{\alpha} \subset P$. Alors

$$\Delta_{\mathbb{Q}}(P) = \{\mu \in Y(S) \otimes \mathbb{Q}, \alpha(\mu) \geq 0 \quad \forall \alpha \in \Phi(P, S)\}.$$

Les facettes de $I_{\mathbb{Q}}(G)$ contenues dans $A(S)$ sont les facettes (fermées) de l'ensemble des hyperplans appelés murs d'équation $\alpha(\mu) = 0$, pour $\alpha \in \Phi(G, S)$, dans $A_{\mathbb{Q}}(S) = Y(S) \otimes \mathbb{Q}$. Ce sont des cônes de sommet 0 .

EXEMPLE 2.10. L'immeuble de GL_2



2.11 ACTION DE G . $G(k)$ agit par automorphismes intérieurs sur les sous-groupes à un paramètre de G donc sur $I_{\mathbb{Q}}(G)$.

Par définition le fixateur de la facette $\Delta_{\mathbb{Q}}(P)$ est $P(k)$, donc son stabilisateur est $N_G(P)(k) = P(k)$. Ainsi le fixateur de l'appartement $A_{\mathbb{Q}}(S)$ est l'intersection des $P(k)$ pour $P \supset S$, c'est-à-dire le centralisateur $C_G(S)(k)$ de S et donc son stabilisateur est $N_G(S)(k)$.

PROPOSITION 2.12. Soient F_1, F_2 des parties de $I_{\mathbb{Q}}(G)$ contenues dans des chambres; alors :

- 1) Il existe un appartement A contenant $F_1 \cup F_2 \cup \{0\}$.
- 2) L'enveloppe convexe de $F_1 \cup F_2 \cup \{0\}$ dans $A \subset I_{\mathbb{Q}}(G)$ ne dépend pas de A . En particulier si x et y sont des points de $I_{\mathbb{Q}}(G)$, on peut définir un segment $[x, y]_{\mathbb{Q}}$ dans $I_{\mathbb{Q}}(G)$.
- 3) Si A et A' sont des appartements contenant F_1 et F_2 , il existe $g \in G(k)$ fixant l'enveloppe convexe de $F_1 \cup F_2 \cup \{0\}$ tel que $g.A = A'$.

DÉMONSTRATION. 1) Soit P_i un k -parabolique tel que la facette $\Delta_{\mathbb{Q}}(P_i)$ contienne F_i . D'après la décomposition de Bruhat on sait qu'il existe un tore k -déployé maximal S de G dans $P_1 \cap P_2$; et alors $\Delta_{\mathbb{Q}}(P_1) \cup \Delta_{\mathbb{Q}}(P_2) \cup \{0\} \subset A_{\mathbb{Q}}(S)$.

3) Supposons les paraboliques P_i ci-dessus choisis maximaux pour leur propriété; alors le fixateur de F_i est $P_i(k)$. Notons $A = A_{\mathbb{Q}}(S)$,

$A' = A_{\mathbb{Q}}(S')$; $S(k)$ et $S'(k)$ fixent F_1 et F_2 , donc S et S' sont deux tores k -déploysés maximaux de $P_1 \cap P_2$: il existe $g \in P_1(k) \cap P_2(k)$ tel que $S' = gSg^{-1}$ c'est-à-dire $A' = g.A$. Il reste à voir que g fixe l'enveloppe convexe de $F_1 \cup F_2 \cup \{0\}$ dans $A_{\mathbb{Q}}(S) = Y(S) \otimes \mathbb{Q}$. Reprenons les notations de 2.0, par construction le fixateur dans $G(k)$ du point $y \in Y(S) \otimes \mathbb{Q} \subset I_{\mathbb{Q}}(G) \cap Y(T \otimes k') \otimes \mathbb{Q} \subset I_{\mathbb{Q}}(G \otimes k')$, est l'intersection avec $G(k)$ du fixateur dans $G(k')$ de y . Il suffit donc de montrer que si $g \in P_1(k') \cap P_2(k')$ alors y fixe l'enveloppe convexe de $F_1 \cup F_2 \cup \{0\}$ dans $Y(T \otimes k') \otimes \mathbb{Q} = B$. Mais le fixateur d'un point de B est un parabolique contenant T donc le fixateur G_H d'une partie H de B fixe une partie $H' \supset H$ de B qui est déterminée par les sous-groupes U_{α} ($\alpha \in \Phi(T)$) que contient G_H . Or par définition U_{α} fixe H si et seulement si $\alpha(H) \geq 0$ et les applications α sont linéaires ; donc H' contient l'enveloppe convexe de $H \cup \{0\}$. Ainsi g fixe ce qu'il faut.

2) L'élément g construit au début du 3) induit un isomorphisme linéaire de $A = Y(S) \otimes \mathbb{Q}$ sur $A' = Y(S') \otimes \mathbb{Q}$ qui fixe F_1 , F_2 et 0 . Il échange donc les enveloppes convexes de $F_1 \cup F_2 \cup \{0\}$ dans A et A' ; d'où 2) d'après 3) .

2.13 RÉTRACTIONS. Soient A un appartement et C une chambre de A . Si $x \in I_{\mathbb{Q}}(G)$, x est contenu dans une chambre C' et il existe un appartement A' contenant C' et C . Alors il existe g fixant C tel que $gA' = A$. On pose alors $P_{A,C}(x) = g.x$. On a ainsi défini la rétraction sur A de centre C sous réserve de montrer que $g.x$ ne dépend pas des choix faits.

Soient (C'_1, A'_1, g_1) et (C'_2, A'_2, g_2) deux choix ; d'après 2.12 3) quitte à changer g_2 on peut supposer $A'_1 = A'_2$. Mais alors $h = g_2^{-1} \cdot g_1$ fixe C et stabilise A'_1 ; si on a $A'_1 = A_{\mathbb{Q}}(S)$ et $C = \Delta_{\mathbb{Q}}(P)$ où P est un parabolique minimal alors $h \in N_G(S)(k) \cap P(k) = N_P(S)(k) = C_P(S)(k)$. Donc h fixe tous les points de A'_1 et $g_1.x = g_2.x$.

2.14 DISTANCE. Soit S un tore k -déploysé maximal, on choisit sur $Y(S) \otimes \mathbb{Q} = A_{\mathbb{Q}}(S)$ un produit scalaire invariant par le groupe de Weyl $W(G, S) = N_G(S)/C_G(S)$. On en déduit par conjugaison par G une distance $d(x, y)$ dans tout appartement. D'après 2.12 $d(x, y)$ est une fonction bien définie sur $I_{\mathbb{Q}} \times I_{\mathbb{Q}}$ et invariante par $G(k)$.

PROPOSITION 2.15. 1) d est une distance.

2) $\rho_{A,C}$ conserve les distances de points contenus dans un même appartement que C .

3) $\rho_{A,C}$ diminue les distances.

DEMONSTRATION. La seconde assertion est claire. Mais alors $\rho_{A,C}$ est une isométrie sur chaque chambre, donc il transforme un segment en une ligne brisée de même longueur d'où la dernière assertion. Il reste à montrer l'inégalité triangulaire $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ et pour cela on fait une rétraction sur un appartement contenant x et z .

2.16 L'IMMEUBLE REEL. L'immeuble $I_{\mathbb{Q}}(G)$ n'est pas complet ; dans le complété on considère la réunion des complétés des appartements :

$$I(G) = \bigcup_S A(S) = \bigcup_S Y(S) \otimes \mathbb{R} .$$

$I(G)$ est l'immeuble vectoriel de G sur k , il n'est pas substantiellement différent de $I_{\mathbb{Q}}(G)$.

Le complété d'une facette, d'un segment ou d'un appartement de $I_{\mathbb{Q}}(G)$ est noté de la même façon en supprimant l'indice \mathbb{Q} .

2.17 REMARQUES. 1) D'habitude on ne considère que l'immeuble sphérique $I^S(G) = \{x \in I(G) / d(x, 0) = 1\}$, (voir par exemple [5; II §2] sur lequel est calqué cet exposé). Mais l'immeuble considéré ici est parfois plus pratique car il ressemble aux immeubles affines de [2] .

2) L'unique géodésique entre deux points x, y de $I(G)$ est le segment $[x, y]$ de centre contenant un point de $[x, y]$. On dit qu'une partie H de $I(G)$ est convexe si pour tous $x, y \in H$ on a $[x, y] \subset H$.

THÉOREME 2.18. $I(G)$ est complet.

DÉMONSTRATION cf. [2;2.5.12].

Soient y_n une suite de Cauchy et C une chambre de $I(G)$: comme les paraboliques minimaux sont conjugués, il existe $g_n \in G(k)$ et $x_n \in C$ tels que $y_n = g_n \cdot x_n$. Quitte à passer à une suite extraite on peut supposer que x_n a une limite x dans C . Alors :

$$d(g_n^{-1} g_p x, x) = d(g_p x, g_n x) \ll d(x, x_p) + d(y_p, y_n) + d(x_n, x)$$

ainsi $\forall \varepsilon \exists N(\varepsilon), p, n \gg N(\varepsilon)$ implique $d(g_n^{-1} g_p x, x) \ll \varepsilon$.

Mais alors (lemme 2.19) $g_p x = g_q x$ pour $p, q \gg N(\eta)$ et on voit que y_n tend vers $g_{N(\eta)} \cdot x$.

LEMME 2.19. Soit $x \in I(G)$ alors il existe $\eta > 0$ tel que

1) Si $y \in I(G)$ vérifie $d(x, y) \ll \eta$ alors x et y sont contenus dans une même chambre.

2) Si de plus il existe $g \in G(k)$ tel que $y = g \cdot x$ alors $y = x$.

DÉMONSTRATION. 1) Soit $A = A(S)$ un appartement contenant x . On définit η comme la distance minimale de x aux murs de A qui ne contiennent pas x (cf. 2.9). Le nombre η est indépendant du choix de A et convient.

2) Si $y = g \cdot x$, d'après 2.7.1 on peut supposer que $g \in N_G(g)(k)$ mais alors g est dans le groupe de Weyl et celui-ci admet une chambre comme domaine fondamental donc $y = x$.

THÉOREME 2.20. Soit Γ un groupe d'isométries de $I(G)$ fixant 0 et soit M une partie convexe fermée non vide de $I(G)$ stable par Γ . Alors Γ fixe un point de M .

DÉMONSTRATION. Quitte à intersecter M avec une boule de centre 0 on peut supposer M borné. Alors le lemme 3.2.3 de [2] permet de conclure si on montre la relation suivante : Soient $x, y, z \in I(G)$ et m le milieu de $[x, y]$ alors $d(x, y)^2 + d(y, z)^2 \gg 2d(m, z)^2 + \frac{1}{2}d(x, y)^2$.

Dans un espace euclidien on a égalité ; on se ramène à ce cas par une rétraction sur un appartement contenant x, y de centre contenant m .

PROPOSITION 2.21. Soient $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation de G et $v \in V$; alors la fonction $\mu(v, x)$ est une fonction continue de $x \in I_Q(G)$. En particulier $\{x \in I(G) / \mu(n, x) \ll \alpha\}$ est convexe fermé.

DÉMONSTRATION. Si x et y sont dans l'appartement $A_Q(S)$ on dispose des expressions 2.2.1 et 2.5.2 il est alors clair qu'il existe une constante K indépendante de v telle que $|\mu(v, x) - \mu(v, y)| \ll K \cdot d(x, y)$. Mais $\mu(v, gx) = \mu(gv, x)$, ainsi la même constante est valable dans $A_Q(gSg^{-1})$ donc dans $I_Q(G)$, et la fonction μ se prolonge en une fonction continue sur $I(G)$. Il reste à voir que μ est convexe sur chaque appartement ce qui est évident.

2.22. DÉMONSTRATION DU THEOREME 1.10.

Soit I l'immeuble de G sur \bar{k} . Si T est un tore maximal k -défini on peut supposer le produit scalaire sur $Y(T \otimes \bar{k})$ invariant par le groupe de Galois Γ de \bar{k} sur k . Ainsi Γ agit isométriquement sur I et fixe 0 . Par hypothèse l'ensemble H des $x \in I$ tels que $\mu(v, x) \ll -1$ est non vide (2.2.2), il est convexe fermé (2.21) ne contient pas 0 et est stable par Γ (car ρ est défini sur k et $v \in V \subset V \otimes \bar{k}$). Alors (2.20) Γ fixe un point $a \in H$; le sous-groupe parabolique associé $P(a)$ est défini sur k . Soit T un tore maximal k -défini de $P(a)$; l'appartement $A(T)$ contient a ; le groupe de Galois Γ stabilise $A(T)$ et induit sur $Y(T) \subset Y(T) \otimes \mathbb{R} = A(T)$ l'action canonique. Il existe donc $\lambda/n \in Y(T) \otimes \mathbb{Q}$ fixe par Γ et suffisamment proche de a ; alors λ est défini sur k et $\mu(x, \lambda) \ll 0$.

BIBLIOGRAPHIE

- * [1] BOREL-TITS.- Groupes réductifs. Publ. I.H.E.S. n° 27.
- * [2] BRUHAT-TITS.- Groupes réductifs sur un corps local. Publ. I.H.E.S. n° 41.
- * [3] W. HABOUSH.- Reductive groups are geometrically reductive. Annals of Maths, 102 (1975).
- * [4] J.E. HUMPHREYS.- Linear algebraic groups. Springer Verlag 1975.
- * [5] D. MUMFORD.- Geometric Invariant Theory. Ergebnisse der Mathematik Band 34.
- * [6] D. MUMFORD.- Stability of projective varieties. L'Enseignement des Mathématiques IIème série, Tome XXIII, Genève 1977.
- * [7] C.S. SESHADRI.- Quotient spaces modulo reductive algebraic groups. Annals of Maths, vol. 95 (1972).
- * [8] C.S. SESHADRI.- Theory of moduli. Proc. of Symp. in pure Math., Vol. XXIX, Publ. AMS Arcata (1974).
- * [9] C.S. SESHADRI.- Geometric Reductivity over arbitrary base. Advances in Maths, Vol. 26 (1977).
- * [10] G. ROUSSEAU.- Immeubles sphériques et théorie des Invariants. Note aux C.R.A.S. 1978.

Université de Nancy I
 Département de Mathématique
 Case Officielle n° 140
 54037 NANCY CEDEX (France)

Exposé IX

INSTABILITÉ DANS LES FIBRÉS VECTORIELS

(d'après Bogomolov)

par G. ROUSSEAU

Dans cet exposé k désigne un corps algébriquement clos, et on adopte plutôt le langage des variétés.

§1. SECTIONS SEMI-STABLES

1.1 CONSTRUCTION DE FIBRÉS VECTORIELS. Etant données une fibration principale : $X_\gamma \xrightarrow{\gamma} X$ sous un groupe algébrique G et une représentation $\rho : G \rightarrow GL(V)$ on peut définir un fibré vectoriel localement trivial : $V_{\gamma, \rho} = X_\gamma \times_G V \xrightarrow{\pi} X$; en effet comme X_γ est localement trivial sur X , on n'a aucun problème pour construire le quotient de $X_\gamma \times V$ par G .

REMARQUES 1.2.

- a) Un point x de $V_{\gamma, \rho}$ détermine une orbite $O(x)$ de G dans V .
- b) Si V est un G -module trivial alors $V_{\gamma, \rho} \simeq X \times V$.
- c) Cette construction est fonctorielle pour les G -morphisms :
 Si $h : V \rightarrow W$ est un G -morphisme on en déduit un morphisme $h_\gamma : V_{\gamma, \rho} \rightarrow W_{\gamma, \rho}$ de fibrés vectoriels sur X .
- d) Cette construction peut aussi se faire si V n'est pas un G -module mais seulement une variété sur laquelle G agit.

DÉFINITION 1.3. Si le fibré vectoriel $E \rightarrow X$ est obtenu de cette manière avec le groupe G , on dit que G est un groupe structural de E .

LEMME 1.4. Soient $X_\gamma \xrightarrow{\gamma} X$ une fibration principale de groupe G et $X_{\gamma'} \xrightarrow{\gamma'} X$ une sous-fibration principale de groupe $H \subset G$. Alors pour tout G -module V , on a $V_{\gamma, \rho} \cong V_{\gamma', \rho}$; en particulier H est un groupe structural de $V_{\gamma, \rho}$.

DÉMONSTRATION. L'application évidente $X_\gamma \times_H V \rightarrow X_\gamma \times_G V$ induit localement sur X un isomorphisme (car alors X_γ et $X_{\gamma'}$ sont triviales), c'est donc un isomorphisme.

LEMME 1.5. S'il existe une section s de $V_{\gamma, \rho}$ telle que l'orbite $O(s(x))$ soit indépendante de $x \in X$, alors si $v \in O(s(x))$, la fibration $X_\gamma \xrightarrow{\gamma} X$ possède une sous-fibration de groupe le groupe d'isotropie G_v de v . En particulier G_v est un groupe structural de $V_{\gamma, \rho}$ (et de tous ses tordus, cf. 1.7).

DÉMONSTRATION. Soit $p: X_\gamma \times V \rightarrow X_\gamma \times_G V$ l'application canonique. Notons $X_{\gamma, v} = p^{-1}(s(x)) \cap X_\gamma \times \{v\}$, alors $\gamma': X_{\gamma, v} \rightarrow X$ est une sous-fibration principale de groupe G_v .

LEMME 1.6. Si $E \xrightarrow{\pi} X$ est un fibré vectoriel (localement trivial) de dimension n , alors GL_n est un groupe structural de E .

DÉMONSTRATION. Soit $X_\gamma = \text{Isom}_X(X \times k^n, E)$ la variété dont les points sont les isomorphismes de k^n sur les fibres de E . Pour $x \in X_\gamma$ on note $\gamma(x)$ le point de X déterminé par cette fibre. $X_\gamma \xrightarrow{\gamma} X$ est un fibré-principal pour l'action (à droite) de GL_n et l'application naturelle $X_\gamma \times_{GL_n} k^n \rightarrow E$ est un isomorphisme car elle l'est localement sur X .

1.7 FIBRÉS TORDUS. Quand on a un fibré vectoriel E de groupe structural G et une représentation $\rho': G \rightarrow GL(W)$, le fibré $W_{\gamma, \rho'}$ construit avec la même fibration X_γ que E est dit tordu de E par ρ' .

Plus particulièrement si E est un fibré vectoriel sur X de dimension n et si ρ est une représentation de GL_n , on note $E^{(\rho)}$ le fibré vectoriel sur X construit grâce à ρ et à la fibration principale du lemme 1.6.

EXEMPLE 1.8. Pour $m \in \mathbb{N}$ on a une représentation ρ de GL_n dans $(k^n)^{\otimes m}$ et le fibré $E^{(\rho)}$ correspondant est $E^{\otimes m}$.

Le morphisme de Véronèse $v_m: k^n \rightarrow (k^n)^{\otimes m}$, $v_m(x) = x^{\otimes m}$, est un GL_n -morphisme et, si $E = V_\gamma$, alors $v_{m, \gamma}: E \rightarrow E^{\otimes m}$ est le morphisme de Véronèse.

1.9. On suppose dorénavant que E est un fibré $V_{\gamma, \rho}$ de groupe structural G réductif et de base X propre intègre.

Un point e de E est dit instable (resp. stable, semi-stable) si l'orbite $O(e)$ dans V est formée de points instables (resp. stables, semi-stables) pour l'action de G .

THÉORÈME-DÉFINITION 1.10 (Bogomolov [1]). Soit s une section de E sur X , alors si $s(x)$ est stable (resp. semi-stable, instable) pour un point x de X , alors il en est de même pour tout autre point de X . On dit alors que la section s est stable (resp. semi-stable, instable) relativement à G .

REMARQUE. En particulier une section qui s'annule quelque part est instable.

DÉMONSTRATION. Considérons le G -morphisme $\psi: V \rightarrow V/G$ indiqué dans l'exposé 1. Comme G agit trivialement sur V/G on a le diagramme commutatif ci-contre.

$$\begin{array}{ccc} V_{\gamma, \rho} & \xrightarrow{\psi_\gamma} & X \times V/G \\ s \uparrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ X & \xrightarrow{\text{Id}} & X \end{array}$$

$\text{pr}_2 \circ \psi_\gamma \circ s$ est un morphisme de X propre dans V/G affine; il est donc constant. Ainsi la fibre de ψ contenant l'orbite $O(s(x))$ est indépendante de $x \in X$.

Or on a vu (exposé 1) qu'une orbite ω est formée de points instables (resp. stables) si et seulement si $\omega \subset \psi^{-1}(0)$ (resp. $\omega = \psi^{-1}(\psi(\omega))$ et le stabilisateur d'un point de ω est fini). La conclusion est donc évidente.

PROPOSITION 1.11. Soit E un fibré vectoriel de base X, qui possède (ou dont un tordu possède) une section stable (relativement à un groupe structurel réductif), alors E a un groupe structurel fini et quitte à étendre la base X par un revêtement fini on peut supposer E trivial.

DÉMONSTRATION. La seconde assertion est une conséquence immédiate de la première. Celle-ci résulte de la démonstration 1.10 et du lemme 1.5.

THÉOREME 1.12. Soient G un groupe réductif et H un sous-groupe fermé, alors G/H est affine si et seulement si H est réductif.

Ce résultat est dû à Matsushima en caractéristique 0 (voir Luna [5]); pour une démonstration en toutes caractéristiques voir Richardson [6]).

COROLLAIRE 1.13. Les seules orbites fermées de G dans une variété affine sont de la forme G/H avec H réductif.

THÉOREME 1.14 (Luna [5]). On suppose le corps K de caractéristique 0. Si $\rho : G \rightarrow GL(V)$ est une représentation du groupe réductif G et ω une orbite fermée dans V, il existe un G-morphisme du fermé $P_\omega = \{v \in V/\omega \subset \overline{0(v)}\}$ dans ω .

PROPOSITION 1.15. On suppose K de caractéristique 0. Soient $\gamma : X_\gamma \rightarrow X$ une fibration principale de groupe G réductif, sur la base propre X et $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation de G. S'il existe une section semi-stable s de $(V/V^{\rho(G)})_{\gamma, \rho}$, alors il y a un sous-groupe réductif H de G, différent de G qui est groupe structurel de $V_{\gamma, \rho}$ et de ses tordus.

REMARQUE. Sous cette hypothèse $V_{\gamma, \rho}$ possède une section semi-stable mais la réciproque est fautive.

DÉMONSTRATION. Comme on va démontrer cette proposition grâce au lemme 1.5, on peut supposer $v = V/V^{\rho(G)}$. Reprenons les notations de la démonstration 1.10. Par hypothèse, il existe $y \neq 0, y \in V/G$ tel que

$O(s(x)) \subset \varphi^{-1}(y)$ pour tout $x \in X$, autrement dit $s(X) \subset \varphi^{-1}(y)_\gamma = X_\gamma \times_G \varphi^{-1}(y)$. Mais $\psi^{-1}(y)$ contient une unique orbite fermée $O(v) = \omega$, (exposé 1, 1.2.2), on a $v \neq 0$ car $y \neq 0$ et le fixateur $H = G_v$ de v est différent de G (car $V^{\rho(G)} = \{0\}$). Le fermé P_ω de 1.14 est en fait $\psi^{-1}(y)$, on a donc des morphismes $\theta : \psi^{-1}(y) \rightarrow \omega$ et $\theta_\gamma : \psi^{-1}(y)_\gamma \rightarrow \omega_\gamma$. La section $\theta_\gamma \circ s$ de $V_{\gamma, \rho}$ est telle que $O(\theta_\gamma \circ s(x)) = O(v)$ pour tout $x \in X$; on conclut alors grâce à 1.5.

COROLLAIRE 1.16. On suppose K de caractéristique 0. Soient E un fibré vectoriel de rang n de base propre X et ρ une représentation sans point fixe de GL_n . S'il existe une section semi-stable de E ou de $E^{(\rho)}$, alors il existe un sous-groupe réductif de GL_n , différent de GL_n , qui est groupe structurel de E.

§2. MODÈLES DE BOGOMOLOV

Les résultats du paragraphe 1 ont été obtenus grâce à des G-morphismes dans deux sortes de G-variétés affines : les G-variétés triviales et les G-variétés G/H. Pour la suite (paragraphe 3) on a besoin de nouveaux modèles et de nouveaux morphismes.

2.1 LE GROUPE P_χ . Soit T un tore maximal du groupe réductif G de rang ℓ , alors $X(T)$ groupe des caractères de T est un \mathbb{Z} -module libre de rang ℓ . On choisit sur $X(T) \otimes \mathbb{R}$ un produit scalaire entier sur $X(T)$ et invariant par le groupe de Weyl W.

Si $\chi \in X(T) \otimes \mathbb{R}$, on note P_χ le sous-groupe parabolique de G engendré par T et les groupes radiciels U_α pour $\alpha \in \Phi$ et $(\alpha, \chi) > 0$; le produit scalaire identifie χ à un élément de $Y(T) \otimes \mathbb{R}$, et alors P_χ est le groupe défini en 2.0 de l'exposé I. Le radical unipotent U_χ de P_χ est engendré par les U_α pour $(\alpha, \chi) > 0$; on peut prendre comme sous-groupe de Levi le sous-groupe L_χ engendré par T et les U_α pour $(\alpha, \chi) = 0$.

Si $\chi \in X(T)$, le caractère χ de T s'étend d'une manière unique en un caractère de P_χ .

PROPOSITION 2.2. Soit $\chi \in X(T)$, il existe un k -vectoriel V^χ une représentation irréductible $\rho : G \rightarrow GL(V^\chi)$ et un vecteur non nul $v_\chi \in V^\chi$ (unique à une constante près) tels que pour tout $p \in P_\chi$, on a :

$$\rho(p) \cdot v_\chi = \chi(p) \cdot v_\chi$$

Ainsi v_χ est un vecteur propre de T de poids χ ; en fait $V^\chi = K \cdot v_\chi$. On peut montrer que toute représentation irréductible est de cette forme pour un poids χ déterminé à conjugaison près par W . En général on choisit un borel B contenant T et on suppose χ dominant pour l'ordre introduit par B , c'est-à-dire $P_\chi \supset B$; ceci fixe χ . Pour des démonstrations on se reportera à [4; § 31].

2.3 EXEMPLE DE GL_n . On choisit pour tore le groupe T des matrices diagonales. Alors $X(T)$ est isomorphe à \mathbb{Z}^n : si $\chi = (r_1, \dots, r_n)$ on a $\chi \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix} = t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n}$. Le groupe de Weyl est le groupe des permutations des n vecteurs de base; on prend comme produit scalaire sur $X(T) \otimes \mathbb{R}$, $((r_i), (r'_i)) = \sum r_i \cdot r'_i$. Si $\chi \in X(T)$, quitte à conjuguer par W , on peut supposer $\chi = (r_1, \dots, r_n)$ dominant: $r_1 \gg r_2 \gg \dots \gg r_n$.

Pour $i=1, n$, soit χ_i le caractère $\chi_i \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix} = t_1 \dots t_i$, c'est le déterminant sur l'espace V_i engendré par les i premiers vecteurs de base. Les χ_i forment une base de $X(T)$, plus précisément; si χ est dominant, il s'écrit de manière unique: $\chi = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \cdot \chi_{d(i)} + a \cdot \chi_n$, avec $a_i \gg 1$, $d(1) < \dots < d(\ell) \ll n-1$ et $a \in \mathbb{Z}$.

Le groupe parabolique P_χ est alors le stabilisateur du chapeau: $V_{d(1)} \subset \dots \subset V_{d(\ell)} \subset k^n = V$.

On a une représentation de GL_n dans $W^\chi = \left(\otimes_{i=1}^{\ell} (\wedge V)^{\otimes a_i} \right) \otimes (\wedge V)^{\otimes a}$, obtenue en combinant des produits tensoriels et des produits extérieurs. L'exposant éventuellement négatif a ne pose pas de problème car $\wedge^n V$ est de dimension 1.

Dans W^χ l'espace propre de poids χ est réduit à une droite, stable par $P_\chi = kv_\chi = \left(\otimes_{i=1}^{\ell} (\wedge V_{d(i)})^{\otimes a_i} \right) \otimes (\wedge V)^{\otimes a}$. En quotientant W^χ par une sous-représentation, on trouve la représentation V^χ de 2.2.

DÉFINITION 2.4. Soit $\chi \in X(T)$, $\chi \neq 0$, le modèle de Bogomolov correspondant est l'adhérence A_χ de $G \cdot v_\chi$ dans V^χ .

Comme χ est non trivial, $P_\chi \cdot v_\chi = k \cdot v_\chi - \{0\}$, donc A_χ ne dépend pas du choix de v_χ . De plus $k \cdot v_\chi \subset A_\chi$ et d'après le lemme ci-dessous, $G \cdot kv_\chi$ est fermé dans V^χ ; ainsi $A_\chi = G \cdot kv_\chi$ est formé de 2 orbites: $G \cdot v_\chi$ et $\{0\}$. En particulier A_χ est contenu dans la variété des points instables de V^χ .

LEMME 2.5. Soient $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation du groupe réductif G , P un parabolique de G , W un sous-espace vectoriel de V stable par P et Ω un ouvert de G , alors $\rho(G) \cdot W$ est fermé dans V et $\rho(\Omega) \cdot W$ est ouvert dans $\rho(G) \cdot W$.

DÉMONSTRATION. Considérons la suite d'applications

$$G \times V \xrightarrow{\varphi} G \times V \xrightarrow{\psi} G/P \times V \xrightarrow{pr_2} V$$

$\varphi(g, v) = (g, \rho(g)v)$; $\psi(g, v) = (gP, v)$; alors $\rho(G) \cdot W$ (resp. $\rho(\Omega) \cdot W$) est l'image par $pr_2 \circ \psi \circ \varphi$ de $G \times W$ (resp. $\Omega \times W$).

Comme φ est un isomorphisme $\varphi(\Omega \times W)$ est ouvert dans $\varphi(G \times W)$ qui est fermé dans $G \times V$. De plus $\varphi(G \times W)$ est saturé pour ψ (et même $pr_2 \circ \psi$), et ψ est ouverte donc $\psi \circ \varphi(\Omega \times W)$ est ouvert dans $\psi \circ \varphi(G \times W)$ qui est fermé dans $G/P \times V$. On conclut alors car pr_2 est ouverte (comme toute projection) et fermée (car G/P est propre).

REMARQUE. $\psi \circ \varphi(G \times W)$ est en fait $G \times_p W$.

2.6. NOTATIONS. On considère une représentation $\rho : G \rightarrow GL(E)$ du groupe réductif G et on note $Y = I_G(E)$ la sous-variété affine fermée de E formée des points instables. Le théorème suivant de Bogomolov [1] est le résultat principal de ce paragraphe.

THÉOREME 2.7. Soit X une sous-variété fermée G -invariante de $I_G(E)$, $X \neq \{0\}$, alors il existe $\chi \neq 0$, $\chi \in X(T)$ et un G -morphisme non trivial de X dans A_χ .

REMARQUE. Il suffit de faire la démonstration pour X irréductible : Si les composantes irréductibles de X sont les X_i , $i=1, n$, chaque X_i est stable par G donc contient 0 . Si $n \geq 2$, soient I l'idéal des fonctions sur E nulles sur $X_2 \cup \dots \cup X_n$ et F un sous-espace vectoriel de I de dimension finie et stable par G [4;8.6]. Si f_1, \dots, f_m est une base de F , on a des fonctions $a_{i,j}$ sur G telles que $f_i(gx) = \sum_{j=1}^m a_{i,j}(g) f_j(x)$.

Le morphisme $\varphi : E \rightarrow k^m$, déterminé par les f_i est un G -morphisme pour les représentations ρ et $\rho' : G \rightarrow GL(k^m)$, $\rho'(g) = (a_{i,j}(g))$. De plus $\varphi(I_G(E)) \subset I_G(k^m)$ et $\varphi(X) = \varphi(X_1) \neq \{0\}$ est irréductible. Il suffit donc de trouver un G -morphisme de $\overline{\varphi(X)}$ dans A_χ et de le composer avec φ .

COROLLAIRE 2.8. Il existe une filtration $Y_0 = Y \supset Y_1 \supset \dots \supset Y_m = \{0\}$ de Y par des sous-variétés fermées G -stables telles que pour $i < m$, Y_{i+1} soit l'intersection des images réciproques de 0 par tous les G -morphisms de Y_i dans un modèle A_χ .

En effet, d'après le théorème et la remarque ci-dessus, la dimension maximum des composantes irréductibles de Y_{i+1} est strictement inférieure à celle de Y_i .

EXEMPLE 2.9. Reprenons l'exemple 1.8 de l'exposé I : SL_2 agit sur l'espace E des polynômes homogènes de degré n en deux variables. Il résulte clairement de la suite de ce paragraphe que la variété Y_i du corollaire ci-dessus est l'ensemble des polynômes de E qui ont dans P_1 une racine de multiplicité $> \frac{n}{2} + i$.

2.10 DÉBUT DE LA DÉMONSTRATION DE 2.7.

On sait qu'un point est instable si et seulement si il l'est pour un sous-groupe à un paramètre. Mais tout sous-groupe à un paramètre est

contenu dans un tore maximal et tous les tores maximaux sont conjugués. Donc si on choisit un tore maximal T de G on a $I_G(E) = G \cdot I_T(E)$.

Regardons maintenant $I_T(E)$. Soit $E = \bigoplus_{\chi} E_{\chi}$ la décomposition de E selon les poids de T ; seul un nombre fini de poids interviennent. Si $e \in E$ on note $\text{Supp}(e)$ l'ensemble (fini) des $\chi \in X(T)$ tels que la composante e_{χ} de e sur E_{χ} soit non nulle et $\langle \text{Supp}(e) \rangle$ l'enveloppe convexe de $\text{Supp}(e)$ dans $X(T) \otimes \mathbb{R} = X_{\mathbb{R}}$.

Pour $c \in X_{\mathbb{R}}$, $c \neq 0$ on note $D(c)$ le demi-espace $\{x \in X_{\mathbb{R}} / (x-c, c) \geq 0\}$ et $H(c) = \{x \in X_{\mathbb{R}} / (x-c, c) = 0\}$ l'hyperplan correspondant.

LEMME 2.11. Soit $e \in E$ alors, $e \in I_G(T) \iff \langle \text{Supp}(e) \rangle \not\supset 0 \iff \exists c \neq 0 \ c \in X_{\mathbb{Q}} = X(T) \otimes \mathbb{Q} \ \text{Supp}(e) \subset D(c)$.

DÉMONSTRATION. On sait que $e \in I_G(T) \iff \exists \lambda \in Y(T)$ tel que les poids de e par rapport à λ sont > 0 . Or $Y(T)$ et $X(T)$ sont deux \mathbb{Z} -modules libres en dualité par $\langle \chi, \lambda \rangle = \chi \circ \lambda \in X(\mathbb{C}_m) = \mathbb{Z}$ et les poids de e par rapport à λ sont les $\chi \circ \lambda$ pour $\chi \in \text{Supp}(e)$. Compte tenu de l'identification, grâce au produit scalaire sur $X_{\mathbb{R}}$, de $Y(T)$ à un sous- \mathbb{Z} -module de $X_{\mathbb{Q}}$, on a $e \in I_G(T) \iff \exists c \in X_{\mathbb{Q}}$ tel que $\forall \chi \in \text{Supp}(e) \ \langle \chi, c \rangle > 0$. Le lemme est donc maintenant évident.

2.12 FIN DE LA DÉMONSTRATION DE 2.7.

Pour $A \subset X_{\mathbb{R}}$, on note E_A l'espace vectoriel des $e \in E$ tels que $\text{Supp}(e) \subset A$. Comme $\text{Supp}(E)$ est fini il y a un nombre fini de tels espaces vectoriels.

D'après les définitions de $D(c)$, $M(c)$, P_c et le lemme 2.3 de l'exposé I, $E_{D(c)}$ est stable par le parabolique P_c et $E_{H(c)}$ par son sous-groupe de Lévi L_c . En particulier $G \cdot E_{D(c)}$ est fermé dans E (lemme 2.5).

D'après le lemme 2.11 $I_T(E) = \bigcup_{\substack{c \neq 0 \\ c \in X_{\mathbb{Q}}}} E_{D(c)}$ et donc $I_G(E)$ est contenu dans la réunion finie des fermés $G \cdot E_{D(c)}$.

Si X est une sous-variété irréductible, stable par G , de $I_G(E)$, il existe donc un $c \in X_Q$ tel que $X \subset G.E_{D(c)}$. Alors $X = G.X'$ avec $X' \subset E_{D(c)}$, i.e. $\text{supp}(X') \subset D(c)$. Soit c' le point de $\langle \text{supp}(X') \rangle$ le plus proche de 0 , alors $\text{supp}(X') \subset D(c')$, c'est-à-dire $X \subset G.E_{D(c')}$ et $c' \in \langle \text{supp}(X') \rangle \cap X_Q$. Le théorème résulte donc de la proposition suivante.

PROPOSITION 2.13. Soit $c \in X_Q$, $c \neq 0$, alors il existe $m \gg 1$ tel que $\chi = mc \in X(T)$ et un G -morphisme φ de $G.E_{D(c)}$ dans A_χ .

L'intersection des noyaux de tous les G -morphisms que l'on sait ainsi construire est une union finie de fermés de la forme $G.E_{D(c') \cap D(c)}$ pour $c' \in D(c)$ et $\|c'\| > \|c\|$.

1ère étape. Il existe un multiple χ de c qui est un caractère de T , donc aussi de $P_c = P_\chi$ et en particulier de L_c . Le groupe réductif $L'_c = (\text{Ker}(\chi) \cap L_c)^\circ$ est indépendant du multiple χ choisi et il existe un sous-groupe multiplicatif de L_c tel que $L_c = L'_c \cdot G_m$.

Soit S l'anneau des fonctions polynomiales sur $E_{H(c)}$ invariantes par L'_c (cela a un sens car L_c stabilise $E_{H(c)}$). Comme l'action de L'_c sur $k[E_{H(c)}]$ provient d'une action linéaire sur $E_{H(c)}$, elle est homogène; ainsi $S = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} S^m$, où les éléments de S^m sont homogènes de degré m . Je dis que l'action de L_c sur S^m se fait par le caractère $\chi = mc$ (en particulier $S^m = 0$ si $mc \notin X(T)$).

En effet soit (e_1, \dots, e_n) une base de $E_{H(c)}$ qui diagonalise l'action de T , avec donc des poids $\chi_1, \dots, \chi_n \in H(c)$. Soient X_1, \dots, X_n les applications coordonnées correspondantes, le monôme $\prod_{i=1}^n X_i^{r_i}$ est de poids $\sum_{i=1}^n r_i \cdot \chi_i \in H(\langle \sum_{i=1}^n r_i \rangle \cdot c)$ relativement à T . Or la décomposition $L_c = L'_c \cdot G_m$ montre que l'action de L_c sur S est celle de G_m , elle est donc diagonalisable avec des caractères multiples (rationnels) de c . La conjonction de ces deux résultats entraîne la propriété annoncée.

Soient maintenant $m \gg 1$ et $f \neq 0$, $f \in S^m$ (s'il en existe), on en déduit un P_c morphisme :

$$\hat{f}: E_{D(c)} \longrightarrow E_{D(c)}/E_{D(c)-H(c)} \simeq E_{H(c)} \xrightarrow{f} k$$

où P_c agit sur k par le poids $\chi = mc$; et un G -morphisme

$$\psi_f: G \times_{P_c} E_{D(c)} \longrightarrow G \times_{P_c} k \longrightarrow A_\chi \subset V^\chi$$

défini par $\psi_f(g, e) = g(\hat{f}(e) \cdot v_\chi)$.

2ème étape. Considérons le morphisme de Véronèse $v_m: E \longrightarrow E^{\otimes m}$ défini en 1.8. Alors f est le composé de v_m et d'une application linéaire f_1 de $E_{H(c)}^{\otimes m}$ dans k : par exemple $\prod_{i=1}^n X_i^{r_i}$ est le composé de v_m et de la projection sur $\bigotimes_{i=1}^n e_i^{\otimes r_i}$. Comme f est de poids χ , on peut considérer f_1 (resp. \hat{f}_1) comme la projection linéaire de $(E_{H(c)})^{\otimes m} = (E^{\otimes m})_{H(m \cdot c)}$ (resp. $(E^{\otimes m})_{D(m \cdot c)}$) sur un vecteur $e_\chi \in (E^{\otimes m})_{H(m \cdot c)}$ de poids $\chi = m \cdot c$.

Comme v_m est un G -morphisme on pourra, dans la suite, supposer f linéaire, avec $\chi = c$.

3ème étape. Il existe une application (ensembliste) φ_f de $G.E_{D(c)}$ dans A_χ qui factorise l'application ψ_f et est compatible aux actions de G .

Il suffit de montrer que si $e \in E_{D(c)}$, $g \in G$ sont tels que $g \notin P_c$ et $g.e \in E_{D(c)}$, alors $\hat{f}(e) = 0$; en effet la même démonstration montrera que $\hat{f}(g.e) = 0$ et donc $g \cdot \psi_f(e) = 0 = \psi_f(g.e)$.

Supposons $\hat{f}(e) \neq 0$ et appliquons à g la décomposition de Bruhat: $g = p \cdot w \cdot p'$, $p, p' \in P_c$, $w \in W$.

Or P_c stabilise $E_{D(c)}$ et \hat{f} est un P_c -morphisme; donc, quitte à remplacer e par $p'.e$ on peut supposer $p = p' = 1$: On a $f(e) \neq 0$, $w.e \in E_{D(c)}$ et il faut montrer que $w \in P_c$.

D'après l'étape précédente on peut supposer f linéaire et, puisque $f(e) \neq 0$, $\chi = c \in \text{Supp}(e)$.

Alors, $w.c \in w \cdot \text{Supp}(e) = \text{Supp}(w.e) \subset D(c)$. Mais c est le seul élément de $D(c)$ de norme $\|c\|$, donc $w.c = c$ et ainsi

$$P_c = P_{w.c} = w P_c w^{-1}, \text{ donc } w \in N_G(P_c) = P_c.$$

4ème étape. Quitte à remplacer f par une puissance f^r ($r \gg 1$) et donc X par rX , φ_f est un morphisme.

D'après la seconde étape, on peut supposer f linéaire, déterminée par un $e_\chi \in E_\chi \subset E_{H(c)}$, avec $c = \chi$. Si Ω est un ouvert non vide de G , $\Omega \cdot E_{D(c)}$ est un ouvert non vide de $G \cdot E_{D(c)}$ (lemme 2.5) et la réunion de ses translatés par G est $G \cdot E_{D(c)}$, il suffit donc d'examiner φ_f sur cet ouvert.

Soit $\Psi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ l'ensemble des racines $\alpha \in \Phi$ telles que $(\alpha, c) < 0$, c'est-à-dire telles que $U_\alpha \not\subset P_c$. Alors $\Omega = (\prod_{i=1}^n U_{\alpha_i}) \cdot P_c$ est un ouvert non vide de G : c'est le saturé pour P_c de la grosse cellule. On a $\Omega \times_{P_c} E_{D(c)} = (\prod_{i=1}^n U_{\alpha_i}) \times E_{D(c)}$ et le G -morphisme ψ_f vaut: $\psi_f(u_1, \dots, u_n, e) = (u_1 \dots u_n) \cdot \hat{f}(e)$, il est déterminé par $\psi_f(u_1, \dots, u_n, e_\chi) = \varphi_f((u_1 \dots u_n) \cdot e_\chi) = (u_1 \dots u_n) \cdot v_\chi$.

On choisit l'ordre sur Ψ tel que si $\alpha_i = \alpha_j + \alpha_\ell$ alors $i < j$ et $i < \ell$ et on identifie chaque U_{α_i} au groupe additif \mathbb{G}_a par un isomorphisme fixé.

Le lemme 2.3 de l'exposé I, montre qu'à chaque n -uplet $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{N}^n$ est associé un vecteur $v(\ell)$ de poids $\chi + \sum_{i=1}^n \ell_i \cdot \alpha_i$ tel que :

$$(*) \begin{cases} v(0, \dots, 0) = v_\chi \\ (u_1 \dots u_n) v_\chi = \sum_{\ell} v(\ell) \cdot \prod_{i=1}^n u_i^{\ell_i} \end{cases}$$

Le même résultat vaut pour le calcul de $(u_1 \dots u_n) e_\chi$.

La remarque page 40 de [2] montre que :

$\frac{(q+r)!}{r!q!} e(0, \dots, 0, q+r, \ell_{i+1}, \dots, \ell_n)$ se calcule linéairement en fonction de $e(0, \dots, 0, q, \ell_{i+1}, \dots, \ell_n)$.

En particulier en caractéristique 0 la nullité de $e(0, \dots, 0, 1, \ell_{i+1}, \dots, \ell_n)$ entraîne celle de $e(\ell_1, \dots, \ell_n)$ pour $\ell_i \gg 1$, (ceci peut se démontrer sans la remarque citée en passant par les

algèbres de Lie, voir [4;13.2]). En raisonnant par récurrence descendante sur i , on en déduit que soit u_i n'intervient pas dans le calcul de $(u_1 \dots u_n) \cdot e_\chi$ (mais alors puisque l'application φ_f existe il n'intervient pas non plus dans le calcul de $(u_1 \dots u_n) v_\chi$) soit il se calcule polynômialement à partir des coordonnées de $(u_1 \dots u_n) e_\chi$. Ainsi $\varphi_f((u_1 \dots u_n) e_\chi) = (u_1 \dots u_n) v_\chi$ est bien une expression polynômiale des coordonnées de $(u_1 \dots u_n) e_\chi$ et φ_f est un morphisme.

En caractéristique p , on voit facilement que si p ne divise pas r alors $\frac{(r \cdot p^q)!}{(p^q)!((r-1)p^q)!}$ n'est pas divisible par p . Ainsi, soit $e(0, \dots, 0, \ell_i, \dots, \ell_n) = 0 \quad \forall \ell_i \neq 1$ soit il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $e(0, \dots, 0, p^q, \ell_{i+1}, \dots, \ell_n) \neq 0$ et l'assertion $e(\ell) \neq 0$ implique que p^q divise ℓ_i .

Dans le premier cas u_i n'intervient pas dans le calcul de $(u_1 \dots u_n) e_\chi$ et donc dans celui de $(u_1 \dots u_n) v_\chi$. Dans le second, $u_i^{p^q}$ peut se calculer polynômialement à partir des coordonnées de $(u_1 \dots u_n) e_\chi$.

Quitte à augmenter q on peut le supposer indépendant de i .

Soit $r = p^q$, alors v^{rX} est un quotient de $(V^X)^{\otimes r}$, ou plutôt de son quotient symétrique $S^r(V^X)$, v_r est un G -morphisme de V^X dans v^{rX} et on a $v_r(v_\chi) = v_{rX}$. En fait v_r est l'élévation à la puissance p^q -ième et $v_r \circ \varphi_f$ est φ_{f^r} . On en déduit que dans l'expression (*) pour v^{rX} , chaque u_n n'intervient que par sa puissance u_n^r ; et ainsi φ_{f^r} est un morphisme.

5ème et dernière étape. Il reste à calculer l'intersection des noyaux des φ_f . L'intersection des noyaux des $f \in S^m$ pour $f \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m \gg 1$ est, par définition, la variété des points L'_c -instables dans $E_{H(c)}$. On peut donc la décrire comme réunion d'un nombre fini de fermés $L'_c \cdot (E_{H(c)} \cap E_{D(d)})$ pour $d \in X(T \cap L'_c) \otimes \mathbb{Q} \subset X_{\mathbb{Q}}$, $d \neq 0$, comme $L'_c = \text{Ker}(\chi)^\circ$ on a $(d, c) = 0$, donc $c \notin D(d)$.

L'intersection des noyaux des \hat{f} est réunion des fermés

$L'_c \cdot (E_{H(c)} \cap D(d) + E_{D(c)-H(c)}) = L'_c \cdot E_{(D(c) \cap D(d)) \cup (D(c)-H(c))}$. Mais c n'est pas dans l'enveloppe convexe de $(D(c) \cap D(d)) \cup (D(c)-H(c))$ donc il existe $c' \in D(c)$ tel que $\|c'\| > \|c\|$ et $(D(c) \cap D(d)) \cup (D(c)-H(c)) \subset D(c) \cap D(c')$. On en déduit donc l'assertion de la proposition 2.13.

§3. SECTIONS INSTABLES

On reprend les notations des paragraphes précédents, ainsi X est une variété propre irréductible que l'on suppose maintenant normale.

On note PA_X l'image dans l'espace projectif $\mathbb{P}(V^X)$ de $A_X - \{0\}$; c 'est un fermé de $\mathbb{P}(V^X)$ donc une variété projective. Le groupe réductif G agit sur $\mathbb{P}(V^X)$ et PA_X est une orbite de cette action.

On se donne une fibration principale $\gamma: X_\gamma \rightarrow X$ de groupe G et pour toute variété Y sur laquelle G agit on note $Y_\gamma = X_\gamma \times_G Y$.

PROPOSITION 3.1. On suppose qu'il existe une section instable non nulle d'un fibré vectoriel $V_{\gamma, \rho}$ sur X , alors,

- 1) il existe $x \neq 0$ $x \in X(T)$ et une section non nulle s de $A_{X, \gamma}$;
- 2) la section s_1 de $PA_{X, \gamma}$ sur un ouvert non vide de X , induite par s , se prolonge à un ouvert U de complémentaire de codimension au moins 2;
- 3) il existe une sous-fibration principale $\gamma': X_{\gamma'} \rightarrow U$ de groupe P_X , de $\gamma: X_\gamma \rightarrow U$; ainsi au-dessus de U on peut réduire à P_X le groupe structurel de tous les $V_{\gamma, \rho}$.

DÉMONSTRATION.

- 1) Soit σ la section donnée de $V_{\gamma, \rho}$; c 'est en fait une section de Y_γ , où $Y = I_G(V)$ est la variété des points instables de V . D'après 2.8 il existe une filtration $Y_\gamma = Y_{0, \gamma} \supset Y_{1, \gamma} \supset \dots \supset Y_{n, \gamma} = X \times \{0\}$ de Y_γ . Soit i le plus grand entier tel que $\sigma(X) \subset Y_{i, \gamma}$; alors il existe un G -morphisme $\varphi: Y_i \rightarrow A_X$ pour un certain caractère χ , tel que si $\varphi_\gamma: Y_{i, j} \rightarrow A_{X, \gamma}$ est l'application qui s'en déduit alors $\varphi_\gamma(\sigma(X)) \neq 0$.

Ainsi $s = \varphi_\gamma \circ \sigma$ est une section non nulle de $A_{X, \gamma}$.

- 2) Soit $U_1 = \{x \in X / s(x) \neq 0\}$, alors le composé de $s|_{U_1}$ avec la projection de $A_{X, \gamma} - X \times \{0\}$ sur $PA_{X, \gamma}$ est une section s_1 de $PA_{X, \gamma}$. Mais PA_X est projective donc $PA_{X, \gamma} \rightarrow X$ est propre, de plus X est normale donc cette section s_1 se prolonge comme indiqué [3;7.3.5].
- 3) Cette dernière assertion est une conséquence immédiate du lemme 1.5.

3.2 UN CAS PARTICULIER. On se donne maintenant un fibré vectoriel E sur X de rang n . Le groupe G est GL_n et la fibration principale est celle construite en 1.6. On reprend les notations de 1.7 et 2.3.

PROPOSITION 3.3. On suppose qu'un tordu $E^{(\ell)}$ de E possède une section instable σ non nulle, alors

- 1) Il existe un ouvert U de X de complémentaire de codimension au moins 2, et un caractère χ de T tels que au-dessus de U on peut réduire le groupe structurel de E à P_X .
- 2) Au-dessus de U , il existe des sous-fibrés vectoriels E_i de E pour $i=1, \dots, \ell$ de rangs $0 < d(1) < \dots < d(\ell) < n$ et inclus les uns dans les autres.
- 3) Si $a_1, \dots, a_{\ell-1} \geq 1$ et $a \in \mathbb{Z}$ sont les entiers déterminés par χ , et si la caractéristique de k est 0 il existe une section s' du fibré en droite $D = \bigotimes_{i=1}^{\ell} (\wedge^{d(i)} E_i)^{\otimes a_i} \otimes (\wedge E)^{\otimes a}$ sur U .

DÉMONSTRATION. La première assertion est un résumé de la proposition

- 3.1. Pour la seconde on construit facilement les $E_i: E_i = X_\gamma \times_{P_X} V_i$. Enfin on connaît une section s au-dessus de X de $A_{X, \gamma}$ donc de V_X^X . Mais comme on est en caractéristique 0, V^X est en fait un facteur direct de la représentation W^X définie en 2.3. D'après 1) et le lemme 1.4, au-dessus de U , $A_{X, \gamma}$ est $X_\gamma \times_{P_X} kv_X = D$. Mais par construction de X_γ , la section s_1 de $PA_{X, \gamma} = X_\gamma \times_{P_X} PA_X$ est en fait à valeurs dans $X_\gamma \times_{P_X} [v_X]$; il en résulte que, au-dessus de U , la section s de $A_{X, \gamma}$, qui détermine s_1 , est à valeurs dans $X_\gamma \times_{P_X} kv_X = D$.

REMARQUE. En caractéristique p , V^X est seulement un quotient de W^X et il n'y a pas de raison pour que la section s de V_Y^X se remonte en une section de W_Y^X . Par exemple, en langage de schémas, le stabilisateur P_X de kv_X n'est pas forcément P_X (ce qui est vrai en caractéristique 0); on a seulement $P_X = P_{\text{red}}$.

REMARQUE 3.4. On peut prolonger les fibrés E_i en des fibrés non forcément localement triviaux sur X de même rang, et les inclusions en des morphismes de fibrés. Si de plus X est lisse les E_i sont localement triviaux sur un ouvert de complémentaire de codimension au moins 3. En caractéristique 0, mais sans supposer X lisse, la section s' se prolonge (par 0) sur tout X .

- * [1] F.A. BOGOMOLOV notes manuscrites distribuées au C.I.M.E (Juillet 1977).
- * [2] A. BOREL et alli.- Seminar on algebraic groups and related finite groups. Springer Lecture Note 131 (1970).
- * [3] A. GROTHENDIECK.- Eléments de géométrie algébrique, II. Pub. Math. I.H.E.S. n° 8 (1961).
- * [4] J.E. HUMPHREYS.- Linear algebraic groups. Springer Verlag (1975).
- * [5] D. LUNA.- Slices étales. Bull. Soc. Math. France, mémoire 33 (1973), p. 81-105.
- * [6] R.W. RICHARDSON.- Affine coset spaces of reductive algebraic groups. Bull. London Math. Soc., 9 (1977), p. 38-41.

Université de Nancy I
Département de Mathématique
Case Officielle n° 140
54037 NANCY CEDEX (France)

Exposé X

FIBRÉS VECTORIELS INSTABLES-APPLICATIONS AUX SURFACES

par M. RAYNAUD (d'après Bogomolov) (*)

Sources. Notes manuscrites de Bogomolov distribuées au CIME (juillet 77).

Pre-print de M. Reid "Bogomolov's theorem $c_1^2 \ll 4c_2$ ", (Kyoto 77).

0. NOTATIONS

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, X un k -schéma propre intègre normal, E un fibré vectoriel sur X et r son rang.

Si Z est un k -schéma, muni d'une action de Gl_r , on note \tilde{Z} le X -schéma déduit de Z par torsion par E (Exp. 1.1). Lorsque Z est l'espace V d'une représentation vectorielle ρ de Gl_r , \tilde{V} est canoniquement muni d'une structure de fibré vectoriel sur X et on le note $E^{(\rho)}$.

1. FIBRÉS VECTORIELS INSTABLES

DÉFINITION 1.1. Le fibré E est instable, s'il existe une représentation ρ de Gl_r , de déterminant 1 (i.e. qui se factorise à travers PGl_r), telle que $E^{(\rho)}$ possède une section s non nulle.

(*) Equipe de Recherche Associée au C.N.R.S. n° 653.