V - DESCENTE ET PLONGEMENT DES IMMEUBLES

Pour ce chapitre, on se donne un groupe réductif $\mathfrak{G}$ défini sur un corps K, hensélien pour une valuation réelle non triviale ω.

§ 1 Descente modérément ramifiée.

Proposition 5.1.1. Si L/K est une extension galoisienne finie, modérément ramifiée, de groupe de Galois Γ et si $\mathfrak{G}$ a sur L un immeuble, alors $I_L(\mathfrak{G})^\Gamma$ est un immeuble centré de $\mathfrak{G}$ sur K. Ainsi $\mathfrak{G}$ a un immeuble sur K, et il existe un unique plongement galoisien de $I_K(\mathfrak{G})$ dans $I_L(\mathfrak{G})$. Si, de plus, $I_L(\mathfrak{G})$ est complet, alors $I_K(\mathfrak{G})$ l'est aussi.

Remarque. Les appartements de $I_L(\mathfrak{G})^\Gamma$ sont ceux indiqués en 2.5.6.

Démonstration : Comme $I_L(\mathfrak{G})^\Gamma$ est fermé dans $I_L(\mathfrak{G})$, la dernière assertion résulte de la première. Soient $\hat{K}$ et $\hat{L}$ les complétés de K et L, alors $\hat{L}/\hat{K}$ est une extension galoisienne finie modérément ramifiée de groupe de Galois Γ, (cf. annexe A 2). On a des identifications de $I_K(\mathfrak{G})$ avec $I_{\hat{K}}(\mathfrak{G})$ (si l'un des deux existe) et de $I_L(\mathfrak{G})$ avec $I_{\hat{L}}(\mathfrak{G})$, de plus les actions de Γ sur $I_L(\mathfrak{G})$ et $I_{\hat{L}}(\mathfrak{G})$ sont les mêmes, (2.4.7 g)). On peut donc supposer K complet.

D'après 2.5.6 et 2.5.7, il suffit de prouver que si x et y sont deux points distincts de $I_L(\mathfrak{G})^\Gamma$, alors il existe une droite de $I_L(\mathfrak{G})^\Gamma$ contenant x et y.

Mais l'action de Γ sur $I_L(\mathfrak{G})$ est le produit de ses actions sur $V_1 = I_L(\mathrm{rad}(\mathfrak{G}))$ et sur $I'_L(\mathfrak{G}) = I_L(\mathfrak{G}')$, (2.4.2 j et 2.4.7 d) ; l'assertion se vérifie

donc séparément pour les tores et pour les groupes semi-simples. Pour les tores cela résulte de 2.4.8. Pour les groupes semi-simples, on peut appliquer le lemme de redressement. Il existe un bon parallélotope Δ fixe par Γ, contenant x et y (4.1.4). Comme $s(L/K) = 0$, (3.3.2 b), ce lemme dit qu'il existe un appartement A de $I_L(\mathfrak{G})$, contenant Δ, tel que le sous-espace affine de A engendré par Δ soit fixe par Γ ; en particulier la droite de A s'appuyant sur x et y est fixe par Γ.

Théorème 5.1.2. Si $\mathfrak{G}$ se quasi-déploie sur une extension galoisienne (finie) modérément ramifiée de K, alors $\mathfrak{G}$ a des immeubles fonctoriels au-dessus de K (2.5.1). Plus précisément il existe un unique système fonctoriel de plongements pour les immeubles de $\mathfrak{G}$ sur les extensions algébriques de K.

Démonstration : Rappelons qu'une extension algébrique de K est hensélienne, (annexe A 2).

1) Supposons $\mathfrak{G}$ quasi-déployé sur K, soit $\mathcal{S}$ un tore K-déployé maximal de $\mathfrak{G}$, alors $\mathfrak{Z}(\mathcal{S})$ est un tore maximal de $\mathfrak{G}$ défini sur K, il se déploie sur une extension galoisienne finie K' de K et $\mathfrak{G}$ a un immeuble sur K', (2.2.14 a) donc $\mathfrak{G}$ a un immeuble sur K et il existe un unique plongement galoisien de $I_K(\mathfrak{G})$ dans $I_{K'}(\mathfrak{G})$, d'après le théorème 2.5.6.

Dans le cas général, il existe une extension galoisienne finie K_2/K de groupe de Galois Γ, et une sous-extension galoisienne finie modérément ramifiée K_1/K de groupe de Galois Γ_2 telles que $\mathfrak{G}$ soit quasi-déployé sur K_1 et déployé sur K_2 ; on note $\Gamma_1 = \Gamma/\Gamma_2$ le groupe de Galois de K_2/K_1. On a vu ci-dessus que $\mathfrak{G}$ a un immeuble sur K_1, la proposition 5.1.1 montre alors qu'il en a un sur K ; et il y a des plongements galoisiens uniques $p_{K_1/K}$ de $I_K(\mathcal{G})$ dans $I_{K_1}(\mathcal{G})$ et p_{K_2/K_1} de $I_{K_1}(\mathcal{G})$ dans $I_{K_2}(\mathcal{G})$.

Si L est une extension algébrique de K, notons $L_1 = K_1L$ et $L_2 = K_2L$; alors L_2/L_1, L_1/L et L_2/L sont des extensions galoisiennes dont les groupes de Galois Γ'_2, Γ'_1 et Γ' peuvent être considérés comme des sous-groupes de Γ_2, Γ_1 et Γ ; de plus $\mathcal{G}$ est déployé sur L_2, quasi-déployé sur L_1 et L_1/L est modérément ramifiée.

$$\begin{tikzcd}
K_2 \arrow[r] & L_2 \\
K_1 \arrow[r] \arrow[u, "\Gamma_2"'] & L_1 \arrow[u, "\Gamma'_2"] \\
K \arrow[r] \arrow[u, "\Gamma_1"'] \arrow[uu, bend left=60, "\Gamma"] & L \arrow[u, "\Gamma'_1"] \arrow[uu, bend right=60, "\Gamma'"']
\end{tikzcd}$$

Ainsi $\mathcal{G}$ a un immeuble sur L, L_1 et L_2 et on a des plongements galoisiens uniques $p_{L_1/L}$ de $I_L(\mathcal{G})$ dans $I_{L_1}(\mathcal{G})$ et p_{L_2/L_1} de $I_{L_1}(\mathcal{G})$ dans $I_{L_2}(\mathcal{G})$. D'après 2.5.2 a il existe un unique plongement p_{L_2/K_2} de $I_{K_2}(\mathcal{G})$ dans $I_{L_2}(\mathcal{G})$.

2) Si (p_σ) est un système fonctoriel de plongements, alors d'après 2.5.3 e et les assertions d'unicité ci-dessus on a :

$p_{L_2/K_2} \circ p_{K_2/K_1} \circ p_{K_1/K} = p_{L_2/L_1} \circ p_{L_1/L} \circ p_\sigma$, ($\sigma$ désigne l'injection de K dans L). Comme les plongements sont des applications injectives ceci détermine complètement p_σ, que l'on notera désormais $p_{L/K}$. D'où l'assertion d'unicité.

Pour l'existence on va montrer ci-dessous que la formule de commutation ci-dessus définit bien un plongement. On a alors un système de plongements. Pour montrer la fonctorialité du système considérons une extension algébrique M de L.

Avec des notations évidentes on a :

$$\begin{tikzcd}
K_2 \arrow[r] & L_2 \arrow[r] & M_2 \\
K \arrow[r] \arrow[u] & L \arrow[r] \arrow[u] & M \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$p_{M_2/M} \circ p_{M/L} = p_{M_2/L_2} \circ p_{L_2/L}$;

$p_{L_2/L} \circ p_{L/K} = p_{L_2/K_2} \circ p_{K_2/K}$; $p_{M_2/M} \circ p_{M/K} = p_{M_2/K_2} \circ p_{K_2/K}$ et d'après 2.5.2

$p_{M_2/K_2} = p_{M_2/L_2} \circ p_{L_2/K_2}$.

On en déduit que $p_{M/K} = p_{M/L} \circ p_{L/K}$; d'où la fonctorialité.

3) Il reste à montrer que par le plongement composé $p_{L_2/K_2} \circ p_{K_2/K_1} \circ p_{K_1/K}$, l'image de $I_K(\mathcal{G})$ est dans $p_{L_2/L_1} \circ p_{L_1/L}(I_L(\mathcal{G}))$ et que l'injection $p_{L/K}$ de $I_K(\mathcal{G})$ dans $I_L(\mathcal{G})$ ainsi définie est un plongement.

Mais l'injection $p_{L/K}$ sera évidemment centrée, isométrique, et adaptée à l'injection de $\mathcal{G}(K)$ dans $\mathcal{G}(L)$; donc d'après la remarque 2.5.3 h), il suffit de montrer que, si $\mathcal{S}$ est un tore K-déployé maximal de $\mathcal{G}$, il existe un tore L-déployé maximal $\mathcal{C}$ de $\mathcal{G}$ tel que $p_{L_2/K_2} \circ p_{K_2/K_1} \circ p_{K_1/K}(A_{\mathcal{S}}) \subset p_{L_2/L_1} \circ p_{L_1/L}(A_{\mathcal{C}})$ et $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$.

a) L'action de Γ' sur $I_{L_2}(\mathcal{G})$ stabilise $I_{K_2}(\mathcal{G})$ et y induit l'action de Γ' considéré comme sous-groupe de Γ, $(\Gamma' \simeq \mathrm{Gal}(K_2/(K_2 \cap L))$: Il suffit de montrer que Γ' stabilise $I_{K_2}(\mathcal{G})$ et plus précisément que, si $\gamma' \in \Gamma'$ et si $\mathcal{C}$ est un tore maximal déployé sur K_2, alors $\gamma'^*(A_{\mathcal{C}}) \subset I_{K_2}(\mathcal{G})$. Mais d'après 2.4.6 b), on a $\gamma'^*(A_{\mathcal{C}}) = A_{\gamma'(\mathcal{C})}$ et $\gamma'(\mathcal{C})$ est déployé sur K_2, d'où le résultat (2.5.2).

b) Si $\mathcal{S}_1$ est un tore K_1-déployé maximal de $\mathcal{G}$, on a $\mathrm{im}(A_{\mathcal{S}_1}) = p_{L_2/K_2} \circ p_{K_2/K_1}(A_{\mathcal{S}_1}) \subset A_{\mathcal{C}_2}$, où $\mathcal{C}_2$ est un tore maximal déployé sur L_2 contenant $\mathcal{S}_1$. Ainsi $\mathcal{C}_2$ est contenu dans le tore maximal $\mathcal{Z}(\mathcal{S}_1)$, qui est défini sur K_1 ; il en résulte que $\mathcal{C}_2 = \mathcal{Z}(\mathcal{S}_1)$. D'après la partie a), $\mathrm{im}(A_{\mathcal{S}_1})$ est dans $I_{L_2}(\mathcal{G})^{\Gamma'_2}$, et on vient de voir que $\mathcal{C}_2$ est défini sur K_1 donc que $A_{\mathcal{C}_2}$ est stable par Γ'_2, alors $(A_{\mathcal{C}_2})^{\Gamma'_2}$ contient $\mathrm{im}(A_{\mathcal{S}_1})$. D'autre part il existe un tore L_1-déployé maximal $\mathcal{C}_1$ contenant $\mathcal{S}_1$, ainsi $\mathcal{C}_2 = \mathcal{Z}(\mathcal{S}_1)$ est l'unique tore L_2-déployé maximal contenant $\mathcal{C}_1$, et d'après le théorème 2.5.6 on a

$p_{L_2/L_1}(A_{\mathcal{T}_1}) = (A_{\mathcal{T}_2})^{\Gamma'_2}$. Ainsi $\mathrm{im}(A_{\mathcal{S}_1}) \subset A_{\mathcal{T}_1}$ et le théorème est démontré pour K_1 : Il existe un plongement p_{L_1/K_1} de $I_{K_1}(\mathcal{G})$ dans $I_{L_1}(\mathcal{G})$.

c) Soit toujours $\mathcal{S}$ un tore K-déployé maximal de $\mathcal{G}$, d'après la partie b) il existe un tore L_1-déployé maximal $\mathcal{T}_1$ contenant $\mathcal{S}$ tel que $\mathrm{im}(A_{\mathcal{S}}) = p_{L_1/K_1} \circ p_{K_1/K}(A_{\mathcal{S}}) \subset A_{\mathcal{T}_1}$, et d'après la partie a) $\mathrm{im}(A_{\mathcal{S}}) \subset I_{L_1}(\mathcal{G})^{\Gamma'_1}$.
On a alors : $\mathrm{im}(A_{\mathcal{S}}) \subset I_{L_1}(\mathfrak{Z}(\mathcal{S}),\mathcal{G})^{\Gamma'_1} = p_{L_1/L}(I_L(\mathfrak{Z}(\mathcal{S}),\mathcal{G}))$, (cf. 2.5.6, 2.4.12 et 5.1.1).
Ainsi, si $x \in A_{\mathcal{S}}$, il existe un tore L-déployé maximal $\mathcal{T}$ contenant $\mathcal{S}$ tel que $p_{L_1/K_1} \circ p_{K_1/K}(x) \in p_{L_1/L}(A_{\mathcal{T}})$; mais alors $A_{\mathcal{T}}$ est stable par $\mathcal{S}(K)$, d'où par convexité $\mathrm{im}(A_{\mathcal{S}}) \subset p_{L_1/L}(A_{\mathcal{T}})$, et le théorème est démontré.

Proposition 5.1.3. Le théorème précédent s'applique à tous les groupes réductifs sur un corps K hensélien pour une valuation réelle non triviale à corps résiduel de caractéristique zéro, ou sur un corps K hensélien pour une valuation discrète non triviale à corps résiduel parfait.

Démonstration : Le groupe réductif $\mathcal{G}$ se déploie sur une extension galoisienne finie qui est automatiquement modérément ramifiée si K est d'égale caractéristique zéro.

Supposons maintenant la valuation ω discrète et le corps résiduel parfait. On se ramène au cas où K est complet ; alors l'extension non ramifiée maximale K_{nr} de K a une valuation discrète et un corps résiduel algébriquement clos. Ainsi K_{nr} est quasi-algébriquement clos, (LANG [19 ; théorème 10]), et $\mathcal{G}$ est donc quasi-déployé sur K_{nr} (STEINBERG [26], voir aussi [24 ; page 53]). On a montré que $\mathcal{G}$ se quasi-déploie sur une extension galoisienne finie non ramifiée.

Remarques 5.1.4.

a) D'après 5.1.2 et 5.1.3 un groupe réductif sur un corps complet pour une valuation discrète à corps résiduel parfait, a toujours un immeuble. Ce résultat est dû à F. Bruhat et J. Tits. Leur démonstration d'un théorème de descente non ramifiée, (suffisant dans ce cas, on vient de le voir), est différente (cf. par exemple [30]) mais s'appuie sur le même théorème 2.5.6.

b) Même en valuation discrète, ou pour une sauvagerie 0^+, la conclusion du théorème 5.1.2 peut être fausse : on l'a vu pour des formes de $\mathfrak{sl}_2$ au chapitre III, paragraphes 4 et 5.

Proposition 5.1.5. Si la caractéristique résiduelle de K n'est pas 2, alors tout groupe réductif sur K a un immeuble.

Les formes des groupes classiques ont toujours des immeubles.

Remarque. Cette proposition ne sera pas utilisée dans la suite.

Démonstration (utilisant des résultats non publiés de J. TITS).

1) D'après 2.2.14 f et 2.4.8, on peut supposer $\mathcal{G}$ simple sur K, et non anisotrope (5.2.4). Il existe donc une extension finie K_1 de K et un groupe algébrique $\mathcal{G}_1$ absolument simple sur K_1 tel que $\mathcal{G}$ en soit la restriction à la Weil : $\mathcal{G} = R_{K_1/K}(\mathcal{G}_1)$, ([27 ; 3.1.2]). Mais alors d'après [1 ; 6.17 à 6.21], si $\mathcal{S}_1$ est un tore K_1-déployé maximal de $\mathcal{G}_1$, la partie déployée $\mathcal{S}$ du tore $R_{K_1/K}\mathcal{S}_1$ est K-déployée maximale de même rang. Et on a une bijection de $\mathcal{G}_1(K_1)$ sur $\mathcal{G}(K)$ qui échange $N_{K_1}(\mathcal{S}_1)$ et $N_K(\mathcal{S})$, $Z_{K}(\mathcal{S}_1)$ et $Z_K(\mathcal{S})$, $\Phi(\mathcal{S}_1)$ et $\Phi(\mathcal{S})$, ainsi que les groupes radiciels correspondants. Ainsi si $\mathcal{G}_1$ a un immeuble sur K_1, $I_{K_1}(\mathcal{G})$ est un immeuble ENB de $\mathcal{G}$ sur K et c'est un immeuble d'après 5.2.4.

2) On peut donc supposer $\mathcal{G}$ absolument simple non anisotrope ; mais alors, en utilisant la classification de [27], J. Tits a montré, ([30]), que $\mathcal{G}$ a un immeuble sauf peut être si ce groupe est exceptionnel de système de racines relatif BC_1 ou BC_2. De plus le rang relatif d'un tel groupe peut toujours être augmenté par une succession d'extensions quadratiques galoisiennes, sauf pour les formes trialitaires de D_4 où une extension cubique est nécessaire. D'après la proposition 5.1.1 il suffit donc de montrer l'existence de l'immeuble pour les formes trialitaires de D_4.

3) D'après [27] les seules formes trialitaires non anisotropes et non quasi-déployées sont ${}^3D^9_{4,1}$ et ${}^6D^9_{4,1}$.

a) ${}^3D^9_{4,1}$: par définition il existe une extension galoisienne L/K de degré 3 qui transforme cette forme $\mathcal{G}$ en la forme non trialitaire ${}^1D^{(2)}_{4,1}$; cette dernière forme a donc un immeuble sur L et même rang relatif que la précédente, donc d'après 2.3.1 $\mathcal{G}$ a un immeuble sur K.

b) ${}^6D^9_{4,1}$ en caractéristique résiduelle différente de 2 : le groupe de Galois qui agit sur le diagramme de Dynkin est d'ordre 6 ; donc par une certaine extension de degré 2, on transforme cette forme en une forme ${}^3D^?_{4,?}$, donc déjà traitée et on conclut grâce à 5.1.1.

c) ${}^6D^9_{4,1}$ en caractéristique résiduelle 2 : il existe une extension de degré 6, dont le groupe de Galois agit effectivement sur le diagramme de Dynkin. Si l'extension est modérément ramifiée, on est ramené grâce à 5.1.1 à une forme non trialitaire ${}^1D^{(?)}_{4,?}$. Si elle est sauvagement ramifiée, alors d'après [4 ; § 8 exercice 11] elle se dévisse en une première extension de degré 3, puis une extension de degré 2, mais ceci est absurde car le groupe de permutations $\mathfrak{S}_3$ n'a pas de sous-groupe distingué d'ordre 2.

§ 2 Bornes et bornologies.

Les constantes C_1 et C_2 sont celles introduites en 4.1.5.

Proposition 5.2.1. Il existe une constante réelle positive C_3 ne dépendant que du rang semi-simple absolu de $\mathcal{G}$, telle que si $\mathcal{G}$ est K anisotrope, si L/K est une extension galoisienne finie de groupe de Galois Γ et si $\mathcal{G}$ a un immeuble sur L, alors :

pour toute métrique normalisée d sur $I_L(\mathcal{G})$, pour tous points x,y de $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$, on a :

$$d(x,y) \leq C_3.s(L/K).$$

Remarque. Une métrique normalisée sur $I_L(\mathcal{G}) = V_1 \times I'_L(\mathcal{G})$ est le produit euclidien d'une métrique bien déterminée sur $I'_L(\mathcal{G})$ et d'une métrique euclidienne quelconque sur V_1, (2.2.4 a)). Comme $I_L(\mathcal{G})^\Gamma = V_1^\Gamma \times I'_L(\mathcal{G})^\Gamma$, (2.4.14 b), la proposition ci-dessus montre que V_1^Γ est réduit à un point ; on retrouve ainsi la proposition 2.4.8.

Démonstration : On peut supposer K complet et ne prouver la proposition que pour les tores et les groupes semi-simples. Si $\mathcal{G}$ est un tore, on peut prendre $C_3 = 0$ d'après la proposition 2.4.8. Supposons donc $\mathcal{G}$ semi-simple.

Il ne peut y avoir de demi-droite dans $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$, en effet, sinon, le fixateur de la direction de cette demi-droite est un sous-groupe parabolique non trivial de $\mathcal{G}$ (1.3.4) invariant par Γ et $\mathcal{G}$ n'est pas K-anisotrope.

Soient x et y deux points de $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$, $A_{\mathcal{S}}$ un appartement contenant x, y et Δ un bon parallélotope de $A_{\mathcal{S}}$, fixe par Γ, contenant x,y, (4.1.4). Le résultat ci-dessus joint au lemme de redressement, (4.1.5) appliqué à Δ, montrent alors que pour les racines a d'une base de $\Phi(\mathcal{T})$, on a : $|a(x-y)| \leq C_1.s(L/K)$. On en déduit que $d(x,y) \leq C.C_1.s(L/K)$, si C est la constante du lemme 4.2.2. Comme C ne dépend que de la "géométrie" de $I_L(\mathcal{G})$, on conclut grâce au lemme 4.1.7.

Corollaire 5.2.2. Si L/K est une extension galoisienne finie de sauvagerie 0 ou 0^+, et si $\mathcal{G}$ a un immeuble sur L, alors $\mathcal{G}$ a un immeuble sur K, et il existe un unique plongement galoisien de $I_K(\mathcal{G})$ dans $I_L(\mathcal{G})$.

Démonstration : La proposition précédente, jointe au lemme 2.4.17 dit alors que, si $\mathcal{G}$ est anisotrope sur K, $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ est réduit à un point. En appliquant ce résultat au groupe dérivé du centralisateur d'un tore K-déployé maximal de $\mathcal{G}$, le théorème 2.5.6 permet de conclure.

Théorème 5.2.3. Le groupe des points rationnels d'un groupe réductif anisotrope sur un corps, hensélien pour une valuation réelle non triviale, est borné.

Remarque. La réciproque est vraie sur tout corps valué : si le groupe des points rationnels d'un groupe réductif est borné, ce groupe est anisotrope, (car sinon il contient un groupe multiplicatif).

Démonstration : Soit L/K une extension galoisienne finie de groupe de Galois Γ, qui déploie $\mathcal{G}$; alors $\mathcal{G}$ a un immeuble sur L. L'ensemble $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ est non vide d'après le lemme 2.4.17, et il est borné d'après la proposition 5.2.1. Il en résulte que $\mathcal{G}(K) = \mathcal{G}(L)^\Gamma$, qui stabilise $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$, est borné.

Corollaire 5.2.4. Sous les hypothèses de ce chapitre, si $\mathcal{G}$ est K-anisotrope, il a un immeuble sur K ; plus généralement si $\mathcal{G}$ a un immeuble ENB sur K, alors il a un immeuble sur K.

Démonstration : D'après les propositions 2.3.3 et 2.3.9 on peut supposer K complet. Le corollaire résulte alors aussitôt du théorème 5.2.3 ci-dessus, du théorème 2.2.11 (v), de la remarque 2.2.9 et de la proposition 2.3.4, ainsi que de l'exemple 2.1.16 c) si $\mathcal{G}$ est K-anisotrope.

Remarque 5.2.5. On peut démontrer le théorème ci-dessus, sans le lemme de redressement, ([20]) : (le dire ds le cas localement compact)

Il suffit de démontrer la proposition 5.2.1, sans la majoration effective du diamètre de $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$, pour une extension galoisienne finie bien choisie L/K déployant $\mathcal{G}$. Dans ce but, quitte à changer L par une extension ramifiée on peut supposer que $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ contient un point spécial x de $I_L(\mathcal{G})$; le fixateur $\hat{P}_x$ est alors le groupe des points entiers de $\mathcal{O}_L$ d'un modèle de Chevalley $\mathcal{G}_{\mathbb{Z}}$ ~~sur $\mathcal{O}_L$~~ de $\mathcal{G}$. Si $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ est une suite de points de $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ s'éloignant indéfiniment de x, quitte à modifier quelque peu la suite grâce à une proposition dont la démonstration ressemble à celle de 4.1.4, les fixateurs $\hat{P}_{[x,y_i]}$ déterminent une suite de sous-groupes paraboliques non triviaux de $\mathcal{G}_{\mathbb{Z}}$ stables par Γ modulo des idéaux de $\mathcal{O}_L$ tendant vers zéro. On en déduit, grâce à un résultat de Greenberg (annexe A 3) appliqué au schéma des paraboliques de $\mathcal{G}_{\mathbb{Z}}$, l'existence d'un parabolique non trivial de $\mathcal{G}_{\mathbb{Z}}$ stable par Γ, ce qui contredit l'anisotropie.

5.2.6. Si B est un sous-ensemble non vide et x un point de $I_L(\mathcal{G})$, pour toute métrique d sur $I_L(\mathcal{G})$, on note $d(x,B)$ la borne inférieure (dans $\tilde{\mathbb{R}}^+$) de $d(x,y)$ pour $y \in B$. Ainsi $d(x,B) = 0$, (resp. 0^+), si et seulement si $x \in B$, (resp. $x \notin B$, mais x est adhérent à B).

Proposition 5.2.7. Supposons K complet. Il existe une constante réelle positive C_4, ne dépendant que du rang semi-simple absolu de $\mathfrak{G}$ telle que, si L/K est une extension galoisienne finie de groupe de Galois Γ, et si $\mathfrak{G}$ a un immeuble sur L, alors on a :

$$\forall\, x \in I_L(\mathfrak{G})^\Gamma, \quad d(x, I_L(\mathfrak{G})^\Gamma_{\mathrm{ord}}) \leq C_4 . s(L/K),$$

pour toute métrique normalisée d en notant $I_L(\mathfrak{G})^\Gamma_{\mathrm{ord}}$ l'ensemble des points invariants ordinaires (2.4.13).

Démonstration : Il suffit de montrer que $d(x, I_L(\mathfrak{G})^\Gamma_{\mathrm{ord}}) \leq C_4 . \sigma$, pour tout nombre réel $\sigma \geq s(L/K)$; donnons nous donc un tel nombre σ.

Si $\mathfrak{G}$ est un tore cela résulte de 2.4.14 b. Si $\mathfrak{G}$ est K-anisotrope, alors $I_L(\mathfrak{G})^\Gamma_{\mathrm{ord}} = I_L(\mathfrak{G})^\Gamma$ et le résultat est évident. Supposons donc $\mathfrak{G}$ semi-simple non anisotrope.

D'après le lemme 2.4.17, il existe y dans $I_L(\mathfrak{G})^\Gamma_{\mathrm{ord}}$; soient donc $\mathcal{S}$ un tore K-déployé maximal (non trivial) et $\mathcal{T}$ un tore L-déployé maximal de $\mathfrak{G}$ tels que $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ et $y \in A_{\mathcal{T}}$. Choisissons une base B du système de racines relatif $\Phi(\mathcal{S})$ de $\mathfrak{G}$ par rapport à $\mathcal{S}$; soient $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n$ les copoids fondamentaux correspondants, (i.e., ([3 ; VI n° 1.10]), $(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n)$ est la base de $V = X_*(\mathcal{S}) \otimes \mathbf{R}$ duale de B), et $\overline{\omega} = \bar{\omega}_1 + \dots + \bar{\omega}_n \in X_*(\mathcal{S}) \subset X_*(\mathcal{T})$; alors $\Delta = y + \mathbf{R}^+ . \bar{\omega}$ est une demi-droite de $A_{\mathcal{T}}$ fixe par Γ.

Soit $x \in I_L(\mathfrak{G})^\Gamma$, d'après la proposition 1.2.6, il existe un appartement A' de $I_L(\mathfrak{G})$ contenant x et la demi-droite Δ, éventuellement raccourcie. Mais Δ est telle que $I_L(\mathfrak{G})^\Gamma \cap \mathrm{cl}(\Delta)$ est l'intersection avec $\mathrm{cl}(\Delta)$ d'un espace affine de dimension égale au rang relatif r de $\mathfrak{G}$ sur K et en contient un ouvert ; de plus Δ a

un vecteur directeur $\bar{\omega}$ tel que pour toute racine $a \in \Phi(\mathcal{T})$, (c'est-à-dire relative à $A_{\mathcal{T}}$), on a $a(\bar{\omega}) \in \mathbf{Z}$. Ces propriétés sont indépendantes de l'appartement dans lequel on considère Δ, et de plus, si on pose $\Delta' = x + \mathbf{R}^+ . \bar{\omega}$, la demi-droite Δ' possède ces mêmes propriétés, (puisque $I_L(\mathfrak{G})^\Gamma$ est convexe).

Notons $x_\sigma = x + C_2 . \sigma . \overline{\omega}$ et $\Delta'' = x_\sigma + \mathbf{R}^+ . \bar{\omega}$; d'après le lemme de redressement appliqué à un bon parallélotope fixe par Γ, de A', contenant Δ', (4.1.4, 4.1.5), il existe une droite D de $I_L(\mathfrak{G})$ contenant Δ'', et contenue dans un appartement A'', qui est fixe par Γ. Mais $\mathrm{cl}(\Delta'') \cap I_L(\mathfrak{G})^\Gamma$ est l'intersection avec $\mathrm{cl}(\Delta'') \subset A''$, d'un espace affine de dimension r et en contient un ouvert ; ainsi l'enveloppe convexe de D et $\mathrm{cl}(\Delta'') \cap I_L(\mathfrak{G})^\Gamma$ est un sous-espace affine de dimension r de A'', fixe par Γ, (puisque Γ stabilise l'espace affine $\mathrm{cl}(D)$ et y agit de manière affine). La proposition 2.4.15 prouve alors que $x_\sigma \in D$ est un point invariant ordinaire.

Enfin $d(x, x_\sigma) = C_2 . \sigma . \|\bar{\omega}\|$ et $\|\bar{\omega}\|$ ne dépend que de la "géométrie" des appartements de $\mathfrak{G}$ sur K, (4.1.6 d) ; d'après le lemme 4.1.7 on peut majorer $C_2 . \|\bar{\omega}\|$ par une constante C_4, ne dépendant que du rang semi-simple absolu de $\mathfrak{G}$. On obtient ainsi la majoration désirée.

Corollaire 5.2.8. Soit L/K une extension galoisienne finie de groupe de Galois Γ ; supposons que $\mathfrak{G}$ ait des immeubles sur K et L, et qu'il existe un plongement galoisien de $I_K(\mathfrak{G})$ dans $I_L(\mathfrak{G})$; notons $\hat{I}_L(\mathfrak{G})$ le complété de l'espace métrique $I_L(\mathfrak{G})$; on a alors :

$$\forall\, x \in I_L(\mathfrak{G})^\Gamma_{\mathrm{ord}} \qquad d(x, I_K(\mathfrak{G})) \leq C_3 . s(L/K)$$

$$\forall\, x \in I_L(\mathfrak{G})^\Gamma \qquad d(x, I_K(\mathfrak{G})) \leq (C_3 + C_4) . s(L/K)$$

$$\forall\, x \in (\hat{I}_L(\mathfrak{G}))^\Gamma \qquad d(x, I_K(\mathfrak{G})) \leq (C \ldots$$

Remarques.

a) On rappelle que $s(L/K)$ est un élément de $\tilde{\mathbf{R}}$ (3.3.1) ; si $s(L/K) = t$ ou t^+, avec $t \in \mathbf{R}$, on note $s(L/K)^+ = t^+$.

b) Si $\mathfrak{G}$ est un tore, le produit d'une métrique normalisée par une constante est une métrique normalisée, le corollaire montre donc que $I_K(\mathfrak{G}) = I_L(\mathfrak{G})^\Gamma = I_L(\mathfrak{G})^\Gamma_{ord}$.

c) Les constantes C_3 et C_4 sont comme définies en 5.2.1 et 5.2.7 ; cependant on suppose ici que C_3 est une fonction croissante de l'entier "rang semi-simple absolu".

Démonstration : Pour la première assertion, on peut choisir un tore K-déployé maximal $\mathcal{S}$ et se placer dans $I_L(\mathfrak{Z}(\mathcal{S}),\mathfrak{G})$, (remarque c) ci-dessus), c'est-à-dire supposer $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(\mathcal{S})$, (2.4.14 c). Soient alors $x \in I_L(\mathfrak{G})^\Gamma_{ord} = I_L(\mathfrak{G})^\Gamma$ et y l'image dans $I_L(\mathfrak{G})^\Gamma$ d'un point de $A_{\mathcal{S}} = I_K(\mathfrak{G})$. L'image de $A_{\mathcal{S}}$ est l'ensemble des points de $I_L(\mathfrak{G})^\Gamma$ dont la projection sur $I'_L(\mathfrak{G})^\Gamma = I_L(\mathfrak{G}')^\Gamma$ est la même que celle de y ; ainsi la première assertion résulte de la proposition 5.2.1 puisque $\mathfrak{G}' = \mathfrak{Z}'(\mathcal{S})$ est K-anisotrope.

Le plongement galoisien de $I_K(\mathfrak{G})$ dans $I_L(\mathfrak{G})$, fournit une application centrée p de $I_{\hat{K}}(\mathfrak{G})$ dans $I_{\hat{L}}(\mathfrak{G})$, d'image dans $I_{\hat{L}}(\mathfrak{G})^\Gamma$, si $\hat{K}$ et $\hat{L}$ désignent les complétés de K et L (2.4.7 g) ; de plus l'image réciproque par p d'une métrique invariante sur $I_{\hat{L}}(\mathfrak{G})$ est une métrique invariante sur $I_{\hat{K}}(\mathfrak{G})$. D'après la proposition 2.5.4, p est un plongement si l'on montre que p est adaptée à l'injection de $\mathfrak{G}(\hat{K})$ dans $\mathfrak{G}(\hat{L})$. Mais le fixateur dans $\mathfrak{G}(\hat{K})$, (resp. $\mathfrak{G}(\hat{L})$), d'un point de $I_{\hat{K}}(\mathfrak{G})$, (resp. $I_{\hat{L}}(\mathfrak{G})$), est un voisinage de l'unité pour la topologie définie par la valuation, (cela résulte de 1.1.7 et de II § 1) ; de plus $\mathfrak{G}(K)$ est dense dans $\mathfrak{G}(\hat{K})$ pour cette topologie

(annexe A 4) et p est adaptée à l'injection de $\mathfrak{G}(K)$ dans $\mathfrak{G}(L)$, on en déduit que p est adaptée à l'injection de $\mathfrak{G}(\hat{K})$ dans $\mathfrak{G}(\hat{L})$ et donc que c'est un plongement. Ainsi pour montrer la seconde assertion on est ramené au cas où K est complet, mais alors elle résulte de la première assertion et de la proposition 5.2.7.

La troisième assertion découle de la seconde, puisque, comme Γ est fini, $I_L(\mathfrak{G})^\Gamma$ est dense dans $\hat{I}_L(\mathfrak{G})^\Gamma$, (cf. 1.2.11).

Remarques 5.2.9.

a) Si L/K est une extension galoisienne finie de groupe de Galois Γ et de sauvagerie 0^+, telle que $\mathfrak{G}$ ait un immeuble sur L, on sait d'après le corollaire 5.2.2 que $\mathfrak{G}$ a un immeuble sur K et qu'il existe un plongement galoisien de $I_K(\mathfrak{G})$ dans $I_L(\mathfrak{G})$. Le corollaire 5.2.8 montre alors que $I_L(\mathfrak{G})^\Gamma$ est l'adhérence de $I_K(\mathfrak{G})$ dans $I_L(\mathfrak{G})$; mais si $I_K(\mathfrak{G})$ n'est pas complet, il peut être différent de $I_L(\mathfrak{G})^\Gamma$: voir le chapitre III paragraphe 5, spécialement 3.5.7 et 3.5.8.

b) Dans le cas $s(L/K) = 0$, les corollaires 5.2.2 et 5.2.8 redémontrent la proposition 5.1.1 (descente modérément ramifiée) sans utiliser la proposition 2.5.7, (cela n'a rien d'étonnant, en effet les démonstrations de 2.5.7 et 5.2.7 sont très semblables) :

On a $I_K(\mathfrak{G}) = I_L(\mathfrak{G})^\Gamma$ et même $\hat{I}_K(\mathfrak{G}) = \hat{I}_L(\mathfrak{G})^\Gamma$; cette dernière relation est encore valable pour $s(L/K) = 0^+$.

c) La remarque précédente s'étend au cas d'une extension galoisienne infinie modérément ramifiée :

La relation $I_K(\mathfrak{G}) = I_L(\mathfrak{G})^\Gamma$ se déduit directement du cas fini ; pour la relation

$\hat{I}_K(\mathcal{G}) = \hat{I}_L(\mathcal{G})^\Gamma$, on peut supposer les rangs relatifs de $\mathcal{G}$ sur K et L égaux, et $\mathcal{G}$ semi-simple. Alors si $y \in \hat{I}_L(\mathcal{G})$, on sait d'après [11 ; 7.5.2] qu'il existe un segment $[x,y]$ de $\hat{I}_L(\mathcal{G})$ avec $[x,y[\, \subset I_L(\mathcal{G})$ et x dans un appartement A, arbitrairement fixé à l'avance. On peut supposer que A est un appartement de $I_K(\mathcal{G})$ et alors, si $y \in \hat{I}_L(\mathcal{G})^\Gamma$, l'ensemble $[x,y[$ est dans $I_L(\mathcal{G})^\Gamma = I_K(\mathcal{G})$, donc y appartient à $\hat{I}_K(\mathcal{G})$.

§ 3 Existence du plongement des immeubles.

5.3.1. Soient $\mathcal{S}$ un sous-tore K-déployé de $\mathcal{G}$, L/K une extension algébrique, et K'/K une extension galoisienne finie modérément ramifiée ; on note L' le corps composé $L' = LK'$; l'extension L'/L est donc galoisienne finie modérément ramifiée. On note $\mathcal{O}_{K'}$ l'anneau des entiers de K', $\mathcal{Z}$ le centralisateur de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{Z}'$ son groupe dérivé.

Supposons que $\mathcal{G}$ ait un immeuble sur L', alors $\mathcal{G}$, $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{Z}'$ ont des immeubles sur L, et il existe un plongement galoisien de $I_L(\mathcal{G})$ dans $I_{L'}(\mathcal{G})$. Le groupe $\mathcal{G}(L')$ opère sur $I_{L'}(\mathcal{G})$.

On note $\hat{I}_L(\mathcal{G})$ le complété de l'espace métrique $I_L(\mathcal{G})$.

Lemme 5.3.2. Il existe une constante $N = N(\mathcal{S},\mathcal{G}) \in \mathbb{N}$, égale à 4 si $\mathcal{S}$ est K-déployé maximal, telle que si

a) $I_L(\mathcal{Z}')$ est un espace métrique complet,

b) le cardinal du corps résiduel k' de K' est $\geq N$, (resp. k' contient une racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité, avec $m \geq N-1$ et m premier à la caractéristique de k'), alors $I_L(\mathcal{Z},\mathcal{G})$ est l'ensemble des points fixes par $\mathcal{S}(\mathcal{O}_{K'})$ de $I_L(\mathcal{G})$ (resp. $\hat{I}_L(\mathcal{G})$). ?

voir aussi Bruhat-Tits II 5.1.37

Remarque. Dans le même ordre d'idées on peut montrer qu'un appartement $A_{\mathcal{C}}$ de $I_L(\mathcal{G})$ est stable par $\mathcal{S}(K)$ si et seulement si $\mathcal{C}$ contient $\mathcal{S}$.

Démonstration :

1) Par définition $I_L(\mathcal{Z},\mathcal{G})$ est la réunion des appartements $A_{\mathcal{C}}$ de $I_L(\mathcal{G})$ pour $\mathcal{C}$ contenant $\mathcal{S}$; il est donc formé de points fixes par $\mathcal{S}(\mathcal{O}_{K'})$ puisque $I_L(\mathcal{G})$

est plongé dans $I_{L'}(\mathfrak{G})$. Pour la réciproque on peut supposer $\mathfrak{G}$ semi-simple et $\mathcal{S}$ non trivial.

2) Soient $\mathcal{T}_1$ un tore L-déployé maximal de $\mathfrak{G}$ contenant $\mathcal{S}$, $\Phi = \Phi(\mathcal{T}_1)$ et $a \in \Phi$ telle que $a(\mathcal{S}) \neq \{1\}$; alors il existe $n_a \in \mathbb{N}^*$ tel que, si $\bar{a}$ désigne l'image de a dans $X^*(\mathcal{S})$, $\mathbb{Z}.(\frac{\bar{a}}{n_a})$ soit facteur direct de $X^*(\mathcal{S})$; on a alors : $a(\mathcal{S}(\mathcal{O}_K)) = (\mathcal{O}_K^*)^{n_a}$. Si on suppose le cardinal de k' supérieur ou égal à n_a+2, il existe un élément $s_a \in \mathcal{S}(\mathcal{O}_{K'})$, tel que $\omega(a(s_a)-1) = 0$. L'entier $N(\mathcal{S},\mathfrak{G})$ est le maximum des entiers n_a+2 pour $a \in \Phi$. Si $\mathcal{S}$ est un tore K-déployé maximal, alors $\bar{a}$ fait partie d'un système de racines dans $X^*(\mathcal{S})$, et n_a vaut 1 ou 2 d'après la constatation suivante, ([3 ; VI planches]) :

" Si a est une racine d'un système irréductible de racines (réduit ou non), alors $\mathbb{Z}.a$ ou $\mathbb{Z}.\frac{a}{2}$ est facteur direct du $\mathbb{Z}$-module des poids ; de plus ce dernier cas ne peut arriver que pour un système de type A_1, C_ℓ $(\ell \geq 2)$ ou BC_ℓ $(\ell \geq 1)$."

Soit S' une partie finie de $\mathcal{S}(\mathcal{O}_{K'})$, stable par passage à l'inverse, contenant des éléments s_a comme ci-dessus pour chaque racine $a \in \Phi$ telle que $a(\mathcal{S}) \neq \{1\}$; alors S' a cette propriété pour tout tore $\mathcal{T}_1$ contenant $\mathcal{S}$. Nous allons montrer au numéro suivant que les points de $I_L(\mathfrak{G})$ fixes par S' sont les points de $I_L(\mathfrak{Z},\mathfrak{G})$.

3) L'espace métrique $I_L(\mathfrak{Z}')$ est complet, donc $I_L(\mathfrak{Z},\mathfrak{G})$ l'est aussi et il est fermé dans $I_L(\mathfrak{G})$. Si x est un point de $I_L(\mathfrak{Z},\mathfrak{G})$ et y un point de $I_L(\mathfrak{G})$ fixe par S', le segment $[x,y]$ est fixe par S'. Comme $[x,y]$ est connexe, il suffit de montrer que $I_L(\mathfrak{G})$ contient un voisinage de x dans $[x,y]$.

Considérons l'étoile de x, c'est-à-dire la réunion des chambres de $I_L(\mathfrak{G})$ contenant x, ou plus précisément la réunion des germes de segment d'origine x,

avec les facettes évidentes. Cet ensemble constitue l'immeuble sphérique d'une donnée radicielle, (cf. [28 ; pages 1,2] et [11 ; 7.2.7]).

Soit C une chambre de $I_L(\mathfrak{Z},\mathfrak{G})$ contenant x ; dans l'étoile de x on peut tendre une galerie de chambres, (contenant x), allant de C au germe de segment $[x,y)$; comme S' fixe C, il conserve le type des facettes, et fixe donc chacune des chambres de la galerie, (cf. [3 ; IV § 2 exercice 10] et [28 ; 1.3, 2.~~20~~ 29, 3.9]).

(Remarquons que si ω est discrète l'immeuble $I_L(\mathfrak{G})$ est donné par un système de Tits, ([11 ; 7.4.2]), on peut donc ne pas parler de l'étoile de x, il suffit de tendre la galerie dans $I_L(\mathfrak{G})$ qui est alors un complexe poly-symplicial, (cf. [11 ; 2.3.6 et 2.3.8])).

Soit C' la chambre de la galerie, mitoyenne de C ; par récurrence sur la longueur de la galerie, il suffit de montrer que C' est dans $I_L(\mathfrak{Z},\mathfrak{G})$. Considérons un appartement $A = A_{\mathcal{T}_1}$ de $I_L(\mathfrak{Z})$ contenant C, notons C" la chambre de A distincte de C ayant en commun avec C le même mur que C'. Si D désigne le demi-appartement de A contenant C mais pas C", alors il existe une racine non divisible a et un nombre réel ℓ tel que $D = D(a+\ell) = \{z \in A / a(z) + \ell \geq 0\}$, (on suppose choisie une origine dans A). On peut supposer $C' \neq C''$.

D'après 1.3.6, il existe un appartement A_1 de $I_L(\mathfrak{G})$ contenant D et C', d'où un élément $u \in U_{a,\ell} = U_D$ tel que $A_1 = u^{-1}.A$, (1.1.9 2b)). Alors $\varphi_a(u^{-1}) = \ell$ et pour tout s dans S' on a : $u^{-1}.C'' = C' = s.C' = s.u^{-1}.C'' = s.u^{-1}.s^{-1}C''$.
Donc $(u,s) = u.s.u^{-1}.s^{-1}$ fixe C" et $\varphi_a((u,s)) > \ell = \varphi_a(u) = \varphi_a(u^{-1})$.

Supposons d'abord $a(\mathcal{S}) \neq 1$ et montrons que c'est absurde.

Si $2a \notin \Phi$, alors pour la structure d'espace vectoriel sur K de U_a, on a $(u,s) = (1-a(s)).u$ et $\varphi_a((u,s)) = \varphi_a(u)+\omega(a(s)-1)$, (cf. 2.3.2). Ainsi $\omega(a(s)-1) > 0$, $\forall\, s \in S'$, ce qui est impossible si $s = s_a$.

Si $2a \in \Phi = \Phi(\mathcal{C}_1)$, appliquons ceci à $s = s_{2a}$. Notons s_1 un élément de $\mathcal{C}_1(\mathcal{O}_{K'})$ tel que $a(s_1) = a(s)-1$, (il en existe d'après la "constatation" de la partie 2)), on a alors $(u,s) = u.s.u^{-1}.s^{-1} = u'.s_1.u^{-1}.s_1^{-1}$, avec $u' \in U_{2a}$, (cf. 2.3.2). Mais comme $a(s_1) \in \mathcal{O}^*_{K'}$, on a $\varphi_a(s_1 u^{-1} s_1^{-1}) = \varphi_a(u') = \ell = \varphi_a(s_1^{-1}.u'.s_1)$. Alors $u^{-1} = (s_1^{-1}u'^{-1}s_1)s_1^{-1}(u's_1u^{-1}s_1^{-1})s_1$, mais $\varphi_a(s_1^{-1}(u's_1u^{-1}s_1^{-1})s_1) = \varphi_a(u's_1u^{-1}s_1^{-1}) = \varphi_a((u,s)) > \ell$, donc $s_1^{-1}(u's_1u^{-1}s_1^{-1})s_1$ fixe C'', et on a $C' = s_1^{-1}.u'^{-1}.s_1.C''$. Comme $s_1^{-1}.u'^{-1}.s_1 \in U_{2a}$ on est ramené au premier cas étudié.

Ainsi $a(\mathcal{S}) = 1$; mais alors u^{-1} appartient à $\mathfrak{Z}(L)$ et $C' = u^{-1}.C''$ est dans $I_L(\mathfrak{Z},\mathfrak{G})$.

4) Supposons que le corps résiduel de K' contienne une racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité, avec m satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Alors il en est de même de K'. Dans la partie 2) ci-dessus on peut supposer que chaque s_a est dans $\mathcal{S}(\mu_m)$ où μ_m est le groupe des racines $m^{\text{ièmes}}$ de 1 dans K'. On peut donc supposer que S' est un groupe fini, stable par Γ, si Γ désigne le groupe de Galois de L'/L. Ainsi $\Gamma.S'$ est un groupe fini d'automorphismes de $I_{L'}(\mathfrak{G})$, et on sait (1.2.11) que $I_{L'}(\mathfrak{G})^{S'.\Gamma}$ est dense dans $\hat{I}_{L'}(\mathfrak{G})^{S'.\Gamma}$. D'après le résultat déjà démontré en 3) et la proposition 5.1.1, l'ensemble $I_L(\mathfrak{Z},\mathfrak{G}) = I_L(\mathfrak{G})^{S'} = I_{L'}(\mathfrak{G})^{\Gamma.S'}$ est dense dans $\hat{I}_L(\mathfrak{G})^{S'}$ et complet ; d'où le second résultat de ce lemme.

<u>Théorème</u> 5.3.3. <u>Soient</u> L/K <u>une extension galoisienne finie et</u> $\mathcal{S}$ <u>un tore</u>

<u>K-déployé maximal de</u> $\mathfrak{G}$, <u>on suppose que</u> :

a) <u>Si</u> ω <u>est discrète</u>, $\mathfrak{G}$ <u>a des immeubles sur toutes les extensions galoisiennes finies modérément ramifiées de</u> L <u>et de</u> K <u>suffisamment grandes</u>.

b) <u>Si</u> ω <u>est dense, il existe une extension galoisienne finie modérément ramifiée</u> K'/K <u>telle que le corps résiduel</u> k' <u>de</u> K' <u>contienne une racine primitive</u> $m^{\text{ième}}$ <u>de l'unité pour</u> $m \geq 3$ <u>et</u> m <u>premier à la caractéristique de</u> k', <u>et que</u> $\mathfrak{G}$ <u>ait des immeubles sur</u> K', $L' = LK'$ <u>et donc sur</u> L (5.1.1). <u>On suppose de plus que l'espace métrique</u> $I_L(\mathfrak{Z}'(\mathcal{S}))$ <u>est complet</u>.

<u>Alors</u> $\mathfrak{G}$ <u>a des immeubles sur</u> K <u>et</u> L, <u>et surtout il existe un plongement galoisien de</u> $I_K(\mathfrak{G})$ <u>dans</u> $I_L(\mathfrak{G})$.

<u>Remarques</u> 5.3.4.

a) Si l'on admet la conjecture de F. Bruhat et J. Tits (2.2.15), la seule hypothèse pour ce théorème est : "$I_L(\mathfrak{Z}'(\mathcal{S}))$ complet". Elle est automatiquement vérifiée si la valuation est discrète, ou si $\mathfrak{G}$ est déployé sur L et le complété $\hat{L}$ de L maximalement complet, (i.e. linéairement compact dans la terminologie de [4 ; § 5 exercice 5] ; voir aussi [11 ; 7.5.5] et [21]).

En l'absence de cette condition, la conclusion peut être fausse, comme on l'a vu au chapitre III, paragraphe 5.

b) Si $I_L(\mathfrak{G})$ est complet, alors $I_L(\mathfrak{Z}'(\mathcal{S}))$ l'est aussi, d'après la caractérisation de la complétion donnée dans [11 ; 7.5.4]. La réciproque est fausse, par exemple si $\mathfrak{G}$ est déployé sur K et $\hat{L}$ non maximalement complet.

5.3.5. <u>Démonstration du théorème</u>.

Vues la caractérisation de la complétion d'un immeuble, ([11 ; 7.5.4]), et la proposition 2.4.8, on peut supposer $\mathfrak{G}$ semi-simple. On note Γ le groupe de Galois de l'extension L/K.

L'existence d'immeubles pour $\mathfrak{G}$ sur K et L, (resp. et toute extension galoisienne modérément ramifiée, finie ou infinie, de K et L dans le cas a)), résulte de la descente modérément ramifiée, (proposition 5.1.1), (resp. et des résultats 2.3.1 b), 5.2.4).

Il s'agit maintenant de construire un plongement galoisien de $I_K(\mathfrak{G})$ dans $I_L(\mathfrak{G})$.

Dans le cas d'une valuation discrète, et d'après la proposition 5.1.3, on peut supposer le corps résiduel de K infini. Soit alors K', une extension galoisienne modérément ramifiée de K, de degré infini, telle que $\omega_{K'}$ soit dense. Une telle extension existe : si π est une uniformisante de K, il suffit de prendre

$K' = K((\sqrt[2^n]{\pi})_{n\in\mathbb{N}})$ si la caractéristique résiduelle est différente de 2, et

$K' = K((\sqrt[3^n]{\pi})_{n\in\mathbb{N}})$ sinon. D'après la descente modérément ramifiée, (5.1.1), la proposition 2.5.4, et la composition des plongements galoisiens, (2.5.5 2)), on peut remplacer K par une sous-extension galoisienne finie de K' ; on peut donc supposer $\mathfrak{G}$ de même rang relatif sur K et K' ou sur L et $L' = LK'$.

Traitons maintenant simultanément les cas de valuation dense ou discrète. On note L' le corps composé LK' et Γ' le groupe de Galois de l'extension L'/K.

Soient $\mathcal{S}$ un tore K-déployé maximal de $\mathfrak{G}$ et x un point spécial de l'appartement $A_{\mathcal{S}}$ de $I_K(\mathfrak{G})$, (cf. 2.1.11 b). Comme $I_K(\mathfrak{G})$ se plonge dans $I_{K'}(\mathfrak{G})$, il existe un tore K'-déployé maximal $\mathcal{S}'$ de $\mathfrak{G}$, contenant $\mathcal{S}$, tel que $A_{\mathcal{S}} \subset A_{\mathcal{S}'}$.

On prend x comme origine de $A_{\mathcal{S}}$ et $A_{\mathcal{S}'}$.

Soit $\hat{P}_{x,K'}$ le fixateur de x dans $\mathfrak{G}(K')$; si $\mathfrak{G}$ a même rang relatif sur K et K', x est un point spécial de $I_{K'}(\mathfrak{G})$ et donc $\hat{P}_{x,K'} = P_{x,K'}$. Le sous-groupe $\hat{P}_{x,K'}$ de $\mathfrak{G}(L')$ est borné et stable par Γ' ; de plus Γ' est un groupe borné d'automorphismes de $I_{L'}(\mathfrak{G})$: l'orbite d'un point de $I_{L'}(\mathfrak{G})$ sous Γ' est finie, puisque $I_{L'}(\mathfrak{G})$ est réunion d'immeubles $I_{L''}(\mathfrak{G})$ pour des sous-extensions finies L''/K de L'/K, (2.3.1). Ainsi le sous-groupe du groupe des automorphismes de $I_{L'}(\mathfrak{G})$ engendré par $\hat{P}_{x,K'}$ et Γ', est $\hat{P}_{x,K'}.\Gamma'$ et il est borné.

D'après 1.2.10, il y a un point x' fixe à la fois par $\hat{P}_{x,K'}$ et Γ' dans le complété $\hat{I}_{L'}(\mathfrak{G})$ de $I_{L'}(\mathfrak{G})$. D'après la remarque 5.2.9 c), ce point x' est dans $\hat{I}_L(\mathfrak{G})$, (c'est-à-dire dans $I_L(\mathfrak{G})$ si la valuation est discrète, (1.2.10)) ; comme $\mathcal{S}(\mathcal{O}_{K'})$ est contenu dans $\hat{P}_{x,K'}$, le lemme 5.3.2 montre que x' est dans $I_L(\mathcal{Z}(\mathcal{S}),\mathfrak{G})$. Ainsi il existe un tore L-déployé maximal $\mathcal{T}$ de $\mathfrak{G}$, contenant $\mathcal{S}$, tel que x' soit dans $A_{\mathcal{T}}$.

Dans le cas d'une valuation dense, nous n'aurons plus besoin de K', dorénavant la lettre K' désigne le corps K. Ainsi dans tous les cas $\mathfrak{G}$ a même rang relatif sur K et K' ainsi que sur L et L', en particulier $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$.

Désignons par $A'_{\mathcal{S}}$ l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}(K).x'$ dans $A_{\mathcal{T}}$, c'est aussi l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}(K').x'$. Il existe alors une manière unique d'identifier les deux espaces affines A' et A en identifiant $t.x$ et $t.x'$ pour tout $t\in\mathcal{S}(K')$; cette identification est une isométrie pour les métriques normalisées. On a clairement $A'_{\mathcal{S}} \subset I_L(\mathfrak{G})^{\Gamma}$.

Essayons maintenant de montrer que $\mathfrak{G}(K).A'_{\mathcal{S}}$ est un quasi-immeuble de $\mathfrak{G}$ sur K ; d'après la définition 2.1.12 2) il suffit de vérifier trois conditions γ), β) et α)

relatives à l'action de $G = \mathfrak{G}(K)$ sur l'espace métrique $G.A'_{\mathcal{S}}$. D'après l'assertion d'unicité de 2.1.14, ce résultat suffirait à obtenir le plongement cherché par l'intermédiaire de l'identification de $I_K(\mathfrak{G})$ avec $G.A'_{\mathcal{S}}$; pour l'obtenir on sera néanmoins obligé de modifier quelque peu x', (le nouvel x' conservant toutes les propriétés de l'ancien).

L'origine choisie de $A_{\mathcal{C}}$ et $A'_{\mathcal{S}}$ est x'.

γ) Si $g \in G$, on définit $A'_{g\mathcal{S}g^{-1}} = g.A'_{\mathcal{S}}$; on obtient ainsi un recouvrement de $G.A'_{\mathcal{S}}$ par des sous-espaces indexés par les tores K-déployés maximaux de $\mathfrak{G}$, (à condition que $N(\mathcal{S})$ stabilise $A'_{\mathcal{S}}$, comme on le verra ci-dessous).

Par transport de structure on peut limiter les deux autres vérifications à l'appartement $A'_{\mathcal{S}}$.

β) Pour tout $a \in \Phi(\mathcal{S})$, tout $k \in \mathbb{R}$ et tout $u \in U_{a,k}$, u fixe le demi-appartement $D(a+k) \subset A'_{\mathcal{S}}$:

Il existe une suite (s_n) d'éléments de $\mathcal{S}(K')$, telle que $\omega(a(s_n))$ tende vers k par valeurs inférieures. Alors $s_n^{-1}.u.s_n$ fixe x dans $A \subset I_{K'}(\mathfrak{G})$ et appartient à $\hat{P}_{x,K'}$; donc $s_n^{-1}.u.s_n$ fixe x' et u fixe $s_n.x'$ ainsi que $D(a+\omega(a(s_n))$ et à la limite $D(a+k)$.

α) $N_K(\mathcal{S})$ stabilise $A'_{\mathcal{S}}$ et l'action induite de $N_K(\mathcal{S})$ sur $A'_{\mathcal{S}}$ fait de $A'_{\mathcal{S}}$ un appartement de $(\mathcal{S},\mathfrak{G})$:

D'après le choix de x, $N_K(\mathcal{S})$ est le produit semi-direct de $P_{x,K'} \cap N_K(\mathcal{S})$ et de l'espace de translations de $A_{\mathcal{S}}$, image de $Z_K(\mathcal{S})$; il suffit donc de prouver deux choses :

1) $P_{x,K'} \cap N_K(\mathcal{S})$ stabilise $A'_{\mathcal{S}}$ et l'automorphisme vectoriel associé à chaque

élément est le bon :

$P_{x,K'} \cap N_K(\mathcal{S})$ normalise $\mathcal{S}$ et fixe x', il stabilise donc $A'_{\mathcal{S}}$. On sait de plus, ([1 ; 5.5]), que $N_K(\mathcal{S}) \subset N_L(\mathcal{S},\mathcal{C}).Z_L(\mathcal{S})$. Mais

$$A'_{\mathcal{S}} \subset A_{\mathcal{C}} \subset I_L(\mathfrak{Z}(\mathcal{S}),\mathfrak{G}) \simeq I_L(\mathfrak{Z}(\mathcal{S})) = V_{1,L}(\mathfrak{Z}(\mathcal{S})) \times I^1_L(\mathfrak{Z}(\mathcal{S})),$$

et la projection de $A'_{\mathcal{S}}$ sur $I^1_L(\mathfrak{Z}(\mathcal{S}))$ est réduite à un point. Le groupe $Z_L(\mathcal{S})$ stabilise $I_L(\mathfrak{Z}(\mathcal{S}),\mathfrak{G})$ et agit sur $V_{1,L}(\mathfrak{Z}(\mathcal{S}))$ par des translations. Un élément de $N_L(\mathcal{S},\mathcal{C})$ agit vectoriellement comme il faut sur $A_{\mathcal{C}}$ donc sur $V_{1,L}(\mathfrak{Z}(\mathcal{S}))$; d'où le résultat.

2) $Z_K(\mathcal{S})$ stabilise $A'_{\mathcal{S}}$ et y agit par les translations prescrites :

C'est maintenant que l'on va être amené à modifier x'.

a) On peut identifier $I_{L'}(\mathfrak{Z},\mathfrak{G})$ avec $I_{L'}(\mathfrak{Z}) = V_{1,L'}(\mathfrak{Z}(\mathcal{S})) \times I^1_{L'}(\mathfrak{Z}(\mathcal{S}))$ de manière compatible aux actions du groupe de Galois Γ' et de $\mathfrak{G}(L')$, (2.4.12) ; cette identification échange $I_L(\mathfrak{Z},\mathfrak{G}) = I_{L'}(\mathfrak{Z},\mathfrak{G}) \cap I_L(\mathfrak{G})^{\Gamma_1}$ et $I_L(\mathfrak{Z}) = I_{L'}(\mathfrak{Z})^{\Gamma_1}$, (5.1.1 ; $\Gamma_1 = \mathrm{Gal}(L'/L)$. On sait de plus que $V^{\Gamma'}_{1,L'} = V^{\Gamma}_{1,L} \simeq V = X_*(\mathcal{S}) \otimes \mathbb{R}$, puisque $\mathfrak{G}$ a même rang sur L et L' et d'après la proposition 2.4.8. Pour tout élément $g \in Z_K(\mathcal{S})$, son action sur $I_{L'}(\mathfrak{Z},\mathfrak{G})$, commute à l'action de V. Si $\nu(g) \in V$ désigne la translation de $A_{\mathcal{S}}$ associée à g, on doit montrer que les actions de g et $\nu(g)$ sur $A'_{\mathcal{S}} \subset I_L(\mathfrak{Z},\mathfrak{G})$ sont identiques pour tout tel élément g.

b) Considérons le morphisme μ de $Z_K(\mathcal{S})$ dans le groupe des automorphismes de $I_L(\mathfrak{Z})$, qui à g associe $\mu(g) = g.\nu(g^{-1}) = \nu(g^{-1}).g$. L'image de μ stabilise $I_L(\mathfrak{Z})^{\Gamma}$. Montrons que tous les points de l'orbite de x' sous μ sont fixes par $P_{x,K'}$; il suffit de vérifier que $g.u.g^{-1}$ fixe $\nu(g).x'$ pour des générateurs u de $P_{x,K'}$:

- $u \in H = \mathrm{Ker}(\nu)$: comme H est distingué dans $Z_{K'}(\mathcal{S})$, on a $g.u.g^{-1} \in H \subset P_{x,K'}$; donc $g.u.g^{-1}$ fixe x' et commute à $\mathcal{S}(K')$, ainsi il fixe $A'_{\mathcal{S}}$ et en particulier $\nu(g).x'$.

- $u \in U_a \cap P_{x,K'}$, pour une racine $a \in \Phi(\mathcal{S})$: soient χ un caractère de $\mathfrak{z}$ rationnel sur K tel que $\chi_{|\mathcal{S}} = c.a$ avec $c \in \mathbb{N}^*$, et (s_n) une suite d'éléments de $\mathcal{S}(K')$ tels que $\omega(a(s_n))$ tende vers $\frac{1}{c}\omega(\chi(g))$ par valeurs inférieures et que pour tout caractère χ' de $\mathfrak{z}$ rationnel sur K, $\omega(\chi'(s_n))$ tende vers $\omega(\chi'(g))$. Alors $g.u.g^{-1}$ fixe $\nu(s_n).x \in A_{\mathcal{S}}$. On en déduit que $s_n.g.u.g^{-1}.s_n^{-1}$ fixe $x \in A_{\mathcal{S}}$, donc aussi $x' \in A'_{\mathcal{S}}$. Ainsi $g.u.g^{-1}$ fixe la suite des $s_n.x' = \nu(s_n).x'$ qui tend vers $\nu(g).x'$, d'où le résultat.

c) Considérons maintenant l'action quotient de $Z_K(\mathcal{S})$ sur $I'_L(\mathfrak{z})^{\Gamma} = I_L(\mathfrak{z}')^{\Gamma}$. On sait que $I_L(\mathfrak{z}')$ est complet et $I_L(\mathfrak{z}')^{\Gamma}$ fermé, convexe, borné $^{\text{non vide}}$ dans $I_L(\mathfrak{z}')$, (cf. 5.2.1) ; d'après 1.2.10, $Z_K(\mathcal{S})$ admet donc un point fixe y'' dans $I_L(\mathfrak{z}')^{\Gamma}$. Alors $A''_{\mathcal{S}} = V \times \{y''\}$ est la partie fixe par Galois de $V_{1,L}(\mathfrak{z}) \times \{y''\} \subset I_L(\mathfrak{z})$, elle est stable par $Z_K(\mathcal{S})$. Si g est dans $Z_K(\mathcal{S})$, g agit sur $A''_{\mathcal{S}}$ par une isométrie qui commute à un sous-ensemble dense de l'espace V des translations, cette isométrie est donc une translation $\nu'(g)$. On sait qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n.\nu(g) \in \nu(\mathcal{S}(K))$, (voir 2.1.3 et 2.1.7), et que ν et ν' coïncident sur $\mathcal{S}(K')$; de plus $H = \mathrm{Ker}(\nu) \subset Z_K(\mathcal{S})$ fixe $A'_{\mathcal{S}}$ et y'', donc aussi $A''_{\mathcal{S}}$ puisque son action sur $I_L(\mathfrak{z})$ est le produit de ses actions sur V_1 et $I'_L(\mathfrak{z})$; alors $n.\nu(g) = n.\nu'(g)$ et ν' coïncide avec ν sur $Z_K(\mathcal{S})$. Le résultat cherché est vrai sur $A''_{\mathcal{S}}$ à défaut de $A'_{\mathcal{S}}$.

d) En particulier $A''_{\mathcal{S}}$ est fixe par μ, donc $\mu(Z_K(\mathcal{S}))$ est un groupe borné d'automorphismes de $I_L(\mathfrak{z})$, il y a donc un point x'' adhérent à l'enveloppe convexe de l'orbite de x' sous μ, qui est fixe par μ, (voir 1.2.10). Alors x'' est fixe par $P_{x,K'}$, (partie b)), et par Γ' ; on peut donc remplacer le point x' déjà employé par x''. De plus on peut supposer que le point y'' de la partie c) est la projection de x'' sur $I'_L(\mathfrak{z})$. Alors $A''_{\mathcal{S}}$ est l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}(K).x''$ et tous les résultats annoncés sont vrais pour le couple $(x'', A''_{\mathcal{S}})$.

ANNEXE : CORPS HENSELIENS

A1 *Valuations* : (voir par exemple [4]).

Soient K un corps et ω une valuation non triviale sur K ; on note $\Gamma = \omega(K^*)$ le groupe des ordres et $\mathcal{O} = \{x \in K / \omega(x) \geqslant 0\}$ l'anneau des entiers de ω. Le complété $\hat{K}$ de K est muni d'une valuation $\hat{\omega}$ de même groupe des ordres Γ, qui prolonge ω (i.e; $\hat{\omega}_{/K} = \omega$), on note $\hat{\mathcal{O}}$ son anneau des entiers.

On dit que la valuation ω est *réelle* si $\Gamma \subset \mathbb{R}$, *discrète* si $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$, *de hauteur* 1 si elle est équivalente à une valuation réelle, c'est-à-dire s'il existe une valuation réelle sur K qui détermine le même anneau des entiers.

L'anneau $\mathcal{O}$ est local d'idéal maximal $\{x \in K/\omega(x) > 0\}$. Le groupe abélien Γ est un $\mathbb{Z}$-module sans torsion ; on note Γ' le localisé de Γ en zéro ; c'est un $\mathbb{Q}$ espace vectoriel ordonné contenant Γ comme sous $\mathbb{Z}$-module ordonné, générateur. Si la valuation est réelle on pourra, dans la suite, remplacer Γ' par $\mathbb{R}$. Si $y \in \Gamma'$ on note $[y,\infty] = \{x \in \Gamma' \cup \{+\infty\} / x \geqslant y\}$. La valuation ω définit une topologie séparée sur K et sur l'ensemble $X(K)$ des points rationnels d'un K-schéma localement algébrique X.

Définition A2 : On dit que K est *hensélien* pour ω si l'anneau local $\mathcal{O}$ est hensélien au sens de [5 ; §4 exercice 3] ou [16 ; 18.5.11 et 18.5.13].

On a les propriétés suivantes [4 ; §8 exercices 6 et 14] :

a) Le corps K est hensélien pour ω si et seulement si pour toute extension algébrique L de K il y a unicité à équivalence près du prolongement de ω à L. Ce prolongement est unique (et noté ω) si l'on impose, de plus, que son groupe des ordres soit contenu dans Γ'. D'autre part L est hensélien pour ω.

b) Si K est complet pour une valuation de hauteur 1, il est hensélien.

c) Le corps K est hensélien pour ω, si et seulement si $\hat{K}$ est hensélien pour $\hat{\omega}$ et si K est séparablement algébriquement fermé dans $\hat{K}$.

Théorème A3 : *Soit* $\mathfrak{X}$ *un schéma de présentation finie sur* $\mathcal{O}$; *on suppose* K *hensélien pour* ω *et, de plus,* $\hat{K}/K$ *séparable ou* $\mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{O}} K$ *lisse, alors il existe* $c \in \mathbb{N}$, N *et* $s \in \Gamma'$ *avec* $c \geqslant 1$, $N > 0$ *et* $s \geqslant 0$ *tels que* :

Pour tout $\nu \in \Gamma$, $\nu \geqslant N$, *et tout point* x *de* $\mathfrak{X}$ *dans* $\mathcal{O}/\omega^{-1}([\nu,\infty])$, *l'image de* x *dans* $\mathfrak{X}(\mathcal{O}/\omega^{-1}([\frac{\nu}{c} - s,\infty]))$ *se relève en un point de* $\mathfrak{X}$ *dans* $\mathcal{O}$.

Proposition A4 : *Soit* X *un* K-*schéma localement algébrique* ; *on suppose* K *hensélien pour* ω *et, de plus,* $\hat{K}/K$ *séparable ou* X *lisse, alors* $X(K)$ *est dense dans* $X(\hat{K})$ *pour la topologie définie par la valuation.*

Remarque A5 : Le théorème, pour $\hat{K}/K$ séparable, est un résultat de Greenberg ([15]) ; nous allons montrer ici que sa démonstration, donnée en valuation discrète, se généralise sans grand mal ; nous verrons aussi (Remarque A7) que cette démonstration permet de retrouver un théorème analogue de Krasner. Les autres résultats, bien connus, sont exposés ici pour la commodité des références.

A6 *Démonstration du théorème pour* $\hat{K}/K$ *séparable* :

Nous allons exactement reprendre la démonstration de Greenberg, en indiquant les modifications nécessaires. On se ramène au cas où $\mathfrak{X}$ est affine : $\mathfrak{X} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}[X_1,\ldots,X_n]/(F_1,\ldots,F_r))$, et la démonstration se fait par récurrence sur la dimension m de $\mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{O}} K$. Le résultat est évident si $m = -1$, supposons donc $m \geqslant 0$. Comme dans [15], on se ramène au cas où $\mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{O}} K = \mathfrak{X}_K$ est réduit et irréductible. Il y a alors deux cas.

1er cas : $\mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{O}} K$ est séparable sur K :

La démonstration est la même que dans [15] ; on est toutefois amené à modifier l'énoncé de deux lemmes intermédiaires ; leur démonstration est analogue à celle de [15].

Lemme 1 : Supposons $r = n$, soit α un élément de Γ' strictement positif donné, notons J la matrice jacobienne des polynômes F_i ; si $x = (x_j) \in \mathcal{O}^n$ est tel que :

$$\omega(F_i(x)) \geqslant \alpha \ ; \ \forall i = 1,\dots,r \quad \text{et} \quad \omega(\det(J(x))) = 0$$

alors il existe y dans $\mathcal{O}^n$ tel que :

$$\omega(y_j - x_j) \geqslant \alpha \ ; \ \forall j = 1,\dots,r \quad \text{et} \quad F_i(y) = 0 \quad \forall i = 1,\dots,r .$$

Lemme 2 : Supposons $r \leqslant n$. Soit α un élément de Γ' strictement positif et D un déterminant d'ordre r extrait de la matrice jacobienne des polynômes F_i ; si $x = (x_j) \in \mathcal{O}^n$ est tel que :

$$\omega(F_i(x)) \geqslant \alpha + 2\omega(D(x)) , \qquad \forall i = 1,\dots,r$$

alors il existe $y \in \mathcal{O}^n$ tel que :

$$\omega(y_j - x_j) \geqslant \alpha + \omega(D(x)) \qquad \forall j = 1,\dots,n$$

$$F_i(y) = 0 \qquad \forall i = 1,\dots,r .$$

2ème cas : $\mathfrak{X}_K = \mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{O}} K$ n'est pas séparable sur K.

Il existe une extension radicielle finie K' de K telle que le schéma $\mathfrak{X}_{K'} = \mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{O}} K'$ ne soit pas réduit ([16;4.6.3]). Il existe donc un polynôme F_{r+1} en les variables $X_1,\dots,X_n$, et un entier $q \geqslant 2$, tels que F_{r+1} ne s'annule pas sur $\mathfrak{X}_K$, tandis que $(F_{r+1})^q$ s'annule. On peut supposer les coefficients de

F_{r+1} entiers.

Soit k' un sous-anneau de l'anneau des entiers de K', de type fini sur $\mathcal{O}$ contenant l'anneau $\mathcal{O}$, les coefficients de F_{r+1} et une base de K' sur K. Ainsi k' est un $\mathcal{O}$-module libre ([4;§3 n°6 Lemme 1]), on définit $\mathfrak{X}'_1 = \operatorname{Spec}(k'[X_1,\dots,X_n]/(F_1,\dots,F_{r+1}))$, c'est un sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}_{k'}$ distinct de $\mathfrak{X}_{k'}$. Comme k' est un $\mathcal{O}$-module libre, on peut définir le foncteur restriction à la Weil $\pi_{k'/\mathcal{O}}$ ([13;I §1 n° 6.6]).

Alors $\pi_{k'/\mathcal{O}}(\mathfrak{X}'_1)$ et $\pi_{k'/\mathcal{O}}(\mathfrak{X}_{k'})$ sont des k'-schémas affines de présentation finie et $\pi_{k'/\mathcal{O}}(\mathfrak{X}'_1)$ est un sous schéma fermé de $\pi_{k'/\mathcal{O}}(\mathfrak{X}_{k'})$. On a un morphisme d'adjonction $\theta : \mathfrak{X} \to \pi_{k'/\mathcal{O}}(\mathfrak{X}_{k'})$ et on définit $\mathfrak{X}_1 = \theta^{-1}(\pi_{k'/\mathcal{O}}(\mathfrak{X}'_1))$.

Comme $K' = k' \otimes_{\mathcal{O}} K$, les foncteurs de restriction à la Weil $\pi_{k'/\mathcal{O}}$ et $\pi_{K'/K}$ commutent aux foncteurs d'extension $\otimes_{\mathcal{O}} K$ et $\otimes_{k'} K'$; comme $\mathfrak{X}'_1 \otimes_{k'} K'$ est un sous-espace de $\mathfrak{X}_{K'}$ distinct de $\mathfrak{X}_{K'}$, le sous-espace $\mathfrak{X}_1 \otimes K$ de $\mathfrak{X}_K$ est distinct de $\mathfrak{X}_K$. Puisque $\mathfrak{X}_K$ est réduit et irréductible, on a $\dim(\mathfrak{X}_1 \otimes K) < \dim(\mathfrak{X}_K)$ et par hypothèse de récurrence il existe des constantes N_1, c_1, s_1 pour $\mathfrak{X}_1$.

Soit y un point de $\mathfrak{X}$ dans $\mathcal{O}/\omega^{-1}([\nu,\infty])$, y induit un point y' de $\mathfrak{X}_{k'}$ dans $k'/(\omega^{-1}([\nu,\infty]) \cap k')$. On a donc $\omega(F_{r+1}(y)^q) \geqslant \nu$ c'est-à-dire $\omega(F_{r+1}(y)) \geqslant \frac{\nu}{q}$.

D'après le lemme 3 ci-dessous, il existe un élément a de $\mathcal{O} \subset k'$ et un élément s_2 de Γ' tels que :

$$F_{r+1}(y) \in a.k' \quad \text{et} \quad \frac{\gamma}{q} \geqslant \omega(a) \geqslant \frac{\nu}{q} - s_2 .$$

L'image de y' dans $\mathfrak{X}(k'/ak')$ est donc, en fait, un point de $\mathfrak{X}'_1$; par adjonction l'image de y dans $\mathfrak{X}(\mathcal{O}/a\mathcal{O})$ est en fait un point de $\mathfrak{X}_1$.

On en déduit donc que $\mathfrak{X}$ vérifie le théorème, avec les constantes suivantes :

$$N = (N_1 + s_2)q \ ; \ c = q.c_1 \quad \text{et} \quad s = s_1 + \frac{s_2}{c_1} .$$

<u>Lemme 3</u> : <u>Il existe une constante</u> $s \in \Gamma$, $s > 0$, <u>telle que pour tout</u> $\mu \in \Gamma'$, $\mu > 0$, <u>il existe un élément</u> $a \in \mathcal{O}$ <u>vérifiant</u> :

$$\mu - s \leqslant \omega(a) \leqslant \mu$$

<u>et</u>

$$K' \cap \omega^{-1}([\mu,\infty]) \subset a.k'$$

<u>Démonstration</u> : Soit $x_1,\dots,x_n$ une base de k' sur $\mathcal{O}$, donc aussi de K' sur K ; comme $\hat{K}/K$ est séparable, les corps K' et $\hat{K}$ sont linéairement disjoints, donc $x_1,\dots,x_n$ est une base de $\hat{K}' = K'\hat{K}$ sur $\hat{K}$.

La topologie de la valuation sur $\hat{K}'$ coïncide donc avec la topologie produit sur $\hat{K}'$ identifié à $\hat{K}^n$ grâce à la base $x_1,\dots,x_n$ ([4 ; §5 nº 2 proposition 4]). Il en résulte en particulier qu'il existe $s_1 \in \omega(K'^*) \subset \Gamma'$, $s_1 > 0$, tel que dans K' on ait :

$$\omega^{-1}([s_1,\infty]) \subset k' \subset \omega^{-1}([0,\infty]) .$$

Choisissons alors $s \in \Gamma'$, $s \geqslant s_1$ tel que tout intervalle de Γ' de longueur $s - s_1$ contienne un élément de $\omega(K^*)$. Alors pour tout $\mu \in \Gamma'$, il existe a dans $\mathcal{O}$ tel que $\mu - s \leqslant \omega(a) \leqslant \mu - s_1 \leqslant \mu$ et on a :

$$\omega^{-1}([\mu,\infty]) = a\omega^{-1}([\mu-\omega(a),\infty]) \subset a\omega^{-1}([s_1,\infty]) \subset a.k' \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

<u>Remarque</u> A7 : Reprenons les hypothèses du théorème A3 , si ce n'est que $\hat{K}/K$ n'est pas forcément séparable, et $\mathfrak{X} \otimes K$ pas forcément lisse, la démonstration ci-dessus donnera un résultat, si dans la récurrence sur la dimension, on peut

toujours supposer que l'on est dans le 1er cas. Mais d'après [16 ; 4.6.3 et 4.6.6] il existe une extension radicielle finie K' de K telle que tous les K-schémas rencontrés soient, après réduction, séparables sur K', la démonstration donne alors le résultat suivant :

Pour toute extension algébrique L de K , notons $L' = LK'$, $\mathcal{O}_L$ et $\mathcal{O}_{L'}$ les anneaux d'entiers de L et L' , alors pour tout $\nu \in \Gamma'$, $\nu \geqslant N$, et tout point x de $\mathfrak{X}$ dans $\mathcal{O}_L/\omega^{-1}([\nu,\infty])$, l'image de x dans $\mathfrak{X}(\mathcal{O}_L/\omega^{-1}([\frac{\nu}{c}-s,\infty]))$ se relève en un point de $\mathfrak{X}$ dans $\mathcal{O}_{L'}$.

Cet énoncé est celui de KRASNER [18] ; cependant dans [18] on trouve quelques compléments, que l'on peut réduire à des précisions sur la variation des constantes N , c , s associées au schéma $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}[X_j]/(F_i))$ quand on fait subir aux polynômes F_i des modifications simples. Ces précisions doivent pouvoir se déduire sans grande difficulté de la démonstration ci-dessus.

A8 <u>Démonstration de la proposition</u> A4 <u>pour</u> $\hat{K}/K$ <u>séparable</u> :

On peut supposer X affine : $X = \operatorname{Spec}(K[X_1,\dots,X_n]/(F_1,\dots,F_r))$, soit $x \in X(\hat{K})$, on peut supposer que $X_j(x) \in \hat{\mathcal{O}}$ $\forall j = 1,\dots,n$ et $F_i \in \mathcal{O}[X_1,\dots,X_n]$ $\forall i = 1,\dots,r$. Définissons alors un $\mathcal{O}$-schéma de présentation finie $\mathfrak{X} = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}[X_1,\dots,X_n]/(F_1,\dots,F_r))$, on a $X = \mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{O}} K$ et x est en fait dans $\mathfrak{X}(\hat{\mathcal{O}})$.

Considérons alors les constantes N , c , s du théorème A3 relatives à $\mathfrak{X}$.

Si $\alpha \in \Gamma'$, $\alpha \geqslant 0$ est une constante donnée, alors x fournit un point de $\mathfrak{X}$ à valeur dans $\hat{\mathcal{O}}/\omega^{-1}([c(\alpha+s),\infty]) = \mathcal{O}/\omega^{-1}([c(\alpha+s),\infty])$, alors, d'après le théorème A3 , il existe un point y de $\mathfrak{X}$ dans $\mathcal{O}$ tel que y et x fournissent le même point de $\mathfrak{X}$ dans $\mathcal{O}/\omega^{-1}([\alpha,\infty])$; ainsi y est un point de $X(K) = \mathfrak{X}(K)$ tel que $\omega(X_j(y) - X_j(x)) \geqslant \alpha$, $\forall j = 1,\dots,n$; d'où le résultat annoncé.

A9 <u>Démonstration de la proposition</u> A4 <u>pour</u> X <u>lisse</u> :

Soit $x \in X(\hat{K})$, il existe un ouvert de X contenant x , isomorphe à un ouvert V de $\mathrm{Spec}(K[X_1,\dots,X_n]/(P_1,\dots,P_r))$ de façon que la matrice $r \times n$ à coefficients dans $\hat{K}$ des $\dfrac{\partial P_i}{\partial X_j}(x)$ soit de rang r . On peut supposer que le déterminant d de la matrice carrée des $\dfrac{\partial P_i}{\partial X_j}(x)$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ et $1 \leqslant j \leqslant r$ est non nul : $d \in \hat{K}^*$.

Quitte à multiplier les fonctions X_j par des éléments de $\mathcal{O}$ on peut supposer $x_j = X_j(x)$ dans $\hat{\mathcal{O}}$; quitte à multiplier les polynômes P_i par des éléments de $\mathcal{O}$, on peut les supposer à coefficients dans $\mathcal{O}$, et alors $d \in \hat{\mathcal{O}}$.

Soient $f_1,\dots,f_s$ des polynômes de $\mathcal{O}[X_1,\dots,X_n]$ qui définissent l'ouvert V ; donnons-nous $\alpha \in \Gamma'$, $\alpha \geqslant 0$ et notons : $\alpha' = \sup\{\alpha,(\omega(f_k(x))+1)_{k=1,\dots,s}\} > 0$ $(\alpha' \in \Gamma')$ et $\beta = \alpha' + 2\omega(e)$.

$x = (x_j)$ est un point de $\hat{\mathcal{O}}^n$ qui annule les polynômes P_i mais aucun des polynômes f_k , on peut donc trouver un point $x' = (x'_j)$ de $\mathcal{O}^n$ tel que :

$$\omega(x'_j - x_j) \geqslant \beta \qquad \forall j = 1,\dots,n$$

$$\omega(P_i(x')) \geqslant \beta = \alpha' + 2\omega(e) \qquad \forall i = 1,\dots,r\ .$$

D'après le lemme 2 ci-dessus, il existe un point $y = (y_j)$ de $\mathcal{O}^n$ tel que :

$$P_i(y) = 0 \quad \forall i = 1,\dots,r \quad \text{et} \quad \omega(y_j - x'_j) \geqslant \alpha' \quad \forall j = 1,\dots,n\ .$$

Alors $\omega(f_k(y) - f_k(x)) \geqslant \alpha' \geqslant 1 + \omega(f_k(x))$, donc $f_k(x) \neq 0$ pour $k=1,\dots,s$ et y fournit un point de V dans $\mathcal{O}$; comme $\omega(y_j - x_j) \geqslant \alpha$ $\forall j = 1,\dots,n$ on a bien prouvé la densité.

A10 <u>Démonstration du théorème A3 pour</u> $\mathfrak{X} \otimes K$ <u>lisse</u> :

Cela résulte aussitôt de la proposition A4 et du théorème A3 pour $\hat{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOREL et J. TITS. Groupes réductifs, Publ. I.H.E.S., 27 (1965), 55-150.

[2] A. BOREL et J. TITS. Compléments à l'article : "Groupes réductifs", Publ. I.H.E.S., 41 (1972), 253-276.

[3] N. BOURBAKI. Groupes et algèbres de Lie, chapitres IV, V et VI, Paris, Hermann, (1968).

[4] N. BOURBAKI. Algèbre commutative, chapitre VI, Paris, Hermann, (1964).

[5] N. BOURBAKI. Algèbre commutative, chapitre III, Paris, Hermann, (1967).

[6] F. BRUHAT. Sur une classe de sous-groupes compacts maximaux des groupes de Chevalley sur un corps $\mathfrak{p}$-adique, Publ. I.H.E.S., 23 (1964), 46-74.

[7] F. BRUHAT. $\mathfrak{p}$-adic groups, in Algebraïc groups and discontinuous subgroups, Boulder, Proc. Symp. in Pure Math., IX, A.M.S., (1966), 63-70.

[8] F. BRUHAT. Groupes semi-simples sur un corps local, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice 1970), Paris, Gauthier-Villars, (1971).

[9] F. BRUHAT et J. TITS. Quatre notes aux C. R. Acad. Sci., 263 (1966), 598-601, 766-768, 822-825, 867-869.

[10] F. BRUHAT et J. TITS. Groupes algébriques simples sur un corps local, Proc. Conf. on local fields (Driebergen, 1966), Springer, (1967), 23-36.

[11] F. BRUHAT et J. TITS. Groupes réductifs sur un corps local : I Données radicielles valuées, Publ. I.H.E.S., 41 (1972), 5-251.

[12] M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK. Séminaire de géométrie algébrique : Schémas en groupes, I.H.E.S., Bures-sur-Yvette, (1962-1963), Springer Lecture Notes n° 151, 152, 153, (1970).

[13] M. DEMAZURE et P. GABRIEL. Groupes algébriques, Paris, Masson, (1970).

[14] O. GOLDMAN et N. IWAHORI. The spaces of $\mathfrak{p}$-adic norms, Acta Math., 109 (1963), 137-177.

[15] M.J. GREENBERG. Rationnal points in henselian discrete valuation rings, Publ. I.H.E.S., 31 (1966), 59-64.

[16] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNE. Eléments de géométrie algébrique IV, Publ. I.H.E.S., 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967).

[17] N. IWAHORI et H. MATSUMOTO. On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of a $\mathfrak{p}$-adic Chevalley group, Publ. I.H.E.S., 25 (1965), 5-48.

[18] M. KRASNER. Un principe d'approximation des variétés algébriques dans les corps valués complets, quatre notes aux C. R. Acad. Sci., 269 (1969), 757-760 et 1057-1060, 270 (1970), 21-24 et 1147-1149.

[19] S. LANG. On quasi-algebraïc closure, Ann. of Math., 55 (1952), 373-390.

[20] G. ROUSSEAU. Exposé de séminaire en appendice à [30].

[21] O. SCHILLING. Theory of valuations, Math. Surveys, IV, New York, (1950).

[22] S. SEN. On automorphisms of local fields, Ann. of Math., 90 (1969), 33-46.

[23] J.P. SERRE. Corps locaux, Paris, Hermann, (1968).

[24] J.P. SERRE. Cohomologie galoisienne, Springer Lecture Notes n° 5, (1965).

[25] J.P. SERRE. Arbres, amalgames et SL_2, Notes polycopiées, Paris, (1969) (~~à paraître~~ ~~comme Springer Lecture~~ dans Astérisque Notes).

[26] R. STEINBERG. Regular elements of semi-simple algebraïc groups, Publ. I.H.E.S., 27 (1965), 49-80.

[27] J. TITS. Classification of algebraïc semi-simple groups, in Algebraïc groups and discontinuous subgroups, Boulder, Proc. Symp. in Pure Math., IX, A.M.S., (1966), 33-62.

[28] J. TITS. Buildings of spherical type and finite BN-pairs, Springer Lecture Notes n° 386, (1974).

[29] J. TITS. Immeubles, classification et automorphismes, cours au Collège de France, (1974), résumé in Annuaire du Collège de France (1974), 631-637.

[30] J. TITS. Groupes réductifs sur les corps locaux, cours au Collège de France, (1975), résumé in Annuaire du Collège de France, (1975), 49-56.

[31] J. TITS. On buildings and their applications, proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouver (1974), t I, 209-220.

[32] T. TAMAGAWA. On rational points on projective varieties defined over a complete valuation field, Boulder, Proc. Symp. in Pure Math., IX, A.M.S., (1966), 84-89.

INDEX DES NOTATIONS

INDEX DES CONDITIONS

INDEX TERMINOLOGIQUE