$$\omega(a\pi) \geqslant 0 \;;\; \omega(-\tfrac{2}{\pi}) \geqslant \lambda \;;\; \omega(\tfrac{\pi}{2}) \geqslant -\lambda \;;\; \omega(1) = 0 \;.$$

Ces conditions équivalent à $\lambda = \omega(\frac{2}{\pi}) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$: le seul point de la forme (a,λ) fixe par g_n est P_{n+1}.

Remarque 3.5.9 : Le résultat précédent montre que l'immeuble $I_K(\mathcal{G})$, qui est réduit à un point ne peut se plonger dans l'immeuble $I_L(\mathcal{G})$.

Cependant on n'a pas trouvé d'exemple de groupe réductif $\mathcal{G}$ tel que $I_K(\mathcal{G})$ ne se plonge dans aucun $I_L(\mathcal{G})$, pour L extension algébrique de K déployant $\mathcal{G}$, (en particulier on n'a pas trouvé de contre-exemple à 3.4.2).

IV - UN LEMME DE REDRESSEMENT

Pour ce chapitre, on se donne un groupe semi-simple $\mathcal{G}$ défini sur un corps K complet pour une valuation réelle non triviale ω, et une extension galoisienne finie L/K de groupe de Galois Γ. On note $\mathcal{O}_L$ l'anneau des entiers de L pour la valuation ω, unique prolongement à L de la valuation de K. On suppose que $\mathcal{G}$ a un immeuble sur L.

Le but est de généraliser dans ce cadre la proposition 3.3.6. L'idée est simple :

Soit Δ une partie convexe d'un appartement A de l'immeuble $I_L(\mathcal{G})$, fixe par Γ ; la possibilité de trouver un appartement A' fixe par Γ et contenant Δ, dépend de la nullité d'une 1-classe de cohomologie de Γ dans $\hat{P}_\Delta$.

En fait on se fixe un nombre réel ϵ, $\epsilon > 0$, et on cherche un appartement A' contenant Δ tel que, si B désigne le sous-espace affine de A' engendré par Δ, l'ensemble $\Delta(A',\epsilon)$, des points de B à distance au plus ϵ de Δ, soit fixe par Γ. La possibilité de trouver un tel appartement A' dépend de la nullité d'une 1-classe de cohomologie, de Γ dans un groupe $(V_\Delta . N_{\Delta,\epsilon})/N_{\Delta,\epsilon}$, où V_Δ est la partie "unipotente" de $\hat{P}_\Delta$ et $N_{\Delta,\epsilon}$ un sous-groupe de $\hat{P}_\Delta$, dépendant de ϵ ; si ϵ n'est pas "trop grand par rapport à Δ", ce quotient est stable par le groupe de Galois. (Avec les notations du § 2, le rôle de $N_{\Delta,\epsilon}$ est joué par les groupes U_j, celui de $V_\Delta . N_{\Delta,\epsilon}$ par les groupes U_j^1, et les assertions ci-dessus sont grosso-modo 4.2.8 et 4.2.14 a)).

L'étape suivante consiste à remarquer que le groupe $V_\Delta . N_{\Delta,\epsilon}/N_{\Delta,\epsilon}$ se dévisse en groupes commutatifs qui sont des Γ-$\mathcal{O}$ -modules, (ce résultat, vraisemblable, n'est en fait montré que d'une manière affaiblie dans le lemme 4.2.10).

Si l'extension est modérément ramifiée, on montre la nullité de la 1-classe de cohomologie grâce à 3.3.2 b) et 3.3.4 a).

Si l'extension n'est pas modérément ramifiée, on est amené à introduire une partie convexe Δ' de Δ, telle que $\Delta \subset \Delta'(A,\epsilon)$ et à chercher un appartement A' contenant Δ', tel que $\Delta'(A',\epsilon)$ soit fixe par Γ ; pour qu'un tel A' existe il suffit que l'image de la 1-classe de cohomologie de Γ dans $V_\Delta . N_{\Delta,\epsilon}/N_{\Delta,\epsilon}$ soit zéro dans $H^1(\Gamma, V_{\Delta'} . N_{\Delta',\epsilon}/N_{\Delta',\epsilon})$.

L'énoncé précis de la généralisation cherchée est donné au paragraphe 1, il ne s'applique qu'à certaines parties convexes d'appartement. La démonstration, très technique, occupe, avec quelques remarques sur l'amélioration des constantes, le paragraphe 2.

§1 Enoncé du lemme.

Soit $A = A_{\mathcal{S}}$ un appartement de l'immeuble $I_L(\mathcal{G})$, on note toujours $V = V_A$ l'espace vectoriel $X_*(\mathcal{S}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ des translations de A.

Définition 4.1.1. Un bon parallélotope de A est un sous-ensemble convexe, fermé, non vide Δ de A construit comme suit :

On se donne une base B du système de racines $\Phi = \Phi(\mathcal{S})$, une partition de celle-ci en r sous-ensembles $B_1, , B_r$, un point x de A et r segments non vides $[f_i, g_i]$ de $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Pour $a \in B$, notons ϵ_a l'élément correspondant à a de la base de V duale de B, (ainsi $a(\epsilon_a) = 1$ et $a'(\epsilon_a) = 0$ si $a' \in B$, $a' \neq a$). Pour tout i, $1 \leq i \leq r$, on pose : $e_i = \sum_{a \in B_i} \epsilon_a \in V$, et on définit alors :

$$\Delta = \left\{ y \in A \,/\, y - x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i \ ; \ \text{avec } \lambda_i \in [f_i, g_i],\ \forall\, i = 1, \dots, r \right\}.$$

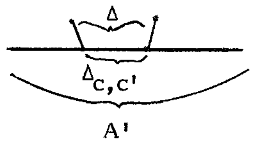
Définitions 4.1.2. Soient c et c' deux constantes réelles telles que $c \geq 2c' \geq 0$ et Δ un bon parallélotope de A construit à partir des éléments x, $(B_i, [f_i, g_i])_{i=1,r}$.

a) On note $\Delta_{c,c'}$ le bon parallélotope de A, contenu dans Δ construit à partir des éléments x, $(B_i, [f'_i, g'_i])_{i=1,\dots,r}$, où f'_i (resp. g'_i) est égal à f_i (resp. g_i) si $g_i - f_i \leq c$ et à $f_i + c'$ (resp. $g_i - c'$) sinon.

b) Dans tout appartement A' de l'immeuble contenant $\Delta_{c,c'}$, on note $V(c,c',\Delta,A')$ le sous-espace vectoriel de l'espace $V_{A'}$ des translations de A', engendré par les vecteurs translation $y_1 - y_2 \in V_{A'}$, calculés dans A', pour tout couple de points y_1, y_2 de $\Delta_{c,c'}$

tels que le vecteur $y_1 - y_2 \in V_A$, calculé dans A, soit colinéaire à un vecteur e_i pour $i \in \{1,\dots,r\}$, tel que $g_i - f_i > c$.

c) Dans tout appartement A' de l'immeuble, contenant $\Delta_{c,c'}$, on appelle <u>(c,c')-redressé de</u> Δ <u>dans</u> A', le bon parallélotope de A' réunion des translatés de $\Delta_{c,c'}$ par les translations appartenant à $V(c,c',\Delta,A')$.



<u>Remarques</u> 4.1.3.

a) Dans le cas de rang 1, toute partie convexe fermée non vide d'un appartement est un bon parallélotope.

b) L'espace $V(c,c',\Delta,A')$ de 4.1.2 b) ne dépend que de Δ, A' et c.

c) Si Δ est un bon parallélotope de A, le (c,c')-redressé de Δ dans A est le bon parallélotope construit avec les mêmes éléments que Δ, si ce n'est que l'on remplace $[f_i, g_i]$ par $[-\infty, +\infty]$ dès que $g_i - f_i > c$.

d) Dans le cas particulier important où, pour tout $i = 1,\dots,r$, on a $g_i - f_i > c$ ou $g_i = f_i$, (par exemple si $c = 0$), le (c,c')-redressé de Δ dans A' est la sous-variété affine de A' engendrée par $\Delta_{c,c'}$.

e) Sauf en rang 1, les bons parallélotopes sont des cas très particuliers de parties convexes fermées ; cependant la proposition suivante montre qu'il y en a suffisamment pour les applications du lemme faites au chapitre V.

<u>Proposition</u> 4.1.4. <u>Soient</u> A <u>un appartement de</u> $I_L(\mathcal{G})$ <u>et</u> Δ <u>un segment ou une demi-droite de</u> A, <u>fixe sous l'action du groupe de Galois</u> Γ <u>sur</u> $I_L(\mathcal{G})$. <u>Alors il existe un bon parallélotope</u> Δ_1 <u>de</u> A, <u>fixe par</u> Γ <u>et contenant</u> Δ.

<u>Remarque</u>. On peut généraliser cette proposition au cas d'une droite, ce qui est évident et sans intérêt, mais aussi au cas où Δ est l'enveloppe convexe d'un point et d'un germe de demi-droite.

<u>Démonstration</u> :

1) Pour tout élément γ de Γ, γA est un appartement contenant l'enclos $cl(\Delta)$ de Δ ; il existe donc (1.1.9 2 b)) un élément h_γ de $\mathcal{G}(L)$ qui fixe $cl(\Delta)$ et tel que $\gamma A = h_\gamma . A$. Ainsi $h_\gamma^{-1}.\gamma$ est un automorphisme de $I_L(\mathcal{G})$, qui stabilise A, fixe Δ et induit un automorphisme du système de racines Φ relatif à A.

2) Soit x une extrémité du segment ou l'extrémité de la demi-droite Δ ; considérons alors :

$$\Phi_1 = \{a \in \Phi / a(y-x) \geq 0 \quad \forall\, y \in \Delta\}$$
$$\Phi_2 = \{a \in \Phi / a(y-x) = 0 \quad \forall\, y \in \Delta\},$$

Φ_1 est un ensemble parabolique de racines de Φ, et Φ_2 est le sous-système de racines de Φ associé à Φ_1 ; on a donc une base B de Φ contenue dans Φ_1 et telle que $B \cap \Phi_2$ soit une base de Φ_2, ([3 ; VI n° 1.7]).

Soit y dans Δ, différent de x ; si Δ est un segment on choisit pour y l'extrémité différente de x de Δ. Notons $g_0 = 0, g_1, \dots, g_r$ les éléments de l'ensemble réunion de zéro et des nombres $a(y-x)$ pour $a \in B$. Si on définit $B_i = \{a \in B / a(y-x) = g_i\}$ pour $i = 0,1,\dots,r$, on a $B_0 = B \cap \Phi_2$ et $(B_0, B_1, \dots, B_r)$ est une partition de B.

Soit $(\varepsilon_a)_{a \in B}$ la base de V_A duale de B (comme en 4.1.1) ; pour $i = 1,2,\dots,r$, on définit $e_i \in V_A$ par : $e_i = \sum_{a \in B_i} \varepsilon_a$.

3) Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $h_\gamma^{-1}.\gamma$ fixe Δ et induit un automorphisme de Φ ; il stabilise donc Φ_2 et Φ_1. Il en résulte que pour tout $i = 1,2,\dots,r$, tout $a \in B_i$ et tout

$\gamma \in \Gamma$, il existe $a' \in B_i$ et $b \in \Phi_2$ tels que $h_\gamma^{-1}.\gamma(a) = a'+b$.

Donc $h_\gamma^{-1}.\gamma$ fixe $e_i \in V_A$ et le bon parallélotope $\Delta_2 = \left\{z \in A / z - x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i \; ; \; \lambda_i \in \mathbb{R}\right\}$. Définissons maintenant $g_1', \ldots, g_r' \in \widetilde{\mathbb{R}}$ par $g_i' = g_i$ si Δ est un segment et $g_i' = +\infty$ si Δ est une demi-droite. Considérons le bon parallélotope Δ_1 de A inclus dans Δ_2 et contenant Δ défini par :

$$\Delta_1 = \left\{z \in A / z - x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i \; ; \; \lambda_i \in [0, g_i']\right\}.$$

Δ_1 est contenu dans l'enclos de Δ, il est donc fixe pour chacun des h_γ ; comme il est contenu dans Δ_2, il est fixe par chacun des $h_\gamma^{-1}.\gamma$; en définitive il est fixe par Γ et c'est le bon parallélotope cherché.

4.1.5. Lemme de redressement.

Il existe deux constantes réelles C_1 et C_2 vérifiant $C_1 \geq 2C_2 > 0$ et ne dépendant que du rang semi-simple absolu de $\mathfrak{G}$ telles que :

Pour tout bon parallélotope Δ, fixe par Γ, d'un appartement de $I_L(\mathfrak{G})$, et pour tout nombre réel σ supérieur ou égal à la sauvagerie $s(L/K)$, il existe un $(C_1.\sigma, C_2.\sigma)$-redressé de Δ qui soit fixe par Γ.

Remarques 4.1.6.

a) Ce lemme est valable sous les hypothèses générales du chapitre, à savoir K complet et $\mathfrak{G}$ semi-simple ; cependant il résulte de 2.4.7 d) et 2.4.8, que la généralisation au cas où $\mathfrak{G}$ est réductif est évidente. D'autre part, on peut pour la démonstration supposer $\mathfrak{G}$ adjoint (2.4.7 h)).

b) Il est probable que, quitte à le reformuler, ce lemme est valable pour tout sous-ensemble convexe fermé d'un appartement. C'est de toute façon vrai dans le cas particulier où $s(L/K) = 0$: la formulation est claire et la démonstration se calque sur celle que l'on va donner. Nous n'aurons pas besoin de cette généralisation.

c) Il est facile de voir que ce lemme généralise la proposition 3.3.6 ; mais nous n'obtiendrons pas de généralisation de la proposition 3.3.8 qui dit, en particulier, que au rang 1 les constantes $C_1 = 2$, $C_2 = 1$ et $s(L/K)$ sont les meilleurs possibles : les constantes C_1 et C_2 que nous obtiendrons sont sans doute très mauvaises (au moins pour C_1) et il n'est pas prouvé que $s(L/K)$ soit le bon invariant de l'extension (cf. 3.3.5).

d) On va en fait montrer seulement que les constantes C_1 et C_2 ne dépendent que de la "géométrie" de l'appartement A ; c'est-à-dire que l'on peut les calculer à partir du système de racine (V_A, Φ) de l'appartement A et du produit scalaire normalisé défini sur V_A en 2.2.3 b). Cette géométrie ne dépend pas, à isomorphisme près, de l'appartement choisi dans l'immeuble. On peut la définir sans que l'immeuble existe.

L'énoncé, plus fort, du lemme résultera alors du lemme ci-dessous.

Lemme 4.1.7. Le nombre des géométries des immeubles des groupes semi-simples sur des corps (henséliens), de rang semi-simple absolu donné, est fini.

Démonstration : Cela résulte aussitôt de la classification des groupes semi-simples sur un corps, donnée dans [27]. On peut aussi le déduire facilement de la classification des systèmes de racines et de la finitude du groupe des automorphismes d'un système de racines.

§2 Démonstration du lemme.

Dans la suite, $d(\ ,\ )$ désignera la métrique normalisée de $I_L(\mathscr{G})$ définie en 2.2.3.

4.2.1. Quelques lemmes :

Soient z un point de $I_L(\mathscr{G})$, A un appartement contenant z, Φ le système de racine associé et e un nombre réel positif, on définit :

$$B(z,e) = \{y \in I_L(\mathscr{G}) / d(y,z) \le e\}$$

$$B'(z,A,e) = \{y \in A / \text{il existe une base } B \text{ de } \Phi \text{ telle que } |a(y-z)| \le e \quad \forall a \in B\}$$

$$B''(z,A,e) = \{y \in A / \ |a(y-z)| \le e \quad \forall a \in \Phi\}.$$

Lemme 4.2.2. Il existe deux constantes réelles positives C et C' ne dépendant que de la "géométrie" de $I_L(\mathscr{G})$ telles que : $C.C' \ge 1$ et $B''(z,A,e) \subset B'(z,A,e) \subset A \cap B(z,C.e) \subset B''(z,A,C.C'.e)$ pour tout triplet (z,A,e) comme ci-dessus.

Démonstration : c'est évident.

Lemme 4.2.3. Il existe une constante réelle $h_1 \ge 1$, ne dépendant que de la "géométrie" de $I_L(\mathscr{G})$, telle que le groupe $U_{A\cap B(z,h_1e)}$ fixe $B(z,e)$ pour tout triplet (z,A,e) comme en 4.2.1.

Remarque. Le fixateur de $B(z,e) \cup (A \cap B(z,h_1e))$ est donc $H_1.U_{A\cap B(z,h_1e)} \subset P_{A\cap B(z,h_1e)}$, où $H_1 \subset H$ est le fixateur de $A \cup B(z,e)$.

Démonstration : On peut supposer e non nul. Si B est une base de Φ, B détermine une chambre vectorielle de l'espace $V_A = V$ des translations de A. Considérons le cône $c_{B,e}$ de A, circonscrit à la boule $A\cap B(z,e)$ et dont la direction est cette chambre vectorielle, ($c_{B,e}$ est l'intersection des demi-espaces $D^z(a+k)$ de A, pour $a \in B$, $k \in \mathbb{R}$ et $A \cap B(z,e) \subset D^z(a+k)$; cf. 2.1.11 c)).

Soient $x_{B,e}$ le sommet de ce cône, $d_B = \dfrac{d(z,x_{B,e})}{e} > 0$ et $v_B = \dfrac{z-x_{B,e}}{e-d_B} \in V$. Alors d_B et v_B ne dépendent que de la géométrie et de B, de plus v_B est un vecteur de norme 1. Considérons la constante h_B strictement positive associée au vecteur v_B par [11 ; 7.4.33], elle ne dépend que de B et de la géométrie. On sait alors que $U_{c_{B,e}}$ fixe la boule $B(z,d_B.h_B.e)$; ainsi, si l'on pose $h' = \inf_B \{d_B.h_B\}$, on sait que $U_{A\cap B(z,e)}$ fixe la boule $B(z,h'e)$. Il suffit donc de prendre $h_1 = \frac{1}{h'}$.

Lemme 4.2.4. Soient z, $A = A_{\mathscr{S}}$ et e comme en 4.2.1, alors le fixateur de $A \cup B(z,e)$ dans $\mathscr{G}(L)$ ne dépend que de A,e et de l'orbite de z sous le groupe $\nu(\mathscr{S}(L))$ formé de translations de A. Si la valuation ω est dense, ce fixateur ne dépend que de A et e.

Démonstration : Si $t \in \mathscr{S}(L)$, le fixateur de $A \cup B(t.z,e)$ est le conjugué par t^{-1} du fixateur de $A \cup B(z,e)$; c'est-à-dire que c'est ce fixateur puisque $\mathscr{S}(L)$ centralise $Z_L(\mathscr{S})$ qui contient le fixateur de A, (2.1.15 f et 2.1.8 a)). Si ω est dense, l'orbite de z est dense dans A et, par continuité, le fixateur de $A \cup B(z,e)$ est indépendant de z.

4.2.5. Définition des constantes :

Soient C, C', h_1 des constantes satisfaisant aux conditions des lemmes ci-dessus et C'' la somme des coefficients de la plus grande racine de Φ, (si Φ est irréductible, et si h est le nombre de Coxeter de Φ, on a $C'' = h-1$ ou h selon que Φ est réduit ou non) ; on définit alors un entier :

$$N = \mathrm{Inf}\left\{n \in \mathbb{N}/2^n > C''\right\} \geq 1.$$

Les constantes C_1 et C_2 du lemme de redressement seront : $C_2 = N$ et $C_1 = (1+2.C.C'.h_1^{N+2}).C_2+1 \geq 3C_2+1$, à condition d'augmenter, éventuellement, C' de façon que $C_2.C.C'.h_1^{N+2}$ soit un entier (supérieur ou égal à 1).

Il est clair que C_1 et C_2 ne dépendent que de la géométrie de l'immeuble.

Remarque. Dans le cas où $\mathcal{G}$ est de rang semi-simple absolu 1, on obtient $C_2 = C.C' = h_1 = 1$ et $C_1 = 4$; or les constantes obtenues par un calcul direct, et qui sont les meilleures (3.3.6 et 3.3.8), sont $C_1 = 2$ et $C_2 = 1$. Dans le cas général, on peut se demander, par exemple, si on peut remplacer C_1 par $2\,C_2$.

On indiquera à la remarque 4.2.9 b, comment la démonstration qui va suivre peut être modifiée dans le cas de rang absolu 1 pour montrer que $C_1 = 2$ et $C_2 = 1$ conviennent.

4.2.6. Début de la démonstration du lemme de redressement.

a) On se donne donc un bon parallélotope Δ, fixe par Γ, d'un appartement $A = A_{\mathcal{S}}$ et un nombre réel σ, $\sigma \geq s(L/K)$, et il s'agit de montrer qu'il existe un $(C_1.\sigma, C_2.\sigma)$ redressé de Δ qui est fixe par Γ.

Par définition de la sauvagerie $s(L/K)$, il existe $\lambda \in L^*$ tel que $s(L/K) \leq \omega\left(\frac{T_{L/K}(\lambda)}{\lambda}\right) \leq \sigma$, on peut donc supposer que $\sigma = \omega\left(\frac{T_{L/K}(\lambda)}{\lambda}\right) \in \omega(L^*)$.

b) Le bon parallélotope Δ est construit à partir des éléments x, $(B_i, [f_i,g_i])_{i=1,\dots,r}$, comme en 4.1.1 dont on reprend les notations. Quitte à changer x on peut supposer que, pour tout i, on a $f_i \leq 0$ et $g_i \geq 0$, et alors $x \in \Delta$.

Dire que Δ est un $(C_1.\sigma, C_2.\sigma)$-redressé de Δ, c'est dire que pour tout i tel que $g_i - f_i > C_1.\sigma$, on a $g_i = +\infty$ et $f_i = -\infty$. Dans ce cas le résultat cherché est clair. Dans le cas contraire, il existe j tel que $g_j - f_j > C_1.\sigma$ et que $g_j < +\infty$ ou $f_j > -\infty$; on peut supposer que $j = 1$ et, quitte à changer au besoin $(B_i, [f_i,g_i])_{i=1,\dots,r}$ en $(-B_i, [-g_i,-f_i])_{i=1,\dots,r}$, que $f_1 > -\infty$. Quitte à changer x, on peut supposer que tous les f_i sont $-\infty$ ou 0.

c) On va montrer en 4.2.14, qu'il existe un bon parallélotope Δ_∞ contenu dans un $(C_1.\sigma, C_2.\sigma)$-redressé de Δ, fixe par Γ, tels que $(\Delta_\infty)_{C_1.\sigma, C_2.\sigma}$ contienne $\Delta_{C_1\sigma, C_2\sigma}$ et que Δ_∞ soit construit à partir des segments $([-\infty, g_1], ([f_i,g_i])_{i=2,\dots,r})$. Ce résultat permet bien, par récurrence, de montrer qu'il existe un $(C_1\sigma, C_2\sigma)$-redressé de Δ fixe par Γ ; (en effet, d'après les propriétés indiquées, tout $(C_1\sigma, C_2\sigma)$-redressé de Δ_∞ est un $(C_1\sigma, C_2\sigma)$-redressé de Δ).

Les ingrédients nécessaires à la démonstration sont introduits dans les numéros 4.2.7 à 4.2.13.

4.2.7. Construction des groupes de dévissage.

a) Soient $x_o = x + f_1 e_1 = x$ et $\rho_o = g_1 - f_1 = g_1$. Pour $j = 0, 1, \dots, N$ posons $\rho_j = \rho_o - j.\sigma$ et $x_j = x_o + j.\sigma.e_1$, (si $g_1 = +\infty$, on a donc $\rho_j = +\infty$, $\forall\, j$). Considérons alors les bons parallélotopes Δ_j définis par :

$$\Delta_j = \left\{y \in A/y - x_o = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i \; ; \; \lambda_1 \in [j.\sigma, \rho_o] \; ; \; \lambda_i \in [f_i, g_i],\ i \geq 2\right\}$$

$$= \left\{y \in A/y - x_j = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i \; ; \; \lambda_1 \in [0, \rho_j] \; ; \; \lambda_i \in [f_i, g_i],\ i \geq 2\right\}.$$

On a donc : $x_j \in \Delta_j$ et

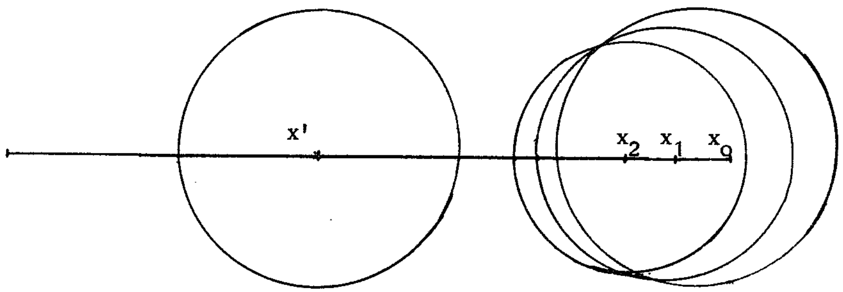
$$\Delta_{C_1.\sigma, C_2.\sigma} \subset \Delta_N \subset \dots \subset \Delta_j \subset \dots \subset \Delta_2 \subset \Delta_1 \subset \Delta_o = \Delta.$$

b) Par hypothèse $\rho_o > C_1.\sigma$, il existe donc un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que : $\rho_N \geq 2.C.C'.h_1^{N+2}(N.\sigma+\varepsilon)+\sigma$. Dans deux cas particuliers on impose des conditions supplémentaires à ε : si $\sigma \neq 0$, on suppose $\sigma > \varepsilon.C.C'.h_1^{N+2}$; si ω est discrète et σ nul, on suppose $2.C.h_1^{N+2}.\varepsilon$ inférieur à la distance de x_o à tout mur $M(u)$ qui ne contient pas x_o, (cf. 2.1.11 c)).

c) Soit $x' = x_N + [C.C'.h_1^{N+2}.(C_2.\sigma+\eta)+\sigma]e_1 \in \Delta_N$, où on pose $\eta = \varepsilon$ si $\sigma = 0$ et $\eta = 0$ sinon. Pour $m = -1, 0, 1, \ldots, N$, on note $d_m = C.h_1^{N-m}.(C_2.\sigma+\varepsilon)$.

Pour $j = 0, 1, \ldots, N$, on définit alors des sous-ensembles Ω_j de $I_L(\mathcal{G})$ par :

$$\Omega_j = \Delta_j \cup \Big(\bigcup_{j\leq m\leq N} B(x_m, d_m)\Big) \cup B(x', d_{-1})$$



Soit U_j le sous-groupe des éléments de $\mathcal{G}(L)$ qui fixent Ω_j ; comme Ω_j contient Ω_{j+1}, U_j est inclus dans U_{j+1}.

d) Pour tout entier positif i, soit $\Psi^i = \{a \in \Phi / a(e_1) \geq i\}$; Ψ^o est un ensemble parabolique de racines de Φ, tel que $\Psi^o - \Psi^1$ soit le sous système de racines de Φ associé. De plus les Ψ^i forment une filtration décroissante de Ψ^o par des idéaux ; plus précisément :

$$\forall a \in \Psi^i,\ \forall b \in \Psi^{i'},\ \text{si } a+b \in \Phi \text{ alors } a+b \in \Psi^{i+i'}.$$

En fait si B est la base qui sert à définir Δ, on a :
$\Psi^i = \Big\{a = \sum_{b\in B} n_b.b \in \Phi / \sum_{b\in B_1} n_b \geq i\Big\}$. Il en résulte que Ψ^i est vide pour $i > C''$, en particulier pour $i \geq 2^N$.

e) Choisissons une origine dans $A = A_{\mathcal{S}}$ de façon à déterminer une valuation de la donnée radicielle de $\mathcal{G}(L)$ associée à $\mathcal{S}$, et à identifier A à V_A. Pour tout couple (i,j) d'entiers vérifiant $0 \leq j \leq N$ et $1 \leq i \leq 2^N$, définissons U_j^i comme le sous-groupe de $\mathcal{G}(L)$ engendré par U_j et les groupes radiciels $U_{a,-a(x_j)} = U_a \cap \hat{P}_{\Delta_j}$ pour $a \in \Psi^i$, si Ω est une partie d'appartement, on rappelle (1.1.9 2) a) que $\hat{P}_\Omega$ est le fixateur de Ω. On a donc :

$$U_j^{i+1} \subset U_j^i \subset U_{j+1}^i \quad \text{et} \quad U_j^i = U_j \ \text{pour} \ i = 2^N.$$

<u>N.B.</u> Les groupes U_j^i dépendent de i, de j mais aussi de Δ, C_1, C, C',... etc.

f) <u>Remarque</u> : Si $a \in \pm\Psi^1$ et $u \in U_a \cap \hat{P}_{\Delta_N}$, alors u fixe $B'(x',A,C'.h_1.d_{-1}) \supset A \cap B(x',h_1 d_{-1})$, donc aussi $B(x',d_{-1})$ d'après les lemmes 4.2.2 et 4.2.3. En particulier U_j^i fixe $B(x',d_{-1})$ pour tout couple (i,j).

<u>Lemme</u> 4.2.8. <u>Pour tout couple</u> (i,j), U_j^i <u>est un sous-groupe distingué de</u> $\hat{P}_{\Delta_j}$; <u>il est stable par</u> Γ.

<u>Démonstration</u> : La seconde assertion est une conséquence de la première. En effet, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(A)$ est un appartement contenant Δ_j, il existe donc g_γ dans $\hat{P}_{\Delta_j}$ tel que $\gamma.A = g_\gamma.A$; alors $g_\gamma^{-1}.\gamma$ est une isométrie qui fixe Δ_j, stabilise A et induit une bijection de Φ, donc $g_\gamma^{-1}.\gamma$ stabilise U_j^i et on a : $\gamma(U_j^i) = g_\gamma(U_j^i).g_\gamma^{-1} = U_j^i$.

Pour montrer la première assertion, on remarque que Ω_j, contenant Δ_j et uniquement déterminé par des conditions de distance à des points de Δ_j, est stable par $\hat{P}_{\Delta_j}$; ainsi le fixateur U_j de Ω_j est distingué dans $\hat{P}_{\Delta_j}$. Il suffit donc de montrer que, si u est un élément de $U_{a,-a(x_j)}$ avec $a \in \Psi^i$, le commutateur de u et d'un élément de $\hat{P}_{\Delta_j}$ est dans U_j^i ; on peut même se restreindre aux éléments générateurs de $\hat{P}_{\Delta_j}$, qui sont de quatre sortes :

a) $u' \in U_{a'} \cap \hat{P}_{\Delta_j}$ pour $a' \in \Psi^o$: alors $(u,u') \in \prod_{\substack{p,q\in\mathbb{N}^* \\ pa+qa'\in\Phi}} U_{pa+qa'} \cap \hat{P}_{\Delta_j} \subset U_j^i$, puisque chacune des racines $pa+qa'$ est dans Ψ^i.

b) $n \in \hat{N}_{\Delta_j}$: n laisse stable A et fixe Δ_j, il permute donc les groupes radiciels U_a, $a \in \Phi$ et stabilise Ψ^i ; ainsi il normalise le groupe engendré par les $U_a \cap \hat{P}_{\Delta_j}$ pour $a \in \Psi^i$.

c) $u' \in U_{-a'} \cap \hat{P}_{\Delta_j}$ pour $a' \in \Psi^1$, $a' \neq a$: alors u' est dans $U_{-a',a'(x_m)+\rho_m.a'(e_1)}$ pour tout entier m tel que $j \le m \le N$, et (u,u') appartient au goupe engendré par les $\hat{P}_{\Delta_j} \cap U_{pa-qa',(qa'-pa)(x_m)+q.\rho_m.a'(e_1)}$ pour $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $pa-qa' \in \Phi$. Il suffit de montrer que chacun de ces groupes est contenu dans U_j, autrement dit qu'il fixe les boules $B(x_m,d_m)$ et $B(x',d_{-1})$.

Mais $q.\rho_m.a'(e_1) \ge \rho_m \ge h_1^{N-m+1}.C.C'.(C_2\sigma+\epsilon) = C'.h_1.d_m$, ainsi chacun de ces groupes fixe $B''(x_m,A,C'.h_1.d_m) \supset A \cap B(x_m,h_1 d_m)$, (4.2.1 et 4.2.2), donc aussi $B(x_m,d_m)$, (4.2.3). Enfin u et u' fixent la boule $A \cap B(x',h_1 d_{-1})$,(4.2.7 f), les groupes ci-dessus la fixent donc aussi, et ils fixent $B(x',d_{-1})$.

d) $u' \in U_{-a} \cap \hat{P}_{\Delta_j} = U_{-a,a(x_j)+\rho_j.a(e_1)}$: alors (u,u') est, d'après [11 ; 6.3.7], le produit d'un élément h de $H = \hat{P}_A$ et d'éléments $u_1 \in U_{-a} \cap \hat{P}_{\Delta_j}$, $u_2 \in U_{a,-a(x_j)+\rho_j a(e_1)}$, $u_3 \in U_{-2a} \cap \hat{P}_{\Delta_j}$ et $u_4 \in U_{2a,-2a(x_j)+\rho_j a(e_1)}$, (on rappelle que, si $a \in \Phi$, $2a \notin \Phi$, on note $U_{2a} = \{1\}$). On voit comme dans le cas c) ci-dessus, que chacun de ces quatre sous-groupes est contenu dans U_j, et il suffit de montrer que

h est dans U_j. Comme u et u' fixent $B(x',d_{-1})$, (4.2.7 f)), h fixe aussi $B(x',d_{-1})$ et il suffit de montrer que h fixe les boules $B(x_m,d_m)$. Distinguons deux cas :

d1) Supposons $\sigma \neq 0$ ou ω dense. L'élément h fixe $A \cup B(x',d_o)$; d'après le lemme 4.2.4, il fixera aussi les boules $B(x_m,d_o) \supset B(x_m,d_m)$ à condition de vérifier, si ω est discrète, que x' et x_m sont dans la même orbite sous $\mathcal{G}(L)$. Mais alors, $\sigma \neq 0$ et, par construction, on a $x_m - x' = \mu.e_1$ avec $\mu \in \omega(L^*)$; d'autre part, comme $\mathfrak{G}$ est adjoint (4.1.6 a)), e_1 est dans $X_*(\mathcal{G})$ ainsi on a bien $x_m - x' \in \nu(\mathcal{G}(L))$, (2.1.7 a)).

d2) Supposons $\sigma = 0$ et la valuation ω discrète ; il résulte de [11 ; 6.4.27], que le commutateur de h avec un élément $u'' \in U_{a'',-a''(x_j)}$ pour $a'' \in \Phi$, est dans $U_{a'',(-a''(x_j))+}$. Ainsi h fixe l'étoile de $x_o = x_1 = \ldots = x_N$, c'est-à-dire, ([28 ; pages 1,2]), l'ensemble des chambres de $I_L(\mathfrak{G})$ contenant x_o ; d'après le choix de ϵ (4.2.7 b), cette étoile contient les boules $B(x_m,C.h_1^{N-m}.\epsilon) = B(x_m,d_m)$. Donc h appartient à U_j.

Remarques 4.2.9. "Amélioration du rapport C_1/C_2".

a) Si la valuation ω est dense, la constante $C_1' = (1+2.C.C'.h_1^{N+2})\,C_2$ "convient", sans qu'il soit besoin de supposer $C.C'.h_1^{N+2}$ entier : c'est-à-dire que l'on peut refaire tous les raisonnements de 4.2.6 à 4.2.14 en remplaçant C_1 par C_1', et donc que l'on a obtenu de meilleures constantes (C_1',C_2) satisfaisant au lemme de redressement dans ce cas particulier.

La seule modification à faire est de poser $x' = x_N + [C.C'.h_1^{N+2}.(C_2\sigma+\epsilon)]e_1$.

b) Si le système de racines Φ de $\mathcal{G}$ sur L est réduit (en particulier si $\mathcal{G}$ est déployé sur L) ou plus généralement si la donnée radicielle valuée de $\mathcal{G}$ sur L, vérifie la condition (Pr) de [11 ; 6.4.15], (voir aussi [11 ; 6.4.16 et 6.4.36]), la constante $C_1' = C_2(1+C.C'.h_1'.h_1^{N+2})$ "convient", si l'on définit $h_1' = 1$ ou 2 selon que Φ est réduit ou non. L'amélioration n'est effective que si Φ est réduit.

On pose $x'' = x_N + (C.C'.h_1'.h_1^{N+2}.(C_2\sigma+\epsilon))e_1$ et $d'_{-1} = C.h_1'.h_1^{N+1}(C_2\sigma+\epsilon)$, où $\epsilon > 0$ est soumis à la condition $\rho_N > C.C'.h_1'.h_1^{N+2}.(C_2\sigma+\epsilon)$. On définit alors Ω_j comme en 4.2.7 c, si ce n'est que l'on remplace $B(x',d_{-1})$ par $B(x'',d'_{-1})$; la définition des U_j^i reste inchangée. Le principe des modifications à apporter aux raisonnements se voit dans la partie d) de la démonstration ci-dessus : l'élément h introduit à cette occasion est dans $H_{[\rho_N]} \subset H_{(\rho_N)}$, (notations de [11 ; 6.4.15]), il fixe donc $B''(z,A',\rho_N)$ ou $B''(z,A',\frac{1}{2}\rho_N)$, selon que Φ est réduit ou non, pour tout point $z \in A$ et tout appartement A' contenant z. Une modification, du même ordre est à apporter à la démonstration du lemme 4.2.13.

Lemme 4.2.10. Soient $i,j \in \mathbb{N}$ tels que $1 \le i \le 2^{N-1}$ et $0 \le j \le N$.

1) Le groupe U_j^i/U_j^{2i} est commutatif.

2) Supposons de plus $j \le N-1$, il existe un système d'homomorphismes de groupes de U_j^i/U_j^{2i} dans U_{j+1}^i/U_{j+1}^{2i}, indexés par $\{\mu \in L/\omega(\mu) \ge -\sigma\}$ et notés π_μ tel que :

a) $\pi_\mu(\tilde{u}) + \pi_{\mu'}(\tilde{u}) = \pi_{\mu+\mu'}(\tilde{u}) \quad \forall\ \tilde{u}, \mu, \mu'$

b) π_1 est la projection canonique déduite des inclusions : $U_j^i \subset U_{j+1}^i$ et $U_j^{2i} \subset U_{j+1}^{2i}$.

c) $\gamma(\pi_\mu(\tilde{u})) = \pi_{\gamma(\mu)}(\gamma(\tilde{u}))$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, tout $\tilde{u} \in U_j^i/U_j^{2i}$ et tout $\mu \in L$ tel que $\omega(\mu) \ge -\sigma$.

Démonstration.

1) Si Ψ^i_{red} désigne l'ensemble des racines non divisibles de Ψ^i, on sait, d'après 1.1.7 2), et comme U_j est distingué dans U_j^i, que U_j^i/U_j^{2i} est le quotient du groupe $\prod_{a \in \Psi^i_{red}} U_{a,-a(x_j)}$ par le sous-groupe engendré par les sous-groupes $U_j \cap U_{a,-a(x_j)}$ pour $a \in \Psi^i$ et par les sous-groupes $U_{a,-a(x_j)}$ pour $a \in \Psi^{2i}$. Les relations de commutation de Chevalley montrent alors que U_j^i/U_j^{2i} est canoniquement isomorphe à un quotient du groupe commutatif $\cancel{V_1^i}$ V^i produit direct des $\mathcal{O}_L$-modules $U_{a,-a(x_j)}/U_{2a,-2a(x_j)}$, pour les racines $a \in \Psi^i - \Psi^{2i}$, (cf. 2.3.2).

2) Soit $\tilde{u}$ dans U_j^i/U_j^{2i}, on le relève dans V_j^i en $u = \prod u_a$, le produit étant étendu aux racines $a \in \Psi^i - \Psi^{2i}$, avec $u_a \in U_{a,-a(x_j)}/U_{2a,-2a(x_j)} \subset U_a/U_{2a}$.
Soit $\mu \in L$ tel que $\omega(\mu) \ge -\sigma$, on pose alors :

$u'_a = \mu.u_a \in U_{a,-a(x_j)-\sigma}/U_{2a,-2a(x_j)-2\sigma} \subset U_{a,-a(x_{j+1})}/U_{2a,-2a(x_{j+1})}$.

Et on définit $\pi_\mu(\tilde{u})$ comme l'image dans U_{j+1}^i/U_{j+1}^{2i} de $u' = \prod u'_a \in V_{j+1}^i$.

Si u_1 et u_2 sont deux représentants de u, alors $u_{1,a}$ et $u_{2,a}$ différent par un élément appartenant à $U_{a,-a(x_j)+\|a\|.d_j}$. Ainsi $u'_{1,a}$ et $u'_{2,a}$ différent par un élément de $U_{a,-a(x_j)-\sigma+\|a\|.d_j} \subset U_{a,-a(x_{j+1})+\|a\|.h_1.d_{j+1}}$; pour tout entier m tel que $j \le m \le N-1$, cet élément fixe alors $A \cap B(x_{m+1},h_1.d_{m+1})$, donc aussi $B(x_{m+1},d_{m+1})$; c'est dire qu'il est dans U_{j+1} puisqu'il fixe $B(x',d_{-1})$ d'après la remarque 4.2.7 f). Ainsi u'_1 et u'_2 définissent le même élément $\pi_\mu(\tilde{u})$ de U_{j+1}^i/U_{j+1}^{2i}. Les homomorphismes de groupe π_μ ainsi construits vérifient évidemment les propriétés a) et b).

3) Il reste à démontrer c) : Soient $a \in \Psi^i - \Psi^{2i}$, $u \in U_{a,-a(x_j)}/U_{2a,-2a(x_j)}$, $\tilde{u}$ son image dans U_j^i/U_j^{2i}, $\gamma \in \Gamma$ et $\mu \in L^*$, tel que $\omega(\mu) \geq -\sigma$, on doit montrer que : $\gamma(\pi_\mu(\tilde{u})) = \pi_{\gamma(\mu)}(\gamma(\tilde{u}))$.

D'après 2.3.2, on a $\gamma(\mu.u) = \gamma(\mu).\gamma(u)$, la multiplication de droite étant effectuée dans le $\mathcal{O}_L$-module $U_{\gamma a}/U_{2\gamma a}$, où γa est une racine associée à l'appartement γA. Mais il existe $v \in U_{\Delta_j}$ tel que $\gamma.A = v.A$; ainsi $v^{-1}.U_{\gamma a}.v$ est un groupe $U_{a'}/U_{2a'}$ avec $a' \in \Phi$, et, comme v et γ fixent Δ_j, on a $a' \in \Psi^i - \Psi^{2i}$. Il en résulte la relation :

$$v^{-1}.(\gamma(\mu.u)).v = \gamma(\mu).[v^{-1}.(\gamma(u)).v],$$

les multiplications étant faites dans U_a/U_{2a} et $U_{a'}/U_{2a'}$.

Au quotient, dans les groupes U_j^i/U_j^{2i} et U_{j+1}^i/U_{j+1}^{2i}, on obtient :

$$\gamma(\pi_\mu(\tilde{u})) = \mathrm{Int}(v).[\pi_{\gamma(\mu)}.\{\mathrm{Int}(v^{-1}).\gamma(\tilde{u})\}].$$

Montrons que cette formule, implique la formule cherchée. Pour cela on peut supposer que v est un élément générateur de U_{Δ_j}, de l'un des trois types de la démonstration du lemme 4.2.8, (le cas $v = n \in \hat{N}_{\Delta_j}$ est inutile pour U_{Δ_j}). On voit alors que le commutateur de v avec U_j^i (resp. U_{j+1}^i) est dans U_j (resp. U_{j+1}), sauf si $v \in U_{b,-b(x_j)}$ avec $b \in \Psi^o$. Il suffit donc de montrer qu'un tel v agit, par automorphisme intérieur, linéairement sur le groupe

$$\left(\prod_{c \in \Psi^i_{red}} U_c\right) \Big/ \left(\prod_{c \in \Psi^{2i}_{red}} U_c\right).$$

Mais une telle vérification peut se faire sur une extension de L déployant un tore maximal, défini sur L et contenant le tore $\mathcal{S}$ associé à A. On peut donc supposer $\mathcal{G}$ déployé.

Soient $c \in \Psi^i \subset \Psi^1$ et $u' \in U_c$, on a alors, d'après [12 ; XXIII § 3] :

$$v.(\mu.u').v^{-1} = (\mu.u').\Pi(\mu^q.u_{p,q}),\ \text{avec}\ u_{p,q} \in U_{pb+qc},$$

le produit étant étendu aux couples $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$, tels que $pb + qc \in \Phi$.

Mais chaque racine $pb+qc$ est dans Ψ^i et elle est dans Ψ^{2i} dès que $q \neq 1$; on a donc bien la linéarité cherchée dans le quotient.

<u>Remarques</u> 4.2.11.

a) Le groupe U_j^i/U_j^{2i} est un quotient du $\mathcal{O}_L$-module V_j^i ; il est probable que le noyau correspondant soit un sous $\mathcal{O}_L$-module de V_j^i et donc que le groupe U_j^i/U_j^{2i} puisse être muni d'une structure de $\mathcal{O}_L$-module compatible avec l'action de Γ. C'est le cas au moins si $h_1 = 1$, en particulier si $\mathcal{G} \otimes L$ est isomorphe à $\mathcal{S}l_{2,L}$.

b) "<u>Amélioration de</u> C_2".

Dans la démonstration ci-dessus, on n'a utilisé la position relative de x_j et x_{j+1} que par la relation : $a(x_{j+1}) - a(x_j) \geq \sigma$ pour $a \in \Psi^i$. Or on n'utilisera le lemme 4.2.10 que dans la démonstration du lemme 4.2.12, avec $i = 2^j$. On pourrait donc construire les points x_j par : $x_{j+1} = x_j + 2^{-j}.\sigma.e_1$, pour $j \geq 0$, et x_o inchangé.

Malheureusement on a utilisé dans le lemme 4.2.8 le fait que $x_{j+1} - x_j$ est un multiple entier de σe_1 ; cependant, on ne l'a pas utilisé pour les deux cas particuliers de la remarque 4.2.9. On peut donc encore améliorer les constantes dans ces deux cas :

Les constantes $C_2' = 2(1-2^{-N})$ et $C_1' = (1+2C.C'.h_1^{N+2})C_2'$ (cas a) de la remarque 4.2.9) ou $C_1' = (1+C.C'.h_1'.h_1^{N+2})C_2'$ (cas b)) conviennent.

<u>Lemme</u> 4.2.12. <u>Pour tout entier</u> j, <u>vérifiant</u> $0 \leq j \leq C_2$, <u>l'image de</u>

$H^1(\Gamma, U_o^1/U_o)$ dans $H^1(\Gamma, U_j^1/U_j^{2^j})$ est zéro.

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur j ; il est évident pour $j = 0$. Soient $(\tilde{g}_\gamma)$ un 1-cocycle de Γ dans U_o^1/U_o, et pour chaque $\gamma \in \Gamma$, un relèvement g_γ de $\tilde{g}_\gamma$ dans U_o^1 ; d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $d \in U_j^1 - U_{j+1}^1$ tel que, si on définit $h_\gamma = d^{-1}.g_\gamma.\gamma(d)$, alors h_γ appartient à $U_j^{2^j}$. Ainsi on a un 1-cocycle dans $U_j^{2^j}/U_o$ et donc aussi dans $U_j^{2^j}/U_j^{2^{j+1}}$; notons $(\tilde{h}_\gamma)$ ce dernier 1-cocycle, il s'agit de montrer que son image dans $U_{j+1}^{2^j}/U_{j+1}^{2^{j+1}}$ est un 1-cobord.

Mais soit $\lambda \in L^*$ tel que $\omega(\frac{T(\lambda)}{\lambda}) = \sigma$, (4.2.6), on peut définir un élément $\tilde{d}'$ de $U_{j+1}^{2^j}/U_{j+1}^{2^{j+1}}$ par la formule : $\tilde{d}' = \sum_{\gamma \in \Gamma} \pi_{\frac{\gamma(\lambda)}{T(\lambda)}}(\tilde{h}_\gamma)$.

Le lemme 4.2.10 montre également que l'on peut effectuer les calculs comme dans un (Γ, L)-espace vectoriel. On vérifie alors, par un calcul classique, que l'image $(\pi_1(\tilde{h}_\gamma))$ dans $U_{j+1}^{2^j}/U_{j+1}^{2^{j+1}}$ du 1-cocycle $(\tilde{h}_\gamma)$ est le cobord de $\tilde{d}'$; le lemme est donc démontré.

Lemme 4.2.13. Désignons par Δ_- la réunion des translatés de Δ par les vecteurs de $\mathbb{R}^-.e_1$, on a alors :

$$\hat{P}_\Delta = \hat{P}_{\Delta_o} = U_o^1.\hat{P}_{\Delta_-} \; ; \; U_o^1 \cap \hat{P}_{\Delta_-} \subset U_o = U_o^{2^N} \subset U_N^{2^N} = U_N .$$

Démonstration :

a) D'après 1.1.7, on a : $\hat{P}_\Delta = U_1^+.U_2^+.U^-.\hat{N}_\Delta$ où U_1^+ (resp. U_2^+, U^-) est l'image dans U_Δ par l'application "produit" du groupe produit direct des sous-groupes radiciels $U_\Delta \cap U_a$ pour $a \in \Psi^1$ (resp. $\Phi^+ - \Psi^1$, Φ^-) ; (U_1^+ et U^- sont des sous-groupes de U_Δ). Mais alors $\hat{N}_\Delta = \hat{N}_{\Delta_-}$, $U_2^+ \subset \hat{P}_{\Delta_-}$, $U^- \subset \hat{P}_{\Delta_-}$ et $U_1^+ \subset U_o^1$; d'où le premier résultat.

b) Supposons $\sigma \neq 0$ ou ω dense. Le groupe U_o^1 fixe $B(x', d_{-1})$, (cf. 4.2.7 f)). Par convexité, $\hat{P}_{\Delta_-} \cap U_o^1$ fixe $A \cap B(x_m, h_1 d_m)$ pour tout entier m tel que $0 \leq m \leq N$; d'après le lemme et la remarque 4.2.3, pour montrer le second résultat, il suffit de voir que le fixateur dans $\mathfrak{G}(L)$ de $A \cup B(x', d_{-1}) \supset A \cup B(x', d_o)$ fixe aussi les boules $B(x_m, d_m)$: la démonstration est la même que dans la partie d1) du lemme 4.2.8.

c) Supposons $\sigma = 0$ et ω discrète, alors $x_o = x_1 = \ldots = x_N$. Dans [11 ; 7.2.7] dont on reprend les notations, on définit une donnée radicielle génératrice dans un quotient $P_{x_o}/P_{x_o}^*$ de P_{x_o}. L'immeuble sphérique de cette donnée radicielle est l'étoile E de x_o, ou plus précisément le quotient de $E - \{x_o\}$ par la relation qui identifie z et y s'ils sont dans une même chambre contenant x_o et si z, y, x_o sont alignés.

U_o fixe E donc, quitte à modifier $P_{x_o}^*$, on peut supposer $U_o \subset P_{x_o}^*$. L'image de $U_o^1 \subset P_{x_o}$ dans $P_{x_o}/P_{x_o}^*$ est contenue dans le groupe engendré par les groupes radiciels quotients $\bar{U}_a$ pour $a \in \Phi_{x_o} \cap \Psi^1$, tandis que l'image de $\hat{P}_{\Delta_-} \cap P_{x_o} = P_{\Delta_-}$ n'a une intersection non réduite à l'unité avec $\bar{U}_a$ que si $a \in \Phi_{x_o} \cap (\Psi^o - \Psi^1)$. Il en résulte que l'image de $U_o^1 \cap \hat{P}_{\Delta_-}$ dans $P_{x_o}/P_{x_o}^*$ est zéro ; donc $U_o^1 \cap \hat{P}_{\Delta_-}$ fixe E et est contenu dans U_o.

4.2.14. Fin de la démonstration du lemme de redressement.

a) Pour tout $\gamma \in \Gamma$, γA est un appartement de $I_L(\mathfrak{G})$, contenant Δ, il existe donc h_γ dans $\hat{P}_\Delta$ tel que $\gamma A = h_\gamma^{-1}.A$. Alors $\gamma\Delta_- = h_\gamma^{-1}.\Delta_-$ et pour cette dernière formule on peut, d'après le lemme 4.2.13, supposer h_γ dans U_o^1. Alors si γ_1 et γ_2 sont dans Γ, on a :

$$h^{-1}_{\gamma_1\gamma_2}\,\Delta_- = \gamma_1\gamma_2(\Delta_-) = \gamma_1(h^{-1}_{\gamma_2})\,\gamma_1(\Delta_-) = \gamma_1(h^{-1}_{\gamma_2}).h^{-1}_{\gamma_1}.\Delta_-\,,$$

d'après les lemmes 4.2.13 et 4.2.8, il vient : $h_{\gamma_1\gamma_2}.\gamma_1(h^{-1}_{\gamma_2}).h^{-1}_{\gamma_1} \in U_o$. On obtient ainsi un 1-cocycle $\tilde{h}_\gamma$ de Γ dans U^1_o/U_o. D'après le lemme 4.2.12, il existe un élément $g_1 \in U^1_N \subset \hat{P}_{\Delta_N}$ tel que : $g_1.h_\gamma.\gamma(g_1)^{-1} \in U^{2^N}_N = U_N$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

b) Pour $t \in \mathbb{R}$, $t \leq C_2.\sigma$, définissons $\Delta(t)$ comme le bon parallélotope de A construit comme $\Delta = \Delta_o$, en remplaçant uniquement $f_1 = 0$ par $f_1 = t$. On a alors $\Delta_j = \Delta(j.\sigma)$ pour $0 \leq j \leq N = C_2$ et,

$$\Delta_{C_1.\sigma, C_2.\sigma} \subset \Delta_N \subset \Delta(t) \subset \Delta_- = \bigcup_{t\leq 0} \Delta(t).$$

c) Le point $x_{-\varepsilon} = x_o - \varepsilon.e_1$ est dans la boule $B(x_N, d_N) = B(x_N, C.(C_2\sigma + \varepsilon))$; comme U_N fixe $\Omega_N \supset \Delta_N \cup B(x_N, d_N)$, il fixe aussi l'intersection de l'enclos de $\Delta_N \cup \{x_{-\varepsilon}\}$ et du sous-espace affine de A engendré par Δ ; autrement dit, U_N fixe $\Delta(-\varepsilon)$. Alors, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a :

$$\gamma(g_1\,\Delta(-\varepsilon)) = \gamma(g_1)\,\gamma(\Delta(-\varepsilon)) = \gamma(g_1)h^{-1}_\gamma\,\Delta(-\varepsilon) = g_1\,\Delta(-\varepsilon).$$

Donc $g_1(\Delta(-\varepsilon))$ est stable par Γ, mais, comme $g_1\Delta_N = \Delta_N$ est fixe par Γ et contient un ouvert de $g_1\,\Delta(-\varepsilon)$, ce dernier parallélotope est fixe par Γ.

d) En itérant ce procédé on obtient :

une suite $\varepsilon_1 = \varepsilon, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ de nombres >0 et une suite $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ d'éléments de $\hat{P}_{\Delta_N}$ telles que, si l'on définit $t_o = 0$, $t_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n \in \mathbb{R}$ et $h_n = g_1.g_2.\ldots.g_n \in \hat{P}_{\Delta_N}$, on ait : g_n fixe $\Delta(-t_{n-1} + C_2\sigma)$ et Γ fixe $h_n(\Delta(-t_n))$ pour $n \geq 1$.

e) La suite t_n tend vers $+\infty$:

Si σ est non nul ou ω non discrète, cela résulte de ce que les conditions imposées à $\varepsilon = \varepsilon_1 > 0$ en 4.2.7 b) impliquent que l'on peut choisir la suite ε_n

croissante, (quand n croît, le nombre ρ_N relatif à $\Delta(-t_n)$ croît).

Si σ est nul et ω discrète, en remplaçant à chaque fois $\Delta(-t_n)$ par l'intersection de $cl(\Delta(-t_n))$ avec l'espace affine engendré par $\Delta(-t_n)$, on est sûr que ε_n est borné inférieurement par un nombre >0, d'où la conclusion.

f) Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons $y_n = x_N - t_n.e_1$, alors $y_n \in \Delta(-t_n + C_2.\sigma)$ et $\Delta(-t_n + C_2\,\sigma) \subset cl(\{y_n\} \cup \Delta_N)$; en appliquant le lemme 2.3.8 à $\Delta' = \Delta_N$ et à la géodésique infinie $\Delta'' = \bigcup_n h_n([y_o, y_n])$, on en déduit que $\Delta_\infty = \bigcup_n h_n(\Delta(-t_n + C_2\sigma)) \subset cl(\Delta' \cup \Delta'')$ est contenu dans un appartement A' de $I_L(\mathcal{G})$. Alors Δ_∞ est un bon parallélotope de A', construit avec les mêmes constantes (f_i, g_i) que Δ, si ce n'est que, pour Δ' on a $f_1 = -\infty$. De plus $\Delta_\infty \supset (\Delta_\infty)_{C_1\sigma, C_2\sigma} \supset \Delta_N \supset \Delta_{C_1\sigma, C_2\sigma}$, Δ est fixe par Γ et contenu dans le $(C_1\sigma, C_2\sigma)$ redressé de Δ dans A'. La démonstration est donc achevée (4.2.6 c)).