Difféomorphismes d'une variété symplectique non compacte.

Autor(en): **Rousseau, Guy**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band(Jahr): **53(1978)**

Erstellt am: **12.05.2014**

Persistenter Link: http://dx.doi.org/10.5169/seals-40791

Comment. Math. Helvetici **53** (1978) 622–633 Birkhäuser Verlag, Basel

Difféomorphismes d'une variété symplectique non compacte

GUY ROUSSEAU

Dans [1] A. Banyaga a étudié le groupe $\mathrm{Diff}_\Omega(M)$ des difféomorphismes symplectiques à support compact d'une variété symplectique M. Le but de cet article est d'apporter quelques compléments au travail de Banyaga. Le résultat principal est la détermination de la structure du plus grand quotient résoluble de la composante connexe de $\mathrm{Diff}_\Omega(M)$ quand M n'est pas compacte.

Je suis heureux de remercier ici A. Banyaga pour une intéressante correspondance et A. Fathi pour de nombreux conseils.

1. L'invariant S

Dans tout cet article les espaces d'applications différentiables entre variétés sont munis de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact pour l'application et toutes ses dérivées partielles.

On considère une *variété symplectique* M, i.e. une variété C^∞ connexe, sans bord, dénombrable à l'infini, munie d'une *forme symplectique* $\Omega \in \wedge^2(X)$, autrement dit $d\Omega = 0$, $\dim(M) = 2n (n \geq 1)$ et Ω^n est une forme volume.

Si X est un champ de vecteurs, on note $i(X)$ le produit intérieur par X, c'est une antidérivation de degré-1 de $\wedge(M)$. Ainsi $X \mapsto i(X)\Omega$ définit un isomorphisme de l'espace des champs de vecteurs à support compact sur celui des 1-formes à support compact. Ce résultat s'étend aux espaces $CVP(M)$ des champs de vecteurs à support compact dépendant différentiablement d'un paramètre et $FDP(M)$ des 1-formes à support compact dépendant differentiablement d'un paramètre.

On considère le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ à support compact de M et le sous-groupe $\mathrm{Diff}_\Omega(M) = \{h \in \mathrm{Diff}(M)/h^*\Omega = \Omega\}$ des *difféomorphismes symplectiques* de M.

On note Isotop (M) le groupe des isotopies de M à support compact et $\mathrm{Isotop}_\Omega(M) = \{h_t \in \mathrm{Isotop}(M)/h_t^*\Omega = \Omega, \quad \forall t \in I = [0, 1]\}$ le sous-groupe des *isotopies symplectiques*.

L' application

$$h_t \mapsto \dot{h}_t, \qquad \dot{h}_t(x) = \frac{\partial h_t}{\partial t}(h_t^{-1}(x))$$

est un homéomorphisme de Isotop (M) sur $CVP(M)$.

On a alors les résultats suivants:

1.1([1; I.1.3]): *Soit α une forme fermée et $h_t \in$ Isotop (M), alors*

$$h_t^*\alpha - \alpha = d\,\beta_t \quad avec \quad \beta_t = \int_0^t h_s^*(i(\dot{h}_s)\alpha)\,ds.$$

1.2: $\text{Isotop}_\Omega\,(M) = \{h_t \in \text{Isotop}\,(M)/i(\dot{h}_t)\Omega \textit{ fermée}, \ \forall t \in I\}$.

1.3([4]): $\text{Diff}_\Omega\,(M)$ *est localement contractile.*

On note $G_\Omega\,(M)$ la composante connexe de l'élément neutre de $\text{Diff}_\Omega\,(M)$.

C'est ce groupe que l'on va étudier dans la suite. D'après 1.3 son revêtement universel est $\tilde{G}_\Omega = \text{Isotop}_\Omega\,(M)$/homotopie.

Si $h_t \in \text{Isotop}_\Omega\,(M)$, on définit:

$$\sum(h_t) = \int_0^1 i(\dot{h}_t)\Omega\,dt$$

qui appartient au groupe $Z_c^1(M)$ des 1-formes fermées à support compact (cf. 1.2), et $\tilde{S}(h_t)$ = la classe de $\sum(h_t)$ dans le groupe de cohomologie $H_c^1(M)$, quotient de $Z_c^1(M)$ par le groupe $B_c^1(M)$ des 1-formes exactes à support compact.

PROPOSITION 1.4. ([5]). *$\tilde{S}$ définit un homomorphisme de groupes surjectif et continu de $\tilde{G}_\Omega\,(M)$ sur $H_c^1\,(M)$.*

Démonstration. [1; II; 1.1] ou 2.1, 2.3 et 2.6 ci-dessous.

1.5 *L'invariant S.* Comme $G_\Omega\,(M)$ est un espace séparable et localement contractile, $\pi_1(G_\Omega\,(M))$ est dénombrable; donc $\Gamma = \tilde{S}(\pi_1(G_\Omega\,(M)))$ est un sous-groupe dénombrable de $H_c^1\,(M)$.

On obtient ainsi un homomorphisme de groupe surjectif et continu:

$$G_\Omega\,(M) \xrightarrow{S} H_c^1\,(M)/\Gamma.$$

THEOREME 1.6 ([1: II.6.1]). *Si M est compacte,* Ker S *est un groupe simple, de plus* Ker S *agit transitivement sur M.*

Ainsi dans ce cas, $G_\Omega(M)$ se dévisse en un groupe commutatif quotient et un sous-groupe simple non commutatif.

2. Quelques lemmes

LEMME 2.1. *Soit $H_{s,t}$ une famille différentiable à 2 paramètres dans I, de difféomorphismes symplectiques telle que $H_{0,0} = Id$, alors si*

$$X_{s,t}(x) = \frac{\partial H_{s,t}}{\partial t}(H_{s,t}^{-1}(x)); \qquad Y_{s,t}(x) = \frac{\partial H_{s,t}}{\partial s}(H_{s,t}^{-1}(x));$$

On a

$$\sum(H_{1,t}) - \sum(H_{s,1}) - \sum(H_{0,t}) + \sum(H_{s,0}) = df$$

avec

$$f = \iint_{I^2} \Omega(Y_{s,t}; X_{s,t})\, ds\, dt$$

fonction C^∞ à support compact.

Démonstration. C'est une reformulation de ce qui est démontré en [1; II.1.1].

LEMME 2.2. *Si ξ et η sont deux champs de vecteurs, on a:*

$$\Omega(\xi, \eta)\Omega^n = n(i(\xi)\Omega \wedge i(\eta)\Omega \wedge \Omega^{n-1})$$

Démonstration. En effet:

$$0 = i(\xi)[\Omega^n \wedge i(\eta)\Omega] = \left(\sum_{j=1}^{n} \Omega^{j-1} \wedge i(\xi)\Omega \wedge \Omega^{n-j} \wedge i(\eta)\Omega\right) + \Omega^n \cdot i(\xi)i(\eta)\Omega$$

donc:

$$\Omega(\xi, \eta)\Omega^n = -\Omega^n \cdot i(\xi)i(\eta)\Omega = n(i(\xi) \wedge i(\eta)\Omega \wedge \Omega^{n-1})$$

PROPOSITION 2.3. *Soient* $\varphi_t, \psi_t \in \mathrm{Isotop}_\Omega (M)$, *alors:*

$$\sum (\varphi_t \circ \psi_t) = \sum (\varphi_t) + \sum (\psi_t) + df$$

avec

$$f = \iint_{0 \leq s \leq t \leq 1} \Omega(\dot{\varphi}_s, \varphi_s^*(\dot{\psi}_t))\, ds\, dt$$

fonction C^∞ *à support compact et*

$$f\Omega^n = n \iint_{0 \leq s \leq t \leq 1} i(\dot{\varphi}_s) \wedge \Omega i(\dot{\psi}_t)\Omega \wedge \Omega^{n-1}\, ds\, dt \quad \textit{dans} \quad H_c^{2n}(M).$$

Démonstration

(1) on pose $H_{s,t} = \varphi_{st} \circ \psi_t$, on a alors:

$$Y_{s,t}(x) = t\dot{\varphi}_{st}(x) \quad \text{et} \quad X_{s,t}(x) = s\dot{\varphi}_{st}(x) + \varphi_{st}^* (\dot{\psi}_t)(x)$$

(en posant $\varphi_{st}^*(\dot{\psi}_t)(x) = T\varphi_{st}(\dot{\psi}_t(\varphi_{st}^{-1}(x)))$. Et de plus $X_{1,t} = \dot{\widehat{\varphi_t \circ \psi_t}}$; $X_{0,t} = \dot{\psi}_t$; $Y_{s,1} = \dot{\varphi}_s$; $Y_{s,0} = 0$. Le Lemme 2.1 montre donc que

$$\sum (\varphi_t \circ \psi_t) = \sum (\varphi_t) + \sum (\psi_t) + df$$

avec

$$f = \iint_{I^2} t\Omega(\dot{\varphi}_{st}, \varphi_{st}^*(\dot{\psi}_t))\, dt\, ds = \iint_{0 \leq u \leq t \leq 1} \Omega(\dot{\varphi}_u, \varphi_u^*(\dot{\psi}_t))\, dt\, du,$$

d'où la première formule.

(2) en appliquant le lemme 2.2, on obtient:

$$f\Omega^n = n \iint_{0 \leq s \leq t \leq 1} i(\dot{\varphi}_s)\Omega \wedge i(\varphi_s^*(\dot{\psi}_t))\Omega \wedge \Omega^{n-1}\, dt\, ds.$$

Mais ([3; IV 1.8, p. 89]) $i(\varphi_s^*(\dot{\psi}_t))\Omega = \varphi_s^{*^{-1}}(i(\dot{\psi}_t)\varphi_s^*(\Omega)) = \varphi_s^{*^{-1}}(i(\dot{\psi}_t)\Omega)$,

et cette dernière forme est cohomologue à $i(\dot{\psi}_t)\Omega$ d'après 1.1, d'où la seconde formule.

DEFINITIONS 2.4

(1) On note $\mathrm{Isotop}^l_\Omega(M)$ l'ensemble des isotopies h_t de $\mathrm{Isotop}_\Omega(M)$ vérifiant les conditions équivalentes suivantes:

(a) $i(\dot{h}_t)\Omega$ est indépendant de t à un bord près;

(b) Si h_{st} désigne l'isotopie $t \mapsto h_{st}$ alors: $\tilde{S}(h_{st}) = s\tilde{S}(h_t)$, $\forall s \in I$.

[D'après la proposition 1.4, $\mathrm{Isotop}^l_\Omega(M)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Isotop}_\Omega(M)$].

(2) $\mathrm{Isotop}(\mathrm{Ker}\, S) = \{h_t \in \mathrm{Isotop}_\Omega(M) / h_t \in \mathrm{Ker}\, S, \ \forall t \in I\}$.

[$\mathrm{Isotop}(\mathrm{Ker}\, S)$ est donc le sous-groupe $\mathrm{Ker}\, \tilde{S} \cap \mathrm{Isotop}^l_\Omega M)$].

(3) Une *belle section* de $\tilde{S}$: $\mathrm{Isotop}_\Omega(M) \to H^1_c(M)$ est une section $\tilde{L}$ de $\tilde{S}$ telle que:

(a) $\tilde{L}$ induit une application $\mathbf{R}$-linéaire de $H^1_c(M)$ dans $CVP(M)$ (voir notation au §1.)

(b) $\tilde{L}(H^1_c(M)) \subset \mathrm{Isotop}^l_\Omega(M)$.

LEMME 2.5. $\forall \varphi_t$, $\psi_t \in \mathrm{Isotop}^l_\Omega(M)$, *les égalités suivantes ont lieu modulo des éléments df tels que $f\Omega^n$ soient des bords:*

$$\sum(\varphi_t \circ \psi_t) = \sum(\varphi_t) + \sum(\psi_t) + \frac{n}{2}\, d\left(\frac{\tilde{S}(\varphi_t) \wedge \tilde{S}(\psi_t) \wedge \Omega^{n-1}}{\Omega^n}\right)$$

$$i(\dot{\widehat{\varphi_t \circ \psi_t}}) = i(\dot{\varphi}_t)\Omega + i(\dot{\psi}_t)\Omega + n\, d\left(\frac{\tilde{S}(\varphi_t) \wedge \tilde{S}(\psi_t) \wedge \Omega^{n-1}}{\Omega^n}\right)$$

$$\sum(\varphi_t^{-1}) = -\sum(\varphi_t)$$

Démonstration. Par définition, on a, pour tout t, $i(\dot{\varphi}_t)\Omega = \tilde{S}(\varphi_t)$ dans $H^1_c(M)$, la première formule est donc une reformulation de 2.3, la troisième en découle aussitôt, ainsi que la seconde en dérivant.

PROPOSITION 2.6. *Il existe des belles sections de $\tilde{S}$; toutes sont continues. Pour construire une belle section, on peut choisir dans* $\mathrm{Isotop}^l_\Omega(M)$ *l'image d'une base (a_i) de $H^1_c(M)$, (sous la seule condition que $\tilde{S}(\tilde{L}(a_i)) = a_i$).*

Démonstration. Si (a_i) est une base de $H^1_c(M)$, choisissons des 1-forms α_i dont les classes sont a_i; si on pose $\tilde{L}(\sum \lambda_i a_i) = h_t$ avec $i(\dot{h}_t)\Omega = \sum \lambda_i \alpha_i$, $\forall t$, alors $\tilde{L}$ est une belle section.

La continuité équivaut à celle d'une application linéaire de $H^1_c(M)$ dans $\mathrm{FDP}(M)$(voir notation au §1); elle est évidente puisque l'image dans $H^1_c(M)$ du sous-espace de $\mathrm{FDP}(M)$ des formes à support dans un compact donné est un espace de dimension finie.

La troisième assertion est évidente.

Remarque 2.7. Les applications $\tilde{S}$ et $\tilde{L}$ sont (au moins) paramétriquement différentiables, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\tilde{S}$ et $\tilde{L}$ changent les chemins différentiables à n paramètres dans $\mathrm{Isotop}_\Omega(M)$ à support compact (i.e. les chemins différentiables à $n+1$ paramètres dans $G_\Omega(M)$ à support compact) et les chemins différentiables à n paramètres à support compact dans $H_c^1(M)$ ("à support compact" signifie ici que l'image de I^n est dans un sous-espace de dimension finie).

On déduit de ceci que:

(1) Tout $h_t \in \mathrm{Isotop}_\Omega(M)$ est différentiablement homotope à extrémités fixées à un $g_t \in \mathrm{Isotop}_\Omega^l(M)$. Ainsi $\mathrm{Isotop}_\Omega^l(M)$ s'envoie surjectivement dans $G_\Omega(M)$.

(La démonstration est écrite, sans parler de $\tilde{L}$, en [1;II.3.1].)

(2) Deux isotopies de $\mathrm{Isotop}_\Omega^l(M)$ (resp Isotop (Ker S)) différentiablement homotopes à extrémités fixées dans $\mathrm{Isotop}_\Omega(M)$ le sont dans $\mathrm{Isotop}_\Omega^l(M)$ (resp Isotop (ker S)).

PROPOSITION 2.8.

(1) Ker S *est connexe par arc différentiable,* [*donc* Ker S *est un quotient de* Isotop (Ker S)].

(2) $\mathrm{Isotop}\,(\mathrm{Ker}\,S) = \{h_t \in \mathrm{Isotop}\,(M)/i(\dot{h}t)\Omega \in B_c^1(M),\ \forall t \in I\}$.

Démonstration

(1) Par définition, si $h \in \mathrm{Ker}\,S$, il existe $h_t \in \mathrm{Isotop}_\Omega(M)$, tel que $h = h_1$ et $\tilde{S}(h_t) = 0$; d'après 2.7.1, on peut supposer $h_t \in \mathrm{Isotop}_\Omega^l(M) \cap \mathrm{Ker}\,\tilde{S} = \mathrm{Isotop}$ (Ker S).

(2) Si $h_t \in \mathrm{Isotop}\,(M)$et $i(\dot{h}_t)\Omega \in B_c^1(M)$, $\forall t$; alors $h_t \in \mathrm{Isotop}_\Omega^l(M)$ (1.2 et 2.4.1) et $\tilde{S}(h_t) = 0$, donc $h_t \in \mathrm{Isotop}$ (Ker S).

Réciproquement. Si $h_t \in \mathrm{Isotop}$ (Ker S), alors, $\forall s$, $h_s \in \mathrm{Ker}\,S$, donc $\tilde{S}(h_{st}) \in \Gamma$(notation de 2.4.1b); mais $\tilde{S}(h_{st})$ est une fonction continue de $s \in [0, 1]$ à valeur dans Γ dénombrable. Donc $\forall s$, on a: $0 = \tilde{S}(h_{st}) = \int_0^s i(\dot{h}_t)\Omega\, dt \in H_c^1(M)$; en dérivant par rapport à s, on obtient: $i(\dot{h}_t)\Omega \in B_c^1(M)$, $\forall t$.

3. Cas non compact: L'invariant R

On suppose dorénavant M non compacte.

3.1. L'INVARIANT $\tilde{R}$. ([5]). Si $h_t \in \mathrm{Isotop}$ (Ker S), alors, d'après 2.8, $\sum(h_t)$ est un bord, i.e. $\sum(h_t) = df$ où f est une fonction C^∞ à support compact, mais comme

M est non compacte, ces deux conditions déterminent uniquement f, et on pose:

$$\tilde{R}(h_t) = \int_M f\Omega^n \in \mathbf{R}.$$

On note $\widetilde{\operatorname{Ker} S} = \operatorname{Isotop}$ (Ker S)/(homotopie C^∞ dans Ker S à extrémités fixées). D'après 2.7.2, $\widetilde{\operatorname{Ker} S}$ s'identifie à un sous-groupe de $\tilde{G}_\Omega$.

PROPOSITION 3.2. ([5]). *$\tilde{R}$ définit un homomorphisme de groupe surjectif et continu de $\widetilde{\operatorname{Ker} S}$ sur* $\mathbf{R}$.

Démonstration. Si $H_{s,t}$ est une famille différentiable à deux paramètres de difféomorphismes symplectiques dans Ker S telle que $H_{s,1} = H_{s,0} = 1 \forall s$; les Lemmes 2.1 et 2.2 montrent que: $\sum(H_{1,t}) = \sum(H_{0,t}) + df$ où la fonction C^∞ à support compact f vérifie:

$$\int_M f\Omega^n = \iint_{I^2} \left[\int_M i(Y_{s,t})\Omega \wedge i(X_{s,t})\Omega \wedge \Omega^{n-1} \right] ds\, dt$$

Mais d'après 2.8, $i(Y_{s,t})\Omega$ et $i(X_{s,t})\Omega$ sont des bords. Donc $\int_M f\Omega^n = 0$ et $\tilde{R}(H_{1,t}) = \tilde{R}(H_{0,t})$. Ainsi $\tilde{R}$ se factorise par $\widetilde{\operatorname{Ker} S}$, c'est un morphisme de groupe d'après 2.3 (et 2.8); il est évidemment continu et il est surjectif d'après 3.3.

LEMME 3.3. *Il existe une section continue $m : \mathbf{R} \to$ Isotop (Ker S) de $\tilde{R}$ qui est un homomorphisme de groupes.*

Démonstration. Soit f une fonction C^∞ à support compact telle que: $\int_M f\Omega^n = 1$. Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, le gradient symplectique $X_\lambda = \lambda X_1$ de λf. (i.e. $i(X_\lambda)\Omega = d(\lambda f)$) fournit par intégration un groupe à un paramètre $m(\lambda) = h_t^\lambda$ tel que $\tilde{R}((h_t^\lambda)) = \lambda$ et $h_t^\lambda = h_{\lambda t}^1$; d'où le lemme.

3.4. L'INVARIANT R. Soit $\wedge$ le sous-groupe $\tilde{R}(\pi_1(\operatorname{Ker} S))$ de $\mathbf{R}$, $\tilde{R}$ induit donc un homomorphisme de groupes surjectif et continu $R : \operatorname{Ker} S \to \mathbf{R}/\wedge$.

D'après 2.7.2, $\pi_1(\operatorname{Ker} S)$ s'identifie à un sous-groupe de $\pi_1(G_\Omega)$ et est donc dénombrable. Ainsi $\wedge$ est dénombrable et $\mathbf{R}/\wedge$ est non nul.

Si Ω est une forme exacte, Γ est nul ainsi que $\wedge$ ([1; cor. II.4.3]). De plus, Banyaga donne alors des définitions directes des invariants R et S sans l'aide des isotopies.

THEOREME 3.5 ([1; II.6.2]). (*Si M est non compacte*), Ker R *est un groupe simple, il agit transitivement sur* M.

Ainsi G_Ω se dévisse en un sous-groupe simple non commutatif et un groupe quotient résoluble. C'est la structure de ce dernier qui nous occupe au paragraphe suivant.

4. Cas non compact: Le plus grand quotient résoluble de G_Ω.

On suppose toujours M non compacte. On note $\langle , \rangle$ la forme bilinéaire alternée sur $H_c^1(M)$ définie par:

$$\langle a, b\rangle = \int_M a \wedge b \wedge \Omega^{n-1}.$$

PROPOSITION 4.1. *Pour tous* h_t, $g_t \in \mathrm{Isotop}_\Omega(M)$, *leur commutateur* $[h_t, g_t]$ *est dans* Isotop (Ker S) *et vérifie* $\tilde{R}([h_t, g_t]) = n\ \langle \tilde{S}(h_t), \tilde{S}(g_t)\rangle$.

Démonstration. Comme $G_\Omega/\mathrm{Ker}\, S \simeq H_c^1(M)/\Gamma$ est commutatif, $[h_t, g_t] = h_t g_t h_t^{-1} g_t^{-1}$ est dans Ker S, $\forall t \in I$ et, de plus, si h_t ou g_t est modifié par une homotopie, $[h_t, g_t]$ est modifié par une homotopie dans Ker S. Ceci et la remarque 2.7.1 nous autorisent à ne vérifier la dernière assertion que pour $h_t, g_t \in \mathrm{Isotop}_\Omega^l(M)$.

D'après le Lemme 2.5, les égalités ci-dessous ont lieu modulo un terme df où f est une fonction C^∞ à support compact telle que $f\Omega^n$ soit un bord.

$$\begin{aligned}
\sum([g_t, h_t]) &= \sum(g_t) + \sum(h_t g_t^{-1} h_t^{-1}) + \frac{n}{2} d\left(\frac{\tilde{S}(g_t) \wedge (-\tilde{S}(g_t)) \wedge \Omega^{n-1}}{\Omega^n}\right) \\
&= \sum(g_t) + \sum(h_t) + \sum(g_t^{-1} h_t^{-1}) \\
&\qquad + \frac{n}{2} d\left(\frac{\tilde{S}(h_t) \wedge (-(\tilde{S}(g_t)) + \tilde{S}(h_t)) \wedge \Omega^{n-1}}{\Omega^n}\right) \\
&= \frac{n}{2} d\left(\frac{(-\tilde{S}(g_t)) \wedge (-\tilde{S}(h_t)) \wedge \Omega^{n-1}}{\Omega^n}\right) + \frac{n}{2} d\left(\frac{\tilde{S}(h_t) \wedge \tilde{S}(g_t) \wedge \Omega^{n-1}}{\Omega^n}\right) \\
&= nd\left(\frac{\tilde{S}(g_t) \wedge \tilde{S}(h_t) \wedge \Omega^{n-1}}{\Omega^n}\right).
\end{aligned}$$

D'où la proposition.

COROLLAIRE 4.2. $\Gamma \subset H_c^1(M)^\perp = \{a \in H_c^1(M) / \langle a, b\rangle = 0,\ \forall b \in H_c^1(M)\}$.

Démonstration. On sait que $\pi_1(G_\Omega(M))$ est dans le centre de $\tilde{G}_\Omega(M)$; le corollaire résulte donc de la proposition et de la surjectivité de $\tilde{S}$.

COROLLAIRE 4.3.
(1) *$\forall g, h \in G_\Omega$ leur commutateur $[g, h]$ est dans* Ker S *et on a:*

$$R([g, h]) = n\langle S(g), S(h)\rangle.$$

(2) Ker R *est distingué dans $G_\Omega(M)$.*
(3) *Le centre de $G_\Omega(M)$/*Ker R *est $S^{-1}(H_c^1(M)^\perp/\Gamma)$/*Ker R.
(4) *G_Ω/*Ker R *est extension centrale de $H_c^1(M)/\Gamma$ par $\mathbf{R}/\wedge$.*

Remarque. Comme $\Gamma \subset H_c^1(M)^\perp$, la forme $\langle,\rangle$ est définie sur $H_c^1(M)/\Gamma$.

Démonstration. Ce sont des conséquences immédiates de 4.1.

COROLLAIRE 4.4. *Le sous-groupe $[G_\Omega, G_\Omega]$ des commutateurs de G_Ω est égal à* Ker R *ou* Ker S *selon que la forme bilinéaire alternée $\langle,\rangle$ sur $H_c^1(M)$ est identiquement nulle ou non.*

Démonstration. Comme Ker R est simple et non commutatif, il est parfait, donc $[G_\Omega, G_\Omega] \supset [\text{Ker } R, \text{Ker } R] = \text{Ker } R$; le corollaire résulte donc de 4.3.1, la surjectivité de S et la bilinéarité de $\langle,\rangle$.

Remarque 4.5. Si Ω est une forme exacte et si $n \geq 2$, alors la forme $\langle,\rangle$ est nulle et $[G_\Omega, G_\Omega] = \text{Ker } R$ est simple; on retrouve ainsi [1; II.6.3 ii)].

Si $n = 1$ (auquel cas Ω est exacte), cela n'est pas forcément vrai; il suffit de prendre pour M le tore de genre 1 auquel on a retiré un point.

On obtient ainsi des exemples où $[G_\Omega, G_\Omega]$ n'est pas simple.

PROPOSITION 4.6. *Soit $\tilde{L}$ une belle section de $\tilde{S}$, alors*
(1) *$\forall a, b \in H_c^1(M)$, $\tilde{L}(a)\tilde{L}(b)\tilde{L}(a+b)^{-1} \in$* Isotop(Ker S) *et*

$$\tilde{R}(\tilde{L}(a)\tilde{L}(b)\tilde{L}(a+b)^{-1}) = (n/2)\langle a, b\rangle.$$

(2) Isotop$^l_\Omega(M)$/Ker $\tilde{R}$ *est extension centrale de* Isotop$^l_\Omega(M)$/Isotop (Ker S) $\simeq$ $H_c^1(M)$ *par* Isotop (Ker S)/Ker $\tilde{R} \simeq \mathbf{R}$, *et la 2-classe de cohomologie correspondante est la classe du 2-cocycle $(n/2)\langle a, b\rangle$.*

Plus précisément l'application

$$\text{Isotop}^l_\Omega(M)/\text{Ker } \tilde{R} \xrightarrow{u} H_c^1(M) \times \mathbf{R}$$

$$h_t \mapsto (\tilde{S}(h_t), \tilde{R}(h_t \cdot \tilde{L}(\tilde{S}(h_t))^{-1}))$$

est un isomorphisme de groupes topologiques, si l'on munit $H_c^1(M)\times\mathbf{R}$ *de la multiplication*

$$(a,\lambda)(b,\mu)=\left(a+b,\lambda+\mu+\frac{n}{2}\langle a,b\rangle\right).$$

Remarque. D'après 2.7.2 on peut considérer $\widetilde{\operatorname{Ker} S}$ comme un sous-groupe de $\tilde{G}_\Omega$, donc cette proposition donne en fait la structure du groupe $\tilde{G}_\Omega/\operatorname{Ker}\tilde{R}$.

Démonstration

(1) $\tilde{L}(a)\tilde{L}(b)\tilde{L}(a+b)^{-1}\in\operatorname{Ker}\tilde{S}\cap\operatorname{Isotop}_\Omega^l(M)=\operatorname{Isotop}(\operatorname{Ker} S)$. Les égalités suivantes ont lieu modulo un terme df où f est une fonction C^∞ à support compact telle que $f\Omega^n$ soit un bord.

$$\begin{aligned}\sum(\tilde{L}(a)\tilde{L}(b)\tilde{L}(a+b)^{-1})&=\sum(\tilde{L}(a))+\sum(\tilde{L}(b)\tilde{L}(a+b)^{-1})\\&\quad+\frac{n}{2}d\left(\frac{a\wedge(-a)\wedge\Omega^{n-1}}{\Omega^n}\right)\\&=\sum(\tilde{L}(a))+\sum(\tilde{L}(b))+\sum(\tilde{L}(a+b)^{-1})\\&\quad+\frac{n}{2}d\left(\frac{b\wedge(-a-b)\wedge\Omega^{n-1}}{\Omega^n}\right)\\&=\frac{n}{2}d\left(\frac{a\wedge b\wedge\Omega^{n-1}}{\Omega^n}\right)+\sum(\tilde{L}(a))+\sum(\tilde{L}(b))\\&\quad-\sum(\tilde{L}(a+b))\\&=\frac{n}{2}d\left(\frac{a\wedge b\wedge\Omega^{n-1}}{\Omega^n}\right);\end{aligned}$$

puisque, par définition d'une belle section, $\sum\circ\tilde{L}$ est une application linéaire.

La première assertion résulte de cette formule.

(2) Soit v l'application de $H_c^1(M)\times\mathbf{R}$ dans $\operatorname{Isotop}_\Omega^l(M)/\operatorname{Ker}\tilde{R}$ définie par $v(a,\lambda)=m(\lambda)\cdot\tilde{L}(a)$ (Lemme 3.3); u et v sont deux applications continues inverses l'une de l'autre. Il reste à voir que la structure de groupe induite sur $H_c^1(M)\times\mathbf{R}$ est celle indiquée; mais cela résulte aussitôt de 1) et de 4.1.

THEOREME 4.7. *$G_\Omega(M)/\operatorname{Ker} R$ est extension centrale de $G_\Omega(M)/\operatorname{Ker} S\simeq H_c^1(M)/\Gamma$ par $\operatorname{Ker} S/\operatorname{Ker} R\simeq\mathbf{R}/\wedge$ et la 2-classe de cohomologie correspondante est la classe du 2-cocycle $(n/2)\langle a,b\rangle$.*

Remarque. Il existe donc un isomorphisme de groupe de $G_\Omega(M)/\operatorname{Ker} R$ sur

$H_c^1(M)/\Gamma\times\mathbf{R}/\wedge$, (pour la multiplication $(a, \lambda)(b, \mu)=(a+b, \lambda+\mu+n/2\langle a, b\rangle)$). Mais cet isomorphisme n'est pas forcément un homéomorphisme. La proposition ci-dessous montre que c'est cependant vrai avec une petite condition sur Γ. Il est probable que cette condition est toujours remplie; de toute façon, si Γ ne la vérifie pas, les topologies qui interviennent ne sont pas jolies.

Démonstration. Le centre de $G_\Omega/\mathrm{Ker}\, R$ est un groupe commutatif extension de $H_c^1(M)^\perp/\Gamma$ par le groupe divisible $\mathbf{R}/\wedge$ (4.3.3), il est donc isomorphe au produit de ces deux groupes ([2; I §3]). Ainsi, il existe un morphisme de group L_1 (éventuellement non continu) de $H_c^1(M)^\perp/\Gamma$ dans le centre de $G_\Omega/\mathrm{Ker}\, R$ qui est une section de S.

Soient V un supplémentaire de $H_c^1(M)^\perp$ dans $H_c^1(M)$ et π la projection de $\mathrm{Isotop}_\Omega^l(M)$ sur $G_\Omega(M)$, $(\pi(h_t)=h_1)$. Si $\tilde{L}$ est une belle section de $\tilde{S}$, $L_2=\pi\circ\tilde{L}/_V$ est sur V une section de S.

Tout élément a de $H_c^1(M)/\Gamma$ s'écrit d'une manière unique $a=b+c$ avec $b\in H_c^1(M)^\perp/\Gamma$ et $c\in V$; posons alors $L(a)=L_1(b)\cdot L_2(c)=L_2(c)\cdot L_1(b)$. L'application L de $H_c^1(M)/\Gamma$ dans G_Ω est une section de S et on vérifie aussitôt que $R(L(a)L(b)L(a+b)^{-1})=(n/2)\langle a, b\rangle$, ce qui démontre le théorème.

PROPOSITION 4.8. *Supposons qu'il existe une base $(e_i)_{i\in J}$ du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $H_c^1(M)$ et un sous-ensemble J_0 de J tels que $(e_i)_{i\in J_0}$ soit une base du $\mathbf{Z}$-module Γ, alors,*

(1) *Il existe une belle section $\tilde{L}$ de $\tilde{S}$ telle que $\tilde{L}(\Gamma)\subset\pi_1(G_\Omega(M))\cdot\mathrm{Ker}\,\tilde{R}$.*

(2) *une telle section $\tilde{L}$ definit par passage au quotient une section continue de S, $L: H_c^1(M)/\Gamma\to G_\Omega/\mathrm{Ker}\, R$.*

(3) *L'application*

$$G_\Omega/\mathrm{Ker}\, R\xrightarrow{u} H_c^1(M)/\Gamma\times\mathbf{R}/\wedge$$

$$h\mapsto(S(h), R(h\cdot L(S(h))^{-1}))$$

est un isomorphisme de groupes topologiques si l'on munit $H_c^1(M)/\Gamma\times\mathbf{R}/\wedge$ de la multiplication $(a, \lambda)(b, \mu)=(a+b, \lambda+\mu+(n/2)\langle a, b\rangle)$.

Remarque. Banyaga ([1; II.6.3]) a montré par d'autres méthodes cette proposition dans le cas particulier Ω exacte et $n\geq 2$; ses méthodes s'étendent au cas $n=1$ Dans tous ces cas, on a $\Gamma=0$.

Démonstration. D'après 2.6, 2.7.1 et la définition de Γ, on peut trouver une belle section $\tilde{L}$ telle que $\tilde{L}(e_i)\in\pi_1(G_\Omega(M))$, $\forall i\in J_0$. Mais d'après 4.6.1, $\tilde{L}$ induit un homomorphisme de groupe de $H_c^1(M)^\perp\supset\Gamma$ dans $\mathrm{Isotop}_\Omega^l(M)/\mathrm{Ker}\,\tilde{R}$; d'où la première assertion. La seconde assertion en découle aussitôt. Enfin, on voit facilement que, $\forall a$, $b \in H_c^1(M)/\Gamma$, on a $R(L(a)L(b)L(a+b)^{-1}) = n/2\langle a, b\rangle$, ce qui montre la dernière assertion.

REFERENCES

[1] A. Banyaga, *Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique*, Comm. Math. Helv., *53* (1978), p. 174–227.

[2] H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton University Press, 1965.

[3] C. Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, Paris 1969.

[4] A. Weinstein, *Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds*, Advances in Math., vol. 6 no. 3, juin 1971, p. 329–345.

[5] E. Calabi, *On the group of automorphisms of a symplectic manifold*, *Problems in Analysis* (symposium in honour of S. Bochner), Princeton University Press (1970), p. 1–26.

Université Paris-Sud, Bâtiment 425

F-91405 *ORSAY Cedex*

Reçu le 18 décembre 1977.