THÉORIE DES GROUPES. — *Immeubles sphériques et théorie des invariants.* Note (*) de **Guy Rousseau,** transmise par M. Jacques Tits.

On construit une réalisation géométrique, apparemment nouvelle, des immeubles combinatoires de type sphérique. Ceci permet de résoudre certains cas particuliers d'une conjecture de J. Tits, et, notamment, d'étendre à un corps parfait le critère numérique d'instabilité de Mumford.

We build a new kind of geometric realization for combinatorial buildings of spherical type. We use it to prove a conjecture of J. Tits in particular cases and to show that Mumford's numerical criterion of instability is true on a perfect field.

I. Immeubles combinatoires. — Dans [1] J. Tits définit un *immeuble* comme un triplet $I=(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{A})$ d'un ensemble $\mathcal{S}$ et de deux ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{A}$ de parties de $\mathcal{S}$ vérifiant certains axiomes. Les éléments de $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{A}$) sont les *sommets* (resp. *facettes, appartements*) de l'immeuble. Rappelons quelques propriétés :

1° une partie d'une facette est une facette; tout sommet est contenu dans une facette. Les facettes maximales, appelées *chambres*, ont toutes le même nombre d'éléments : le *rang* r de l'immeuble. Il existe une application, appelée *type*, de $\mathcal{S}$ dans un ensemble à r éléments qui est injective sur chaque chambre;

2° les appartements sont des unions de chambres; deux chambres sont toujours contenues dans un même appartement;

3° le groupe W(A) des automorphismes spéciaux (c'est-à-dire conservant le type) d'un appartement A est simplement transitif sur les chambres de A. C'est un groupe de Coxeter, il détermine entièrement A et ses facettes [[1], 2.10];

4° soient A, A′ deux appartements, alors $A \cap A'$ est convexe et il existe un isomorphisme spécial de A sur A′ qui fixe $A \cap A'$;

5° l'immeuble I est dit *de type sphérique* si tout appartement contient un nombre fini de sommets.

II. Immeubles vectoriels. — Soit I un immeuble de type sphérique. Si A est un appartement de I, le groupe W(A) est un groupe de Coxeter fini. Considérons sa représentation géométrique [2] : il existe un espace vectoriel euclidien V_A de dimension r, un ensemble fini H d'hyperplans vectoriels de V_A et un isomorphisme de W(A) sur le groupe d'isométries de V_A engendré par les réflexions par rapport à ces hyperplans. L'assertion d'unicité de 1.3 montre qu'il existe une bijection, compatible à l'action de W(A), entre les facettes de A et les facettes de (V_A, H). Si F est vide, la facette vectorielle associée F^v est réduite à l'origine O, sinon F^v est un cône simplicial. On a :

$F \subset F' \sim F^v \subset \overline{F'^v}$. Les racines de A correspondent aux demi-espaces de V_A limités par les hyperplans de H; ainsi les parties convexes de A correspondent aux fermés convexes de V_A qui sont des unions de facettes [[1], 2.19].

D'après 1.4, si A et A′ sont deux appartements, il existe une isométrie vectorielle de V_A sur $V_{A'}$ qui échange les facettes; les espaces métriques F^v et $\overline{F^v}$ ne dépendent pas, à isomorphisme canonique près, du choix de l'appartement contenant F, et on peut définir un ensemble I^v réunion disjointe des *facettes* F^v pour $F \in \mathcal{F}$.

Si A est un appartement de I, l'*appartement* A^v correspondant de I^v est en bijection avec l'espace vectoriel euclidien V_A défini ci-dessus. Deux points x, y de I^v sont toujours contenus dans un même appartement A^v; la *distance* $d(x, y)$ de ces deux points et le segment $[x, y]$ qui les joint sont indépendants de l'appartement choisi. Une partie de I^v est dite *convexe* si chaque fois qu'elle contient deux points x, y elle contient le segment $[x, y]$.

PROPOSITION 2.1. — 1° *d définit une distance sur* I^v.

2° *Tout isomorphisme d'une partie convexe de* I *sur une autre s'étend, d'une manière unique, en une isométrie des parties de* I^v *correspondantes. En particulier tout automorphisme de* I *s'étend en une isométrie de* I^v qui fixe O.

3° *Si* A *est un appartement de* I *et* C *une chambre de* A, *il existe une application contractante* ρ *de* I^v *sur* A^v, *appelée* rétraction, *qui induit l'identité sur* A^v *et conserve les distances de points contenus dans un même appartement que* C.

Preuve. — La seconde assertion est évidente; il en résulte que l'application ρ définie en [(1), 3.3] a les deux dernières propriétés indiquées. Mais alors ρ transforme un segment en une ligne brisée de même longueur, c'est donc une contraction. L'inégalité triangulaire pour d se montre grâce à une rétraction.

DÉFINITION 2.2. — L'espace métrique I^v muni de sa partition en facettes et de ses appartements est l'*immeuble vectoriel* associé à I.

Cet immeuble a beaucoup des propriétés des immeubles affines de F. Bruhat et J. Tits; en particulier les démonstrations 2.5.12 et 3.2.4 de (3) prouvent que :

PROPOSITION 2.3. — *L'espace métrique* I^v *est complet. Tout groupe d'automorphismes de* I *qui stabilise une partie convexe bornée non vide de* I^v *fixe un point de son adhérence.*

III. IMMEUBLES SPHÉRIQUES. — Soit I^s l'espace métrique des points de I^v à la distance 1 du point O associé à la facette vide de I. Les automorphismes de I^v, ses rétractions, stabilisent I^s. Une facette F^v de I^v différente de O découpe sur I^s une *facette* F^s qui est un simplexe topologique. Un appartement A^v de I^v découpe sur I^s un *appartement* A^s qui est une sphère unité de dimension $r-1$ (munie de la métrique induite par l'espace ambiant).

DÉFINITION 3.1. — L'espace métrique I^s muni de sa partition en facettes et de ses appartements est l'*immeuble sphérique* associé à I.

I^s est un complexe simplicial, c'est la réalisation géométrique habituelle de I. Il peut être vu comme quotient topologique de $I^v-\{O\}$ par la *projection* qui à $p\in I^v-\{O\}$ associe l'intersection de I^s avec la demi-droite d'origine O s'appuyant sur p. On peut reconstruire I^v comme « le cône de sommet O s'appuyant sur I^s ».

DÉFINITION 3.2. — Soient $x, y\in I^s$, x et y sont dits *opposés* si $d(x, y)=2$. Si x et y ne sont pas opposés, la projection sur I^s du segment $[x, y]$ est la *géodésique* $[x, y]^s$. Une partie B de I^s est dite *convexe* si pour tous $x, y\in B$, x et y ne sont pas opposés et B contient $[x, y]^s$.

CONJECTURE 3.3 [J. Tits, (4)]. — *Si* $B\subset I^s$ *est convexe non vide et si* H *est un groupe d'automorphismes de* I *stabilisant* B, *alors* H *fixe un point de l'adhérence* $\overline{B}$ *de* B.

Si B est réunion de facettes, H devrait fixer le centre d'une facette de $\overline{B}$.

THÉORÈME 3.4. — *La conjecture de Tits est vraie pour* (B, H) *s'il existe une partie convexe* B' *de* I^v, *stable par* H, *non vide, ne contenant pas* O *dans son adhérence et de projection sur* I^s *contenue dans* B.

C'est une conséquence immédiate de 2.3. Pour appliquer ce théorème la première idée est de prendre pour B' l'enveloppe convexe de B dans I^v; il s'agit alors de montrer que O n'est pas adhérent à B'.

COROLLAIRE 3.5. — *La conjecture de Tits est vraie pour* B *s'il existe* $p \in I^s$ *et* $\theta < \pi/2$ *tels que pour tout* $p' \in$ B *l'angle* $(\mathrm{O}\,p, \mathrm{O}\,p')$ *soit inférieur à* θ.

Preuve. — L'ensemble des $p' \in I^v$ tels que $d(\mathrm{O}, p') \cos(\mathrm{O}\,p, \mathrm{O}\,p') \geqq \cos\theta$ est convexe (utiliser une rétraction); il est fermé, contient B mais non le point O, lequel n'est donc pas adhérent à l'enveloppe convexe de B.

IV. IMMEUBLE D'UN GROUPE SEMI SIMPLE. — Soient k un corps et G un k-groupe algébrique semi simple. On considère l'ensemble des k-sous-groupes paraboliques maximaux de G et les sous-ensembles F_P des paraboliques maximaux contenant un k-parabolique P, et A_S des paraboliques maximaux contenant un sous-tore k-déployé maximal S; ils constituent les sommets, facettes et appartements de l'immeuble I(G) de G sur k. Le groupe $G(k)$ des points rationnels de G sur k agit sur cet immeuble par conjugaison [(1), 5.2]. On va donner une autre description de l'immeuble vectoriel $I^v(G)$.

Soit S un sous-tore k-déployé maximal de G. Le groupe $\Gamma(S) = \mathrm{Hom}_k(\mathbf{G}_m, S)$ des k-sous-groupes à un paramètre de S est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini r. On note $\Gamma_{\mathbf{R}}(S) = \Gamma(S) \otimes \mathbf{R}$ et $\Gamma_{\mathbf{Q}}(S) = \Gamma(S) \otimes \mathbf{Q}$. L'ensemble Φ des racines de G par rapport à S est un ensemble de formes linéaires sur $\Gamma_{\mathbf{R}}$; les hyperplans $\alpha(x) = 0, \alpha \in \Phi$ découpent dans $\Gamma_{\mathbf{R}}$ des facettes; chaque facette est l'enveloppe convexe de son intersection avec $\Gamma_{\mathbf{Q}}$. Pour tout $\lambda \in \Gamma_{\mathbf{R}}$ on note P_λ le k-sous-groupe parabolique de G engendré par le centralisateur de S et les groupes radiciels U_α pour $\alpha \in \Phi$ et $\alpha(\lambda) \geqq 0$; le groupe P_λ ne dépend que de la facette dans laquelle est choisi λ. Le choix d'une métrique euclidienne sur $\Gamma_{\mathbf{R}}$ invariante par le groupe des automorphismes de (Γ, Φ) permet d'identifier $\Gamma_{\mathbf{R}}$ à l'appartement A_S.

Tout k-sous-groupe à un paramètre λ de G est contenu dans un groupe $\Gamma(S)$ et le sous-groupe parabolique P_λ est indépendant du tore S ainsi choisi.

DÉFINITION. — On note $I^v_{\mathbf{Q}}(G)$ le quotient de $\mathrm{Hom}_k(\mathbf{G}_m, G) \times \mathbf{N}^*$ par la relation d'équivalence qui identifie (λ, n) à (λ', n') si il existe $g \in P_\lambda(k)$ tel que $\lambda'^n = g \, . \, \lambda^{n'} . \, g^{-1}$.

Les applications i_S de $\Gamma(S) \times \mathbf{N}^*$ sur $\Gamma_{\mathbf{Q}}(S) \subset A_S$, définies pour tout S par $i_S(\lambda, n) = \lambda/n$, permettent d'identifier $I^v_{\mathbf{Q}}(G)$ à un sous-ensemble dense de $I^v(G)$. On appelle $I^v_{\mathbf{Q}}(G)$ l'*immeuble vectoriel rationnel* de G. Deux points λ/n et λ'/n' de $I^v_{\mathbf{Q}}(G)$ sont contenus dans la même facette si et seulement si $P_\lambda = P_{\lambda'}$.

Remarques. — La projection de $I^v_{\mathbf{Q}}(G) - \{ \mathrm{O} \}$ sur $I^s(G)$ est l'immeuble sphérique rationnel défini par D. Mumford (4); cet auteur a également rencontré $I^v(G)$ sous la forme du complexe d'un prolongement toroïdal (5). Si G n'est plus semi simple mais seulement réductif, l'ensemble $I^v_{\mathbf{Q}}(G)$ défini comme ci-dessus est le produit de l'espace vectoriel $\Gamma_{\mathbf{Q}}(S)$ associé au sous-tore k-déployé maximal du radical et de l'immeuble $I^v_{\mathbf{Q}}(G^{ad})$ du groupe adjoint de G; les résultats du paragraphe suivant sont encore valables dans ce cas.

V. APPLICATION A LA THÉORIE DES INVARIANTS. — On considère une action de G sur un schéma X propre sur k. Si on se donne un faisceau inversible ample L sur X et une G-linéarisation de L [(4), p. 30, 49], on associe à chaque sous-groupe à un paramètre λ de G et à chaque point x de X un invariant $\mu^L(x, \lambda) \in \mathbf{Z}$.

On a

$$\mu^{L}(x, g.\lambda^{n}.g^{-1}) = n.\mu^{L}(x, \lambda)$$

pour $n \in \mathbf{N}$ et $g \in P_{\lambda}$; donc $\mu^{L}(x, \lambda)$ définit une fonction sur $I_{Q}^{v}(G)$ continue et convexe [(4), p. 63].

On note H_x le groupe des automorphismes semi algébriques (i.e. algébriques à un automorphisme de k près) h de G et X qui fixent $L \in \mathrm{Pic}^{G}(X)$ et $x \in X$, et tels que $h(g.x) = h(g).x$; on a alors

$$\mu^{L}(x, h(\lambda)) = \mu^{L}(x, \lambda).$$

Comme H_x opère semi algébriquement sur G, il opère sur l'immeuble de G.

Proposition 5.1 (6). — *L'ensemble* B_x *des* $\lambda \in I^{s}(G)$ *tels que* $\mu^{L}(x, \lambda) < 0$ *est convexe; la conjecture de Tits est vraie pour le couple* (B_x, H_x).

Preuve. — La première assertion est évidente; la seconde résulte de 3.4 en prenant pour B'_x l'ensemble des $\lambda \in I^{v}(G)$ tels que $\mu^{L}(x, \lambda) \leqq -1$.

Théorème 5.2. — *Supposons le corps k parfait. Le point* $x \in X(k)$ *est instable pour l'action de* G *si et seulement si il existe un k-sous-groupe à un paramètre* λ *de* G *tel que* $\mu^{L}(x, \lambda) < 0$.

Preuve. — Si k est algébriquement clos ceci est le critère numérique de Mumford [(4), (7)]. Il suffit donc de voir que si un tel λ existe sur la clôture algébrique $\bar{k}$ il en existe un sur k. Considérons l'immeuble de $G \otimes \bar{k}$; par hypothèse l'ensemble B_x de 5.1 est non vide; de plus le groupe H_x contient le groupe de Galois H. Il existe donc un point $a \in B_x$ fixe par H; le sous-groupe parabolique associé P_a est défini sur k. Soit S un tore maximal k-défini de P_a; l'appartement A_S contient a; le groupe de Galois H stabilise A_S et induit sur $\Gamma(S) \subset \Gamma_{\mathbf{R}}(S) = A_S$ l'action canonique. Il existe donc $\lambda/n \in \Gamma_{Q}(S)$ fixe par H et suffisamment proche de a; alors λ est défini sur k et $\mu^{L}(x, \lambda) < 0$.

(*) Séance du 12 décembre 1977.

(1) J. Tits, *Buildings of Spherical Type and Finite BN Pairs* (*Springer Lecture Notes*, n° 386, 1974).

(2) N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. V, § 4, Hermann, Paris, 1968.

(3) F. Bruhat et J. Tits, *Publ. I.H.E.S.*, 41, 1972, p. 5-251.

(4) D. Mumford, *Geometric Invariant Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

(5) G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford et B. Saint-Donat, *Toroïdal Embeddings* I (*Springer Lecture Notes*, n° 339, 1973).

(6) Ce résultat et le suivant ont également été obtenus avec une démonstration différente par G. Kempf, *Instability in Invariant Theory* (à paraître).

(7) C. S. Seshadri, *Annals Math.*, 95, 1972, p. 511-556.

4E, *avenue Édouard-Herriot*, 91440 *Bures-sur-Yvette*.