immeuble de $\mathcal{G}$ sur L . D'autre part

$I_L(\mathcal{G})^\Gamma_{ord} = V_{1,L}(\mathcal{G})^\Gamma \times I'_L(\mathcal{G})^\Gamma_{ord} = V_{1,K}(\mathcal{G}) \times I'_L(\mathcal{G})^\Gamma_{ord}$ (cf 2.4.14 b)), donc $I_L(\mathcal{G})^\Gamma_{ord}$ est un immeuble centré. Enfin il est clair que l'injection de $I_L(\mathcal{G})^\Gamma_{ord}$ dans $I_L(\mathcal{G})$, est l'unique plongement galoisien possible.

III - EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

On se donne un corps K muni d'une valuation réelle non triviale ω . On note $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de (K,ω) et on appelle unités de K les éléments de K , de valuation nulle, c'est-à-dire les éléments inversibles de $\mathcal{O}_K$.

§1 Immeubles de $\mathcal{G}\ell(V)$, $\mathcal{S}\ell(V)$, $\mathcal{P}g\ell(V)$.

3.1.1 Rappels : (cf par exemple [11 ; n° 10.2, 6.1.3 a) b), 6.2.3-a) b)]).
Soit V un espace vectoriel de dimension $N \geqslant 1$ sur K . Choisissons-en une base $e = (e_1,\dots,e_N)$; le groupe $\mathcal{G}\ell(V)$ s'identifie alors à $\mathcal{G}\ell_{N,K}$; c'est un groupe réductif.

Les endomorphismes diagonaux par rapport à la base e constituent un tore maximal $\mathcal{T}_e$ de $\mathcal{G}\ell(V)$ qui est déployé sur K . Le normalisateur de $\mathcal{T}_e$ est constitué des endomorphismes qui dans la base e sont représentés par une matrice monomiale. Le groupe de Weyl associé s'identifie au groupe symétrique $\mathfrak{S}_N$ des permutations de $(e_1,\dots,e_N)$.

Le $\mathbb{Z}$-module des caractères de $\mathcal{T}_e$ s'identifie à $\mathbb{Z}^N$, avec pour base $(\chi_1,\dots,\chi_n)$ où χ_i est tel que $\chi_i(A) = a_{i,i}$ pour toute matrice diagonale A . Alors ${}^vW = \mathfrak{S}_N$ opère (à droite) sur $X^*(\mathcal{T})$ par $w(\chi_i) = \chi_{w^{-1}(i)}$.

Le radical de $\mathcal{G}\ell(V)$ est le groupe multiplicatif des endomorphismes scalaires ; le coradical s'identifie grâce au déterminant au groupe multiplicatif. L'isogénie du radical dans le coradical est donc l'élévation à la puissance $N^{\underline{\text{ième}}}$.

Le système de racines Φ s'identifie à l'ensemble des couples ordonnés (i,j) avec $i \neq j$; la racine associée à (i,j) s'écrit $a_{i,j} = \chi_i - \chi_j$. Un système de racines positives est formé des racines $a_{i,j}$ avec $i < j$.

Le groupe $\mathcal{U}_{i,j}$ correspondant à la racine $a_{i,j}$ s'identifie au groupe additif grâce à un morphisme $u_{i,j} : \mathcal{A}dd \to \mathcal{U}_{i,j}$ tel que :

$$u_{i,j}(\lambda).e_k = e_k + \lambda\delta_{j,k}.e_i \quad \text{où } \delta_{j,k} \text{ est le symbole de Kronecker.}$$

Alors, pour $\lambda \neq 0$, $m(u_{i,j}(\lambda)) = u_{j,i}(-\lambda^{-1})u_{i,j}(\lambda)u_{j,i}(-\lambda^{-1})$ transforme e_i en $-\lambda^{-1}e_j$, e_j en λe_i et fixe e_k pour $k \neq i,j$.

Pour toute racine $a = a_{i,j}$, on peut choisir $m_a = m(u_{i,j}(1))$ comme représentant de l'élément r_a du groupe de Weyl ; alors m_a fait partie du sous-groupe fini N_o de $N_K(\mathcal{C})$ des endomorphismes dont la matrice dans la base e est monomiale et n'admet que des coefficients $0, 1, -1$. On calcule facilement que :

$$\varphi_{a_{i,j}}(u_{i,j}(\lambda)) = \tfrac{1}{2}\omega(a_{i,j}(m(u_{i,j}(\lambda))m(u_{i,j}(1))^{-1}) = \omega(\lambda) .$$

3.1.2 On vient de définir tous les éléments de la donnée radicielle valuée de $GL(V)$. Notons que :

$\mathcal{C}_e$ ne dépend de la base e qu'à permutation et à multiplication de chaque élément e_i par une constante, près.

Par contre l'identification de $X^*(\mathcal{C}_e)$ avec $\mathbb{Z}^N$ et le système de racines positives dépendent en plus de l'ordre des e_i .

Les $u_{i,j}$ dépendent de la base e , à multiplication de chaque e_i par un même élément de K^* , près.

Les $\varphi_{a_{i,j}}$ dépendent de la base e , à multiplication de chaque e_i par un élément λ_i de K^* tel que $\omega(\lambda_i)$ ne dépende pas de λ_i , près.

3.1.3 <u>Définitions</u> : a) J est l'ensemble des couples (e,λ) formés d'une base $e = (e_1,\dots,e_N)$ de V et d'un N-uple $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_N) \in \mathbb{R}^N$.

b) $(e,\lambda) \sim (e',\lambda') \Longleftrightarrow$ il existe une matrice $B = (b_{i,j})$ de $GL_N(K)$ telle que :

$$e'_i = \sum_{j=1}^{N} b_{i,j}\, e_j \quad ; \quad \omega(b_{i,j}) \geqslant \lambda'_i - \lambda_j$$
$$\omega(\det(B)) = \sum_{i=1}^{N} (\lambda'_i - \lambda_i) .$$

c) $GL(V)$ opère sur J par :

$$f((e_1,\dots,e_N;\lambda)) = (f(e_1),\dots,f(e_N);\lambda) .$$

<u>Proposition</u> 3.1.4 : <u>La relation</u> "$\sim$" <u>ci-dessus est une relation d'équivalence.</u> <u>L'opération de</u> $GL(V)$ <u>sur</u> J <u>induit une opération sur le quotient</u> $I = J/\sim$.

<u>Démonstration</u> : La relation est clairement réflexive ; pour voir qu'elle est symétrique notons que, si B vérifie les conditions ci-dessus, le cofacteur de $b_{i,j}$ est somme de $(n-1)!$ termes de valuation au moins $\sum_{i'\neq i} \lambda'_{i'} - \sum_{j'\neq j} \lambda_{j'}$; donc la matrice B^{-1} vérifie les conditions ci-dessus en échangeant (e,λ) et (e',λ'). La transitivité de la relation résulte aussitôt des formules de multiplication des matrices. Enfin on vérifie sans peine que si $(e',\lambda') \sim (e,\lambda)$ avec la matric B , alors $f(e',\lambda') \sim f(e,\lambda)$ avec la matrice B .

<u>Remarques</u> 3.1.5 : a) On a :

$(\mu_1 e_1,\dots,\mu_N e_N;\lambda_1,\dots,\lambda_N) \sim (e_1,\dots,e_N;\lambda_1-\omega(\mu_1),\dots,\lambda_N-\omega(\mu_N))$. Dans le cas général il faut "moralement" regarder le couple (e,λ) comme la base $(\mu_1 e_1,\dots,\mu_N e_N)$ de V où $\omega(\mu_i) = -\lambda_i$, (ce serait le cas si $\omega(K^*)$ était $\mathbb{R}$), et deux bases sont considérées comme équivalentes si elles engendrent le même $\mathcal{O}_K$-réseau de V , (cf. 3.1.10).

b) Au couple (e,λ) associons la "norme additive" de V à valeur dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\gamma(\sum_{i=1}^{N} \mu_i e_i) = \operatorname*{Inf}_{i=1,N} (\omega(\mu_i)+\lambda_i) .$$

erreur $+\lambda_i'$

La relation $\sim$ de 3.1.3 b) traduit uniquement que (e,λ) et (e',λ') donnent la même norme. L'espace I s'identifie donc à l'espace des normes ainsi obtenues, normes dites "décomposables". Cet espace a été introduit par O. Goldmann et N. Iwahori, ([14]). Voir à ce sujet [11, pages 238, 239].

c) On peut aussi considérer cette construction comme l'analogue de 1.1.8 pour des groupes non semi-simples, (voir [11;10.2.8] et comparer avec 3.1.3 et $3.1.8_{4,5,6}$).

3.1.6 Choisissons une base $e = (e_1,\dots,e_N)$ de V et soit $\mathscr{C} = \mathscr{C}_e$ le tore maximal de $\mathfrak{gl}(V)$ associé. Le sous-ensemble de J des couples (e,λ) avec $\lambda \in \mathbb{R}^N$, s'injecte dans I ; on note $A_{\mathscr{C}}$ son image. Si on identifie $\chi_i \in X^*(\mathscr{C})$ à la $i^{\text{ème}}$ application coordonnée de $\mathbb{R}^N$, on fait de $A_{\mathscr{C}}$ un espace affine sous l'espace vectoriel $X_*(\mathscr{C}) \otimes \mathbb{R}$ dual de $X^*(\mathscr{C}) \otimes \mathbb{R}$.

<u>Proposition</u> 3.1.7 : 1) <u>Soit</u> $n \in N(\mathscr{C})$ <u>tel que</u> ${}^{v}\nu(n)$ <u>soit la permutation</u> $w \in \mathfrak{S}_N = {}^{v}W$, <u>alors la matrice de</u> n <u>dans la base</u> e <u>est de la forme</u> $(n_{i,j})$, <u>avec</u> $n_{i,j}$ <u>non nul si et seulement si</u> $i = w(j)$. <u>De plus</u> n <u>stabilise</u> $A_{\mathscr{C}}$ <u>et son action est donnée par</u> :

$$n.(\lambda_1,\dots,\lambda_N) = (\lambda_{w^{-1}(1)} - \omega(n_{1,w^{-1}(1)}),\dots,\lambda_{w^{-1}(N)} - \omega(n_{N,w^{-1}(N)})) .$$

2) <u>Soit</u> $\mu \in K^*$; <u>l'ensemble des points de</u> $A_{\mathscr{C}}$ <u>fixes par</u> $u_{i,j}(\mu)$ <u>est</u> $\{\lambda \in \mathbb{R}^N / \omega(\mu) + \lambda_i - \lambda_j \geqslant 0\}$. <u>En outre l'ensemble des points fixes de</u> N_0, (3.1.1), <u>est</u> $\{\lambda = (\xi,\dots,\xi)/\xi \in \mathbb{R}\}$.

3) <u>L'espace affine</u> $A_{\mathscr{C}}$ <u>sous</u> $X_*(\mathscr{C}) \otimes \mathbb{R}$ <u>est indépendant du choix de la base</u> e <u>telle que</u> $\mathscr{C} = \mathscr{C}_e$. <u>C'est cependant cette base qui permet l'identification de</u> $A_{\mathscr{C}}$ <u>avec</u> $\mathbb{R}^N$.

4) I <u>est réunion des</u> $A_{\mathscr{C}}$ <u>pour tous les tores déployés maximaux</u> $\mathscr{C}$ <u>de</u> $\mathfrak{gl}(V)$.

5) I, <u>muni de la collection des appartements</u> $A_{\mathscr{C}}$ <u>et de l'action de</u> $GL(V)$, <u>est un immeuble de</u> $\mathfrak{gl}(V)$ <u>sur</u> K. <u>La métrique qui induit sur chaque</u> $A_{\mathscr{C}}$ <u>la métrique euclidienne canonique de</u> $\mathbb{R}^N$ <u>est une métrique invariante.</u>

<u>Démonstration</u> : 1) Par définition l'action de n est donnée par :

$$n.(e_1,\dots,e_N;\lambda_1,\dots,\lambda_N) = (n_{w(1),1}.e_{w(1)},\dots,n_{w(N),N}.e_{w(N)};\lambda_1,\dots,\lambda_N) .$$

D'autre part la transposée de la matrice de n fournit l'équivalence :

$$(n_{w(1),1}e_{w(1)},\dots,n_{w(N),N}.e_{w(N)};\lambda_1,\dots,\lambda_N) \sim$$
$$(e_1,\dots,e_N;\lambda_{w^{-1}(1)} - \omega(n_{1,w^{-1}(1)}),\dots,\lambda_{w^{-1}(N)} - \omega(n_{N,w^{-1}(N)})) .$$

2) La vérification se ramène au cas $N=2$, $i=1$, $j=2$. Alors $u_{1,2}(\mu).(e_1,e_2;\lambda_1,\lambda_2) = (e_1,e_2+\mu e_1;\lambda_1,\lambda_2)$ et ce dernier couple est équivalent à $(e_1,e_2;\lambda_1',\lambda_2')$ si et seulement si la matrice transposée $\begin{pmatrix}1&0\\ \mu&1\end{pmatrix}$ de la matrice $u_{1,2}(\mu)$ vérifie : $0 = \lambda_1+\lambda_2-\lambda_1'-\lambda_2'$; $0 \geqslant \lambda_1'-\lambda_1$; $0 \geqslant \lambda_2'-\lambda_2$; $\omega(\mu) \geqslant \lambda_2-\lambda_1'$, ce qui équivaut à $\lambda_1 = \lambda_1'$; $\lambda_2 = \lambda_2'$; $\omega(\mu)+\lambda_1-\lambda_2 \geqslant 0$.

3) L'assertion 3 découle de 1), et 4) est alors évident puisque I est réunion des couples (e,λ) pour e base et $\lambda \in \mathbb{R}^N$. Enfin, on voit sans mal que l'action de $N(\mathscr{C})$ sur $A_{\mathscr{C}}$ décrite en 1) fait de $A_{\mathscr{C}}$ un appartement de $(\mathscr{C},\mathfrak{g})$, et le 5) découle alors de la définition 2.1.12 et de l'exemple 2.2.14 a).

<u>Proposition</u> 3.1.8 : 1) <u>L'action de</u> $\mathbb{R}$ <u>sur</u> J <u>telle que</u> :

$$\xi + (e_1,\dots,e_N;\lambda_1,\dots,\lambda_N) = (e_1,\dots,e_N;\lambda_1+\xi,\dots,\lambda_N+\xi)$$

<u>définit par passage au quotient une action sur</u> I <u>qui stabilise tous les apparte-</u>

ments et commute à l'action de $GL(V)$.

2) Un élément de $\mathrm{rad}(\mathcal{G})(K)$, c'est-à-dire une homothétie de V de rapport $\mu \in K^*$, agit sur I comme $-\omega(\mu)$ dans l'action du 1).

3) $I' = I/\mathbb{R}$ est l'immeuble $I'_K(\mathcal{G}\ell(V))$ de la donnée radicielle valuée de $GL(V)$; c'est aussi l'immeuble centré de $\mathcal{S}\ell(V)$ ou $\mathcal{P}g\ell(V)$ sur K.

4) Choisissons une base E de V ; l'application de J dans $\mathbb{R}$ donnée par $\tau(e,\lambda) = \frac{1}{N}(-\omega(\det(e/E)) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i)$ définit par passage au quotient une application τ de I dans $\mathbb{R}$.

5) I' s'identifie à l'image dans I de $J' = \{(e,\lambda) \in J/\tau(e,\lambda) = 0\}$.

6) L'application : $J \to \mathbb{R} \times J'$

$$(e,\lambda) \mapsto (\tau(e,\lambda);(e_1,\dots,e_N;\lambda_1-\tau(e,\lambda),\dots,\lambda_N-\tau(e,\lambda)))$$

donne par passage aux quotients une identification de I avec $\mathbb{R} \times I'$ compatible avec l'action de $GL(V)$, [$g \in GL(V)$ agit sur $\mathbb{R}$ par la translation $t = -\frac{1}{N}(\omega(\det(g)))$ et sur J' par $g.(e,\lambda) = (ge_1,\dots,ge_N;\lambda_1-t,\dots,\lambda_N-t)$].

Cette identification fait de I l'immeuble centré $I_K(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$ sur K.

Démonstration : La vérification de 1) et 2) est immédiate, on en déduit que l'action proposée de $V_1 = \mathbb{R}$ est celle définie en 2.1.14 2b ; l'assertion 3) est alors immédiate. L'existence de l'application quotient τ, (4), résulte aussitôt de ce que si $(e',\lambda') \sim (e,\lambda)$, il existe une matrice B telle que $e' = Be$ et $\omega(\det(B)) - \Sigma\lambda'_i = -\Sigma\lambda_i$. L'ensemble J' est donc saturé pour la relation d'équivalence et toute orbite de $\mathbb{R}$ dans J contient un unique point de J', d'où 5). Enfin l'application fournie en 6) est une bijection de J sur $\mathbb{R} \times J'$ compatible à l'équivalence sur J et J' et aux actions de $GL(V)$; de plus l'application canonique de J dans I' est le composé de l'application proposée, de la seconde projection et de l'application canonique de J' dans I' ; on a donc bien l'identification cherchée.

3.1.9 Considérons un appartement $A'_{\mathcal{C}}$ de l'immeuble I' de $\mathcal{S}\ell(V)$, (ou $\mathcal{P}g\ell(V)$). Les murs de $A'_{\mathcal{C}}$ sont par définition les hyperplans affines de $A'_{\mathcal{C}}$ limites des demi-espaces fixés par un élément non neutre u d'un groupe radiciel U_a. Mais $A'_{\mathcal{C}}$ s'identifie au quotient de $\mathbb{R}^N$ par l'action diagonale de $\mathbb{R}$; d'après 3.1.7 2), le mur correspondant à $u_{i,j}(\mu)$ a pour équation $\omega(\mu)+\lambda_i-\lambda_j = 0$. Les murs sont donc les hyperplans d'équation $\lambda_i-\lambda_j = \xi \in \omega(K^*)$, pour $i \neq j$.

Un sommet de $A'_{\mathcal{C}}$ est un point qui est intersection de $N-1$ murs de directions indépendantes. Ainsi tout sommet (λ) est tel que $\lambda_i-\lambda_j \in \omega(K^*)$, $\forall\, i,j$, il est donc spécial, (c'est-à-dire, (2.1.11 b), que pour toute racine a, il existe un mur correspondant à a le contenant).

Le lemme suivant fournit une caractérisation connue des sommets de l'immeuble de $PGL(V)$, (cf. [25]).

Lemme 3.1.10 : 1) Un sommet de I' est l'image d'un élément $(e,0)$ de J.

2) Deux éléments $(e,0)$ et $(e',0)$ de J déterminent le même sommet de I' si et seulement si les $\mathcal{O}_K$-réseaux de V engendrés par les bases e et e' sont les mêmes à multiplication par un scalaire de K^* près.

Démonstration : 1) $(e_1,\dots,e_N;\lambda_1,\lambda_1-\omega(\mu_2),\dots,\lambda_1-\omega(\mu_N))$ est équivalent dans I à $(e_1,\mu_2e_2,\dots,\mu_Ne_N;\lambda_1,\dots,\lambda_1)$, donc a la même image que $(e_1,\mu_2e_2,\dots,\mu_Ne_N;0)$ dans I'.

2) Si $(e,0)$ et $(e',0)$ déterminent le même sommet de I, alors $(e',0)$ est équivalent à $(e;\xi,\dots,\xi)$ pour $\xi \in \mathbb{R}$, et il existe une matrice $B = (b_{i,j})$ telle que : $e'_i = \sum_{j=1}^{N} b_{i,j}\, e_j$; $\omega(b_{i,j}) \geqslant -\xi$ et $\omega(\det(B)) = -N.\xi$. Les deux dernières relations montrent qu'il existe i,j tels que $-\xi = \omega(b_{i,j})$, alors quitte à remplacer $(e;\xi,\dots,\xi)$ par $(b_{i,j}.e_1,\dots,b_{i,j}.e_N;0)$, on peut supposer $\xi = 0$. Mais alors e' se déduit de e par une matrice entière de déterminant une unité ; les $\mathcal{O}_K$-modules engendrés sont donc les mêmes. La réciproque se démontre pareillement.

3.1.11 Supposons la valuation ω <u>discrète</u>, normalisée, (i.e. $\omega(K^*) = \mathbb{Z}$), et soit π une uniformisante. Si on choisit $\{a_{1,1},\dots,a_{N-1,N}\}$ comme base du système de racines, alors $a_{1,N}$ est la plus grande racine, (cf. 3.1.1). La <u>chambre</u> contenant le sommet $(e,0)$, contenue dans l'appartement $A'_{\mathcal{T}_e}$ et associée à la base ci-dessus est le quotient de l'ensemble des (e,λ) avec $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_N \geqslant \lambda_1 - 1$ par l'action diagonale de $\mathbb{R}$. Les N sommets de cette chambre sont :

$(e_1,\dots,e_N;0);(e_1,\dots,e_N;1,0,\dots,0)\sim(\pi^{-1}e_1,e_2,\dots,e_N;0);\dots;(e_1,\dots,e_N;1,\dots,1,0)$
$\sim(\pi^{-1}e_1,\dots,\pi^{-1}e_{N-1},e_N;0)$.

Ainsi : "des sommets déterminés par des réseaux $M_1,\dots,M_n$ sont sommets d'une même chambre si et seulement si, quitte à modifier l'ordre et à remplacer un réseau par un réseau homothétique, on a : $M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n \subset \pi^{-1}M_1$ ".

Choisissons une base E de V, le <u>type</u> du sommet de I' associé à $(e,0)$ est l'entier modulo N, classe de la valuation du déterminant de e par rapport à E. Les N sommets d'une chambre sont de types distincts. Les sommets d'un type donné constituent une orbite de $SL(V)$ dans I' ; tandis que l'ensemble des sommets est une orbite de $PGL(V)$.

§2 <u>Immeubles des formes de</u> $\mathfrak{sl}_2$.

A partir de 3.2.4 on suppose K hensélien.

3.2.1 Soit V un espace vectoriel de dimension 2, alors $\mathfrak{sl}(V)$ est un groupe semi-simple de rang 1 ; donc l'immeuble I de $\mathfrak{sl}(V)$ est un espace, réunion d'appartements qui sont des droites affines, muni d'une métrique normalisée canonique et d'une action isométrique de $SL(V)$ qui permute transitivement les appartements.

L'intersection de deux appartements est un ensemble clos de chacun d'eux, (1.1.9 3)), c'est-à-dire un segment limité par deux sommets. Deux points sont toujours contenus dans un même appartement et le segment qui les joint est indépendant de l'appartement.

Les <u>demi-droites</u> des appartements sont aussi les quartiers ou les cheminées. Deux germes de demi-droites sont toujours contenus dans un même appartement.

On appelle <u>bout</u> une classe d'équivalence à raccourcissement près, de parties de I isométriques à une demi-droite. Si K est complet, un bout n'est rien d'autre qu'un germe de demi-droite, (lemme 2.3.8).

On voit assez facilement qu'il y a bijection entre l'ensemble des germes de demi-droites, (c'est-à-dire l'ensemble I^s des directions de demi-droites, cf. 1.3), et l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$. De même, si $\hat{K}$ est le complété de K, l'espace $\mathbb{P}(V \otimes \hat{K})$ est en bijection avec l'ensemble des bouts.

3.2.2 Une base $e = (e_1,e_2)$ de V détermine un tore maximal $\mathcal{T}_e$ de $\mathfrak{sl}(V)$ et une identification de l'appartement $A_{\mathcal{T}_e}$ avec le quotient de $\mathbb{R}^2$ par l'action diagonale de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire avec $\mathbb{R}$ par $(\lambda_1,\lambda_2) \mapsto \lambda = \lambda_1 - \lambda_2$. Les racines a et $-a$ de $\Phi(\mathcal{T}_e)$ sont les formes linéaires a et $-a$ définies par $a(\lambda) = \lambda$.

La métrique normalisée d est telle qu'une racine est de longueur 1, on a donc $d(\lambda,\lambda') = |\lambda'-\lambda|$.

3.2.3 Supposons ω discrète d'uniformisante π telle que $\omega(\pi) = 1$, alors les sommets de l'appartement correspondent aux points de $\mathbb{Z}$. En particulier la distance de deux sommets est toujours un entier. Deux sommets sont consécutifs s'ils sont à la distance 1, ce sont alors les deux sommets d'une même chambre : le segment joignant ces deux sommets.

L'immeuble de $SL(V)$ peut être considéré comme un ensemble de sommets et d'arètes, (les chambres), c'est-à-dire comme un graphe. On voit facilement, (cf. 3.2.1), que ce graphe est un arbre sans sommet terminal. D'après 3.1.10 et 3.1.11 cet arbre est celui construit par exemple dans [25].

3.2.4 Une forme de $\mathfrak{sl}_{2,K} = \mathfrak{sl}(K^2)$ sur K est un groupe algébrique sur K qui devient isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$ sur une extension de K. Une telle forme $\mathcal{G}$ est donc un groupe semi-simple de rang (absolu) 1. Ainsi $\mathcal{G}$ contient un tore maximal $\mathcal{T}$ défini sur K, et $\mathcal{T}$ se déploie sur une extension galoisienne de degré 1 ou 2.

Réciproquement supposons que la forme $\mathcal{G}$ de $\mathfrak{sl}_{2,K}$ se déploie sur une extension L/K galoisienne de degré 2 ; alors l'automorphisme non trivial σ de L/K induit un automorphisme d'ordre 2 de $I_L(\mathcal{G})$, (2.4.6), et il y a deux cas :

1) Il existe un germe de demi-droite de $I_L(\mathcal{G})$ stable par σ. Alors le fixateur de la direction de cette demi-droite est un groupe parabolique non trivial de $\mathcal{G}$, (1.3.4), fixe par σ, ainsi $\mathcal{G}$ n'est pas anisotrope sur K, il est donc déployé puisque le rang est 1 : Il existe un tore maximal $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$ qui est déployé sur K.

2) Aucun germe de demi-droite de $I_L(\mathcal{G})$ n'est stable par σ. Alors il existe une demi-droite Δ et un appartement A contenant Δ et $\sigma\Delta$ comme deux demi-droites opposées. Ainsi A est stable par σ et on en déduit que le tore maximal L-déployé correspondant à A est invariant par σ, donc K-défini, (2.4.6 b et 2.1.15 f). Notons que dans ce cas $\mathcal{G}$ est anisotrope sur K, (cela résulte de 2.5.2 b).

Proposition 3.2.5 : Soient $\mathcal{G}$ une K-forme de $\mathfrak{sl}_{2,K}$, $\mathcal{T}$ un tore maximal K-défini de $\mathcal{G}$, L/K l'extension galoisienne de degré 1 ou 2 qui déploie $\mathcal{T}$ et σ l'automorphisme non trivial éventuel de L/K, alors :

1) Pour toute identification de $\mathcal{G}\otimes L$ avec $\mathfrak{sl}_{2,L}$, qui identifie $\mathcal{T}\otimes L$ avec le tore des matrices diagonales, il existe un élément u de K^* tel que : pour toute extension algébrique M de K contenant L et tout automorphisme τ de M/K, l'opération associée τ^* de τ sur $SL_2(M)$ s'écrit :

$$\tau^*\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \tau d & \frac{\tau c}{u} \\ u\tau b & \tau a\end{pmatrix} \text{ si } \tau_{|L} \neq 1 \text{ , } \tau^*\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \tau a & \tau b \\ \tau c & \tau d\end{pmatrix} \text{ si } \tau_{|L} = 1 .$$

2) Si L/K est de degré 2, et si on change l'identification ci-dessus, u est changé en $uNy = u.y.\sigma y$ avec $y \in L^*$.

Démonstration : Le cas où L/K est de degré 1 est clair, supposons donc le degré égal à 2.

1) Si τ est un K-automorphisme d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, (contenant L), l'action τ^* sur $SL_2(\overline{K})$ se déduit de l'action normale, $\left(\tau\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \tau a & \tau b \\ \tau c & \tau d\end{pmatrix}\right)$, par un 1-cocycle de $Gal(\overline{K}/K)$ dans le groupe $PGL_2(\overline{K})$ des automorphismes de $\mathfrak{sl}_{2,\overline{K}}$. Comme l'identification choisie est définie sur L, ce cocycle se factorise par $Gal(L/K)$ et son image est dans $PGL_2(L)$. Comme $\mathcal{T}$

est K-défini mais non K-déployé, la valeur u_σ du cocycle en σ normalise $\mathcal{T}$ sans le centraliser ; on peut donc poser $u_\sigma \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix}$. Les conditions de cocycle donnent alors $u_1 = 1 = u_\sigma . \sigma(u_\sigma) \equiv \begin{pmatrix} \sigma u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$, on obtient donc $\sigma u = u$, ainsi $u \in K$. Pour $A \in SL_2(M)$ et $\tau \in \mathrm{Aut}(M/K)$, on a par définition $\tau^*(A) = u_\tau . \tau(A) . u_\tau^{-1}$, et le résultat annoncé découle facilement de ce que $u_\tau = u_1 = 1$ si $\tau_{|L} = 1$ et $u_\tau = u_\sigma$ si $\tau_{|L} = \sigma$.

2) Un changement d'identification se fait à partir d'un automorphisme de $\mathfrak{sl}_{2,L}$ stabilisant $\mathcal{T} \otimes L$, c'est-à-dire d'un automorphisme intérieur par un élément de $PGL_2(L)$ de la forme $g \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ ou $y \equiv \begin{pmatrix} 0 & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, avec $y \in L^*$. On a alors $\tau^{*\prime}(A) = g.\tau^*(g^{-1}Ag).g^{-1} = g.u_\tau.\tau(g)^{-1}.\tau(A).\tau(g).u_\tau^{-1}.g^{-1}$. Donc $u'_\tau = g.u_\tau.\tau(g)^{-1}$. Dans le premier cas on trouve $u'_\sigma \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma y^{-1} \\ yu & 0 \end{pmatrix}$ et dans le second $u'_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & uy \\ \sigma y^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, donc $u' = u.y.\sigma y$ ou $u' = u.(\frac{1}{uy}).\sigma(\frac{1}{uy})$.

<u>Remarque</u> 3.2.6 : Soit L/K une extension quadratique galoisienne de groupe de Galois $\{1, \sigma\}$.

Si $u \in K^*$, les formules de 3.2.5 1) permettent de définir une K forme $\mathcal{G}$ déployée sur L de $\mathfrak{sl}_2$, et un isomorphisme défini sur L de $\mathcal{G} \otimes L$ sur $\mathfrak{sl}_{2,L}$. Soit $\mu \in L$, tel que $L = K[\mu]$, on voit facilement que pour toute K-algèbre R, on peut définir le groupe des R-points de $\mathcal{G}$ par :

$$\mathcal{G}(R) = \{\begin{pmatrix} a+\mu a' & b+\mu b' \\ u(b+b'\sigma\mu) & a+a'\sigma\mu \end{pmatrix} \in SL_2(R[\mu]) / a, a', b, b' \in R\} .$$

En particulier

$$\mathcal{G}(K) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ u\sigma b & \sigma a \end{pmatrix} \in SL_2(L)\} = \{(a,b) \in L^2 / a\sigma a - ub\sigma b = 1\} .$$

Si u n'est pas une norme de l'extension L/K, $\mathcal{G}$ est "le groupe multiplicatif des éléments de norme 1 " du corps de (L/K)-quaternions dont le L-espace vectoriel sous-jacent est L^2, avec la multiplication

$(a,b).(a',b') = (aa'+ub\sigma b', ab'+a'b)$ et la norme $N(a,b) = a\sigma a - ub\sigma b \in K$.

3.2.7 Reprenons les hypothèses de 3.2.5. Soit M une extension algébrique de K contenant L, identifions $\mathcal{G} \otimes L$ à $\mathfrak{sl}_{2,L}$ comme en 3.2.6, alors l'immeuble $I_M(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$ sur M s'identifie à $I_M(\mathfrak{sl}_2)$, (et ceci fonctoriellement en M, cf. 2.5.2 b). Le groupe $\mathrm{Aut}(M/K)$ des automorphismes de M/K agit sur $I_M(\mathcal{G})$, donc sur $I_M(\mathfrak{sl}_2)$. Soit $e = (e_1, e_2)$ la base canonique de L^2, comme le tore associé $\mathcal{T}_e$ de $\mathfrak{sl}(L^2)$ est identifié au tore K-défini $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$, tout automorphisme τ de M/K agit sur I en stabilisant $A_{\mathcal{T}_e} \simeq \mathbb{R}$.

<u>Proposition</u> : <u>L'endomorphisme</u> τ <u>de</u> $\mathbb{R}$ <u>est</u> :

- <u>l'identité si</u> $\tau_{|L} = 1$,
- <u>la symétrie par rapport au point</u> $\frac{\omega(u)}{2}$ <u>si</u> $\tau_{|L} \neq 1$.

<u>Démonstration</u> : Pour $y \in K$, l'élément $n = \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(L) \simeq \mathcal{G}(L)$ induit sur $\mathbb{R} \simeq A_{\mathcal{T}_e}$, la réflexion par rapport au point $-\omega(y)$, (cf. 3.1.7 1)) et $\tau^*n = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{y^{-1}}{u} \\ uy & 0 \end{pmatrix}$ si $\tau_{|L} \neq 1$, (resp. $\tau^*n = \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ si $\tau_{|L} = 1$), induit sur $\mathbb{R}$ la réflexion par rapport à $-\omega(\frac{-y^{-1}}{u}) = \omega(u) + \omega(y)$, (resp. $-\omega(y)$). On doit donc avoir $\tau(-\omega(y)) = \omega(u) + \omega(y)$, (resp. $\tau(-\omega(y)) = -\omega(y)$), et l'application proposée est la seule isométrie compatible avec ces résultats.

3.2.8 <u>Paramétrage de l'immeuble</u> : 1) Il existe une base canonique e dans K^2, donc un tore canonique $\mathcal{T}_e$ de $\mathfrak{sl}_{2,K}$, et une identification canonique de l'appartement $A_{\mathcal{T}_e}$ de $I_K(\mathfrak{sl}_2)$ avec $\mathbb{R}$.

a) On note $[\infty]$, (resp. $[0]$), le germe de la demi-droite $]-\infty, 0]$, (resp. $[0, +\infty[$), de $\mathbb{R} \simeq A_{\mathcal{T}_e} \subset I_K(\mathfrak{sl}_2)$, et, $\forall\, y \in K$, $[y]$ le germe de demi-droite $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}.[0]$. On obtient ainsi une bijection de $K \cup \{\infty\}$ sur l'ensemble des germes de demi-droite de $I_K(\mathcal{S}\ell_2)$:

En effet le fixateur de $[0]$ dans $\mathcal{U}_{-a}(K) = \{\begin{pmatrix}1&0\\y&1\end{pmatrix}\}$, est réduit à $\{1\}$; de plus pour tout germe de demi-droite $\mathcal{D}$ différent de $[\infty]$ il existe un appartement A contenant $[\infty]$ et $\mathcal{D}$, donc un élément $g = \begin{pmatrix}1&0\\y&1\end{pmatrix}$ de la partie unipotente $\mathcal{U}_{-a}(K)$ du fixateur de $[\infty]$ tel que $A = g.A_{\mathcal{C}_e}$, (1.1.9 2b) ; on en déduit que $\mathcal{D} = g.[0] = [y]$.

b) Pour $y \in K$ et $\lambda \in \mathbb{R} \simeq A_{\mathcal{C}_e}$, on note (y,λ) le point $\begin{pmatrix}1&0\\y&1\end{pmatrix}.\lambda$ de $I_K(\mathcal{S}\ell_2)$. On obtient ainsi tous les points de $I_K(\mathcal{S}\ell_2)$; de plus on a $(y,\lambda) = (y',\lambda')$, si et seulement si $\lambda = \lambda'$ et $\omega(y'-y) \geqslant \lambda$:

En effet si P est un point de $I_K(\mathcal{G})$ il existe un appartement A contenant P et $[\infty]$, on a $A = \begin{pmatrix}1&0\\y&1\end{pmatrix}.A_{\mathcal{C}_e}$ pour $y \in K$, et il existe $\lambda \in \mathbb{R} \simeq A_{\mathcal{C}_e}$ tel que $P = \begin{pmatrix}1&0\\y&1\end{pmatrix}.\lambda = (y,\lambda)$. L'élément y est déterminé modulo le fixateur, dans $\mathcal{U}_{-a}(K)$, de $\lambda \cup [\infty] \subset A_{\mathcal{C}_e}$, qui est d'après 3.1.7 2 $\{\begin{pmatrix}1&0\\y&1\end{pmatrix}/\omega(y) \geqslant \lambda\}$, et le nombre λ est bien déterminé pour des raisons de distance aux points d'un raccourci de $]-\infty,0] \subset A_{\mathcal{C}_e}$.

c) Les deux notations introduites ci-dessus sont fonctorielles : si L est une extension algébrique de K, $I_K(\mathcal{S}\ell_2)$ est canoniquement plongé dans $I_L(\mathcal{S}\ell_2)$, et l'on a pour $y \in L$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$[y]$ est un germe de demi-droite de I_K si et seulement si $y \in K$;

$(y,\lambda) \in I_K(\mathcal{G})$ si et seulement si il existe $y' \in K$ tel que $\omega(y-y') \geqslant \lambda$, (i.e. $(y,\lambda) = (y',\lambda)$).

2) Si $\mathcal{G}$ est une K-forme de $\mathcal{S}\ell_2$ et L une extension algébrique qui déploie $\mathcal{G}$, on peut choisir une identification de $\mathcal{G} \otimes L$ avec $\mathcal{S}\ell_{2,L}$; on obtient alors des paramétrages de $I_{L'}(\mathcal{G})$ pour L', extension algébrique de L ; ces paramétrages sont dits définis sur L.

3.2.9 Reprenons les hypothèses de 3.2.5 et choisissons une identification de $\mathcal{G} \otimes L$ avec $\mathcal{S}\ell_{2,L}$, on a alors des paramétrages, (définis sur L), des immeubles $I_M(\mathcal{G})$ pour M extension algébrique de L.

<u>Proposition</u> : <u>L'action de</u> $\tau \in \mathrm{Aut}(M/K)$ <u>sur</u> $I_M(\mathcal{G})$ <u>est donnée par</u> :

1) $\tau((y,\lambda)) = (\tau y,\lambda)$ <u>si</u> $\tau_{|L} = 1$,

2) $\tau((0,\lambda)) = (0,\omega(u)-\lambda)$ <u>si</u> $\tau_{|L} \neq 1$,

3) $\tau((y,\lambda)) = (\frac{u}{\tau y}, \lambda+\omega(u)-2\omega(y))$ <u>si</u> $\tau_{|L} \neq 1$ <u>et</u> $\omega(y) \leqslant \lambda$.

<u>Démonstration</u> : D'après la proposition 3.2.7 on a aussitôt 2) et de plus $\tau((y,\lambda)) = \tau(\begin{pmatrix}1&0\\y&1\end{pmatrix}.\lambda) = \tau\begin{pmatrix}1&0\\y&1\end{pmatrix}.\lambda = \begin{pmatrix}1&0\\\tau y&1\end{pmatrix}\lambda = (\tau y,\lambda)$ si $\tau_{|L} = 1$, d'où 1). Pour démontrer 3), on notera les points de I par des représentants de leur classe d'équivalence et on indiquera à droite des calculs la matrice qui montre l'équivalence.

$$\begin{aligned}
\tau((y,\lambda)) &= \tau(\begin{pmatrix}1&0\\y&1\end{pmatrix}.(e_1,e_2;\lambda,0)) = \tau(\begin{pmatrix}1&0\\y&1\end{pmatrix}).\tau(e_1,e_2;\lambda,0)\\
&= \begin{pmatrix}1&\frac{\tau y}{u}\\0&1\end{pmatrix}.(e_1,e_2;\omega(u)-\lambda,0) = (e_1,e_2+\frac{\tau y}{u}e_1;\omega(u)-\lambda,0)\\
&\sim (e_1,e_1+\frac{u}{\tau y}e_2;\omega(u)-\lambda,\omega(\frac{u}{\tau y})) && \begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{u}{\tau y}\end{pmatrix} \text{ car } y \neq 0\\
&\sim (-\frac{u}{\tau y}e_2,e_1+\frac{u}{\tau y}e_2;\omega(u)-\lambda,\omega(\frac{u}{\tau y})) && \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix} \text{ car } \omega(u)-\lambda \leqslant \omega(\frac{u}{\tau y})\\
&\sim (e_1+\frac{u}{\tau y}e_2,e_2;\omega(\frac{u}{\tau y}),\omega(u)-\lambda-\omega(\frac{u}{\tau y})) && \begin{pmatrix}0&1\\-\frac{\tau y}{u}&0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&0\\\frac{u}{\tau y}&1\end{pmatrix}(e_1,e_2;\omega(u)-\omega(\tau y),-\lambda+\omega(\tau y)) = (\frac{u}{\tau y},\lambda+\omega(u)-2\omega(y)).
\end{aligned}$$

<u>Corollaire</u> 3.2.10 : <u>Supposons de plus</u> L/K <u>de degré</u> 2, <u>de groupe de Galois</u> $\{1,\sigma\}$.

1) $I_L(\mathcal{G})^\sigma$ <u>est constitué des points</u> (y,λ) <u>avec</u> :

$\omega(u) = 2\,\omega(y)$; $\lambda-\omega(y) \geqslant 0$; $\omega(u-y.\sigma y) \geqslant \omega(u)+(\lambda-\omega(y))$.

2) $I_L(\mathfrak{g})^\sigma$ <u>est réduit à un point si et seulement si, quel que soit</u> $y \in L$, <u>on a</u> $\omega(u-Ny) \leqslant \omega(u)$.

3) $\mathfrak{g}$ <u>est déployé sur</u> K <u>si et seulement si il existe</u> $y \in L$ <u>tel que</u> $u = y.\sigma y$.

4) <u>Si</u> $\mathfrak{g}$ <u>est déployé sur</u> K <u>et si l'extension</u> M/K <u>est galoisienne, il existe un plongement galoisien de</u> $I_K(\mathfrak{g})$ <u>dans</u> $I_M(\mathfrak{g})$ <u>et les germes de demi-droites de</u> $I_K(\mathfrak{g})$ <u>sont les germes de demi-droites de</u> $I_M(\mathfrak{g})$ <u>fixes par</u> $\mathrm{Gal}(M/K)$.

<u>Démonstration</u> : Un calcul simple fournit la première assertion et la seconde en découle, ainsi que la troisième vu 3.2.4. Si $\mathfrak{g}$ est déployé sur K , l'existence du plongement est prouvée en 2.5.2 b ; pour le calcul restant, on peut choisir un paramétrage défini sur K , (i.e. supposer $L = K$). Mais alors $\tau([y]) = [\tau y]$, pour $\tau \in \mathrm{Gal}(M/K)$, et l'assertion 4) est évidente puisque M/K est galoisienne.

§3 <u>Sauvagerie d'une extension.</u>

Le corps K est supposé hensélien pour une valuation réelle non triviale ω ; pour toute extension algébrique de K il existe donc un unique prolongement, encore noté ω , de la valuation de K , (annexe A_2).

L'ensemble ordonné $\tilde{\mathbb{R}}$ a été défini en 1.1.12.

<u>Définition</u> 3.3.1 : On appelle <u>sauvagerie</u> d'une extension galoisienne finie L/K , le nombre de $\tilde{\mathbb{R}}$ défini par :

$$s(L/K) = \operatorname*{Inf}_{x \in L^*} \left(\omega\left(\frac{T_{L/K}(x)}{x}\right)\right)$$

où $T = T_{L/K}$ désigne l'application trace de L dans K .

<u>Remarques</u> : a) Dire que $s(L/K)$ appartient à $\mathbb{R}$ revient à affirmer qu'il existe x dans L^* tel que $s(L/K) = \omega(\frac{T(x)}{x})$. C'est le cas le plus fréquent (cf 3.3.2 c)), on verra cependant au paragraphe 5 un exemple de sauvagerie non réelle : 0^+ .

$$c)\ -s(L/K) = \operatorname*{Max}_{x \in L^*}\left\{\omega\left(\frac{x}{T(x)}\right) \Big/ \begin{matrix} x \in L \\ T(x) \neq 0 \end{matrix}\right\} = \operatorname{Max}\{\omega(y) \,/\, y \in L \ \ T(y) = 1\}$$

b) On va voir que la sauvagerie de L/K est la "partie sauvage" de la valuation de la différente.

<u>Proposition</u> 3.3.2 : <u>Notons</u> $n(L/K)$, $f(L/K)$, $e(L/K)$ <u>les degré, degré résiduel, indice de ramification de l'extension. Alors</u> :

a) $0 \leqslant s(L/K) < +\infty$ <u>et</u> $s(L/K) \leqslant \omega(n(L/K))$.

b) $s(L/K) = 0$ <u>si et seulement si l'extension</u> L/K <u>est modérément ramifiée.</u>

c) $s(L/K)$ <u>appartient à</u> $\mathbb{R}$ <u>dès que l'on a la relation</u> : $n(L/K) = e(L/K).f(L/K)$. <u>C'est en particulier vrai pour une valuation discrète.</u>

d) <u>Si l'on a trois extensions galoisiennes finies</u> L/K , M/L <u>et</u> M/K ,

<u>alors</u> : $s(M/K) = s(M/L) + s(L/K)$.

<u>Démonstration</u> : Soit Γ le groupe de Galois de L/K .

a) Si $x \in L^*$, on a $\frac{T(x)}{x} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{\gamma(x)}{x}$; mais, comme la valuation est invariante par Γ , il vient $\omega(\frac{T(x)}{x}) \geqslant 0$. Comme L/K est séparable, il existe x dans L tel que $T(x) \neq 0$, donc $s(L/K) \leqslant \omega(\frac{T(x)}{x}) < +\infty$. Enfin si $x \in K^*$, $\omega(\frac{T(x)}{x}) = \omega(n(L/K))$.

b) Supposons la sauvagerie nulle, il existe alors x dans L^* tel que $\omega(\frac{Tx}{x}) = 0$. Si $y = \frac{x}{Tx}$, on a $\omega(y) = 0$ et $T(y) = 1$. Soient k , ℓ les corps résiduels de K et L , ℓ_s la clôture séparable de k dans ℓ , de degré f_s sur k , et $\tilde{y}$ l'image de y dans ℓ . On sait que $\frac{n}{e.f}$ et $\frac{f}{f_s}$ sont des entiers puissances de l'exposant caractéristique de k ([4 ; §8 exercice 9]), et Γ n'agit sur ℓ que par un quotient Γ' de cardinal f_s . Ainsi on a dans k :

$1 = (\sum_{\gamma \in \Gamma'} \gamma.\tilde{y}).\frac{n}{e.f}.\frac{f}{f_s}.e$.

On en déduit $n = e.f$, $f = f_s$ et e premier à la caractéristique résiduelle : l'extension L/K est modérément ramifiée.

Réciproquement supposons L/K modérément ramifiée. Soit L_1 l'extension non ramifiée maximale de K dans L , son corps résiduel est isomorphe à ℓ ; si $\tilde{x} \in \ell$ est tel que $T_{\ell/k}(\tilde{x}) \neq 0$, relevons $\tilde{x}$ en un élément x de L_1 . On a alors $T_{L/K}(x) = n(L/L_1).T_{L_1/K}(x)$, donc $\omega(\frac{T_{L/K}(x)}{x}) = \omega(T_{L/K}(x)) = \omega(T_{L_1/K}(x)) = 0$, puisque $n(L/L_1)$ est premier à la caractéristique résiduelle.

c) Comme, par hypothèse, on a $n = e.f$, il existe une base de L sur K formée d'éléments entiers et de la forme : $\{x_i.y_j / i = 1,..,f \; ; \; j = 1,2,..,e\}$ où les $\tilde{x}_i$ forment une base de ℓ/k et où les $\omega(y_j)$ sont 2 à 2 distincts modulo

$\omega(K^*)$, ([4 ; §8 n°1 Lemme 2]).

Tout x de L s'écrit : $x = \sum_{i,j} \lambda_{i,j}.x_i y_j$ avec des $\lambda_{i,j}$ dans K et on a : $\omega(x) = \operatorname{Inf}_{i,j} (\omega(y_j) + \omega(\lambda_{i,j}))$.

Alors : $T(x) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} \, T(x_i y_j)$

$\omega(T(x)) \geqslant \operatorname{Inf}_{i,j}(\omega(\lambda_{i,j}) + \omega(T(x_i y_j))) = \omega(\lambda_{i_o,j_o}) + \omega(T(x_{i_o}.y_{j_o}))$

pour des indices i_o et j_o bien choisis.

$\omega(\frac{Tx}{x}) \geqslant \omega(\lambda_{i_o,j_o}) + \omega(T(x_{i_o}.y_{j_o})) - [\omega(y_{j_o}) + \omega(\lambda_{i_o,j_o})] = \omega(\frac{T(x_{i_o}.y_{j_o})}{x_{i_o}.y_{j_o}})$.

Ainsi le minimum de $\omega(\frac{Tx}{x})$ est ~~à chercher parmi n valeurs, il est donc~~ atteint et la sauvagerie est réelle.

d) On sait que $T_{M/K} = T_{L/K} \circ T_{M/L}$. Donc si x dans M^* est tel que $T_{M/K}(x) \neq 0$ alors $T_{M/L}(x) \neq 0$ et, $\forall \lambda \in L^*$, on peut écrire :

$$\frac{T_{M/K}(\lambda x)}{\lambda x} = \frac{T_{L/K}(\lambda.T_{M/L}(x))}{\lambda.T_{M/L}(x)}.\frac{T_{M/L}(x)}{x} ,$$

ce qui prouve que $s(M/K) \geqslant s(M/L) + s(L/K)$. Mais, quand λ varie dans L^* , $\lambda.T_{M/L}(x)$ décrit L^* , on a donc : $s(M/K) \leqslant s(M/L) + \omega(\frac{T_{M/L}(x)}{x})$, d'où, en faisant varier x ,

$$s(M/K) \leqslant s(M/L) + s(L/K) .$$

3.3.3 <u>Lien avec les groupes de ramification</u> : Supposons la valuation ω discrète, normalisée pour L (i.e. $\omega(L^*) = \mathbb{Z}$) , et l'extension résiduelle ℓ/k , de l'extension galoisienne finie L/K , séparable.

Soit G le groupe de Galois de L/K , pour i entier $\geqslant -1$, on définit des sous-groupe distingués de G :

$$G_i = \{s \in G / \omega(s(x) - x) \geqslant i+1 \quad \forall x \in \mathcal{O}_L\}$$

où $\mathcal{O}_L$ désigne l'anneau des entiers de L. On notera g_i le nombre d'éléments du groupe G_i ; pour i grand on a $g_i = 1$, (cf. [23 ; p. 70]).

Proposition : $s(L/K) = \sum_{i=1}^{\infty} (g_i - 1)$.

Remarque 1 : La valuation de la différente $\mathfrak{D}$ de l'extension est $d = \sum_{i=0}^{\infty} (g_i - 1)$, ([23 ; p. 72]). Comme l'extension est modérément ramifiée si et seulement si $g_1 = 1$, on peut dire, de manière imagée, que la sauvagerie est la partie sauvage de la valuation de la différente.

Démonstration (J.-P. Serre) : Soient e l'indice de ramification et d la valuation de la différente. Si $m \in \mathbb{N}$, la trace de l'idéal $\omega^{-1}([m,\infty])$ de $\mathcal{O}_L$ est, d'après [23 ; prop. 7 p. 60], dans l'idéal $K \cap \omega^{-1}([\cancel{m+d}\ n,\infty])$ de $\mathcal{O}_K$ si et seulement si $n \leq m+d$. Mais comme $\omega(K^*) = e\mathbb{Z}$, ce ~~dernier~~ idéal $Tr(\omega^{-1}([m,\infty]))$ est en fait $K \cap \omega^{-1}([e\{\frac{m+d}{e}\},\infty])$, si $\{x\}$ désigne la partie entière ~~supérieure~~ du nombre x. La sauvagerie est donc la borne inférieure de $e\{\frac{m+d}{e}\} - m$, quand m parcourt $\mathbb{N}$. C'est donc $d - (e-1) = \sum_{i=1}^{\infty} (g_i - 1)$ puisque $e = g_0$.

exercice : $-s(L/K) = \operatorname{Max}\{\omega(\lambda) / \lambda \in L\ (\text{ou } \mathbb{Z})\ T_{L/K}(\lambda) = 1\}$; dans $\operatorname{Max}\{\} = \operatorname{Max}\{m / \{\frac{m+d}{e}\} = 0\}$

Remarque 2 : La fonction φ qui fait passer de la numérotation inférieure à la numérotation supérieure des groupes de ramification ([23, p. 80]), est donnée pour $m \in \mathbb{N}$ par $\varphi(m) = \frac{1}{e}(\sum_{i=1}^{m} g_i)$; pour m assez grand on a donc $\varphi(m) = \theta_L(m) = \frac{m+s(L/K)}{e(L/K)}$. De plus on peut voir que φ est la fonction borne inférieure des fonctions $\theta_{K'}$, définies pour les sous-extensions galoisiennes K'/K de L/K, par : $\theta_{K'}(m) = \dfrac{m + \frac{s(K'/K)}{e(L/K')}}{e(K'/K)} = \frac{m}{e(K'/K)} + \frac{s(K'/K)}{e(L/K)}$. (On rappelle que $\omega(L^*) = \mathbb{Z}$, donc $\omega(K'^*) = e(L/K').\mathbb{Z}$).

Proposition 3.3.4 : Soient Γ le groupe de Galois et $N = N_{L/K}$ la norme de l'extension L/K.

a) Si U est un $(\Gamma,\mathcal{O}_L)$-module, alors $H^1(\Gamma,U)$ est un $\mathcal{O}_K$-module annulé par l'idéal $\omega^{-1}([s(L/K),\infty])$.

b) Supposons K complet. Si u dans K^*, a dans L^* et σ dans $\mathbb{R}$ sont tels que :

$$\omega(u-Na) > \omega(u) + 2\sigma \quad \text{et} \quad \sigma \geq s(L/K)$$

alors il existe a' dans L^* tel que :

$$u = Na' \quad \text{et} \quad \omega(a'-a) \geq \omega(a) + \omega(u-Na) - \omega(u) - \sigma > \omega(a) + \sigma .$$

Démonstration : a) Par hypothèse le groupe Γ agit sur U de manière que $\gamma(\lambda.u) = \gamma(\lambda).\gamma(u)$. Si (u_γ) est un 1-cocycle de Γ dans U et x un élément de $\mathcal{O}_L$, on sait que $T_{L/K}(x).(u_\gamma)$ est le cobord de $v = \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma(x).u_\gamma$; d'où le résultat.

b) Soit x dans L^* tel que $\omega(\frac{Tx}{x}) \leq \sigma$. Posons $\varepsilon = \omega(u-Na) - \omega(u) - 2\sigma > 0$. Il s'agit de trouver $a' \in L^*$ tel que $u = Na'$ et $\omega(a'-a) \geq \omega(a) + \sigma + \varepsilon$. Pour cela il suffit de construire, par récurrence, une suite a_n d'éléments de L, telle que :

$$\omega(u - Na_n) \geq \omega(u) + 2\sigma + 2^n\varepsilon$$

$$a_0 = a \quad ; \quad \omega(u) = \omega(Na_n)$$

$$\omega(a_n - a_{n-1}) \geq \omega(a) + \sigma + 2^{n-1}.\varepsilon \quad \text{pour } n \geq 1 .$$

Ces conditions sont vérifiées pour $n=0$; supposons les vérifiées pour n.

Posons : $h = \frac{x}{Tx}(\frac{u}{Na_n} - 1)$; $a_{n+1} = a_n(1+h)$.

Alors $\omega(h) = \omega(u - Na_n) - \omega(u) - \omega(\frac{Tx}{x}) \geq \sigma + 2^n\varepsilon$ et $Th = \frac{u}{Na_n} - 1$; donc :

$$N(a_{n+1}) - u = N(a_n)N(1+h) - u = N(a_n)(1+Th+b) - u = bN(a_n)$$

où b est une somme de produits d'au moins deux facteurs pris parmi les conjugués de h, donc $\omega(b) \geqslant 2\omega(h)$. Ainsi :

$$\omega(N(a_{n+1})-u) \geqslant \omega(u) + 2\omega(h) \geqslant \omega(u) + 2\sigma + 2^{n+1}.\varepsilon$$

et $\omega(a_{n+1}-a_n) = \omega(ha_n) = \omega(a) + \omega(h) \geqslant \omega(a) + \sigma + 2^n.\varepsilon$.

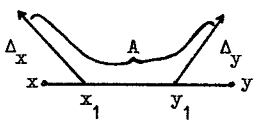
Remarque 3.3.5 : Si U est égal à $\mathcal{O}_L$, si ω est discrète et si le corps résiduel est parfait de caractéristique p, on trouve des résultats plus précis dans [22] ; en particulier $H^1(\Gamma,\mathcal{O}_L)$ est annulé par $p^{\frac{1}{p-1}}$. Cependant le résultat, immédiat, donné ici, semble peu améliorable pour tout $(\Gamma,\mathcal{O}_L)$-module.

Le résultat de la proposition sur le H^1 sera utilisé au chapitre IV pour généraliser la proposition suivante, démontrée grâce au résultat sur les normes.

Proposition 3.3.6 : "Lemme de redressement pour les formes de $\mathfrak{sl}_2$" : Soient K un corps complet pour une valuation réelle non triviale, $\mathcal{G}$ une K-forme de $\mathfrak{sl}_2$, L/K une extension galoisienne, de degré 1 ou 2 et de groupe de Galois Γ, qui déploie $\mathcal{G}$, et σ un nombre réel supérieur ou égal à $s(L/K)$.

Si x et y sont deux points de $I_L(\mathcal{G})$, fixes par Γ et à une distance, pour la métrique normalisée, strictement supérieure à 2σ, alors il existe sur le segment $[x,y]$ des points x_1 et y_1 à distance au plus σ de x et y respectivement, et un appartement A de $I_L(\mathcal{G})$ fixe par Γ contenant x_1 et y_1. En particulier $\mathcal{G}$ est déployé sur K.

Démonstration :



Si $L=K$, la proposition est évidente, supposons donc L/K quadratique. Considérons un appartement A_1 contenant x et y, il y a alors trois cas :

a) Si A_1 est fixe par Γ, le résultat est évident (3.2.4).

b) Si A_1^Γ est une demi-droite Δ on peut la supposer d'origine x ; $\mathcal{G}$ est déployé sur K (3.2.4). Il existe une demi-droite Δ' contenue dans Δ qui est dans $I_K(\mathcal{G})$ (3.2.10 4)), alors $\mathcal{G}(K)$ contient un élément g qui induit une symétrie, par rapport à un point $z \in \Delta'$, d'un appartement A_1' de $I_K(\mathcal{G})$ contenant Δ'. On peut supposer $y \in [z,x]$. Soit Δ'' la demi-droite de A_1 d'origine z et contenant x. La réunion de Δ'' et $g\Delta''$ est un appartement A_1'' de $I_L(\mathcal{G})$ et $(A_1'')^\Gamma$ est le segment $[x,gx]$ qui contient y. On est donc ramené au troisième cas :

c) A_1^Γ est un segment et on peut supposer que c'est le segment $[x,y]$. Il s'agit de trouver des demi-droites Δ_x et Δ_y, fixes par Γ, d'origines respectives x_1 et y_1 comme dans l'énoncé et ne rencontrant $[x_1,y_1]$ qu'en x_1 ou y_1 : alors l'appartement A réunion de Δ_x, $[x_1,y_1]$ et Δ_y répondra aux exigences de l'énoncé.

Construisons par exemple Δ_y. Soient Δ la demi-droite de A_1 d'origine x, ne contenant pas y et γ l'automorphisme non trivial de L/K ; par hypothèse $\Delta \cap \gamma\Delta = \{x\}$, donc $A_2 = \Delta \cup \gamma\Delta$ est un appartement de $I_L(\mathcal{G})$ sur lequel γ induit la symétrie par rapport à x. Cet appartement correspond donc à un tore maximal $\mathcal{T}$ L-déployé, K-défini et K-anisotrope. Le paragraphe 2 nous fournit alors un élément u de K^* et un système de notations pour les points de $I_L(\mathcal{G})$: x est le point $(0, \frac{\omega(u)}{2})$. Posons $y = (a,\lambda)$; comme $\gamma y = y$, on a (3.2.10 1)) : $\lambda \geqslant \omega(a) = \frac{\omega(u)}{2}$ et $\omega(u-Na) \geqslant \omega(u) + \lambda - \omega(a)$. Mais $x = (0,\omega(a)) = (a,\omega(a))$; la distance de x et y est donc $\lambda - \omega(a) > 2\sigma$. D'après la proposition 3.3.4 b) il existe a' dans L tel que $u = Na'$ et $\omega(a'-a) \geqslant \lambda-\sigma$. Alors la demi-droite Δ_y formée des points (a',λ') pour $\lambda' \geqslant \lambda-\sigma$ est fixe par Γ, son origine $y_1 = (a',\lambda-\sigma) = (a,\lambda-\sigma)$ est sur $[x,y]$ à distance σ de y et $[x,y_1] \cap \Delta_y$ est réduit à y ; C.Q.F.D.

Corollaire 3.3.7 : Soient K un corps complet, $\mathcal{G}$ une K-forme anisotrope de $\mathfrak{sl}_2$ et L/K une extension galoisienne, de degré 2 et de groupe de Galois Γ, qui déploie $\mathcal{G}$, alors $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ est de diamètre au plus $2.s(L/K)$. De plus $\mathcal{G}$ a un immeuble sur K, réduit à un point.

Démonstration : La première assertion est une conséquence immédiate de la proposition. La seconde en résulte compte tenu de 2.1.16 c), 2.2.11 et 2.2.14 a), puisque $\mathcal{G}(K)$ agit sur $I_L(\mathcal{G})$ et stabilise $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ non vide d'après 2.4.17.

Proposition 3.3.8 : Soient K un corps complet, $\mathcal{G}$ une K-forme de $\mathfrak{sl}_2$ et L/K une extension galoisienne, de degré $\leqslant 2$ et de groupe de Galois Γ, qui déploie $\mathcal{G}$.

a) Si $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ est de diamètre supérieur ou égal à $2.s(L/K)$, alors $\mathcal{G}$ se déploie sur une extension galoisienne non ramifiée de degré 1 ou 2 de K.

b) Si $\mathcal{G}$ se déploie sur une extension galoisienne non ramifiée K' de degré 1 ou 2 de K, alors il existe un plongement galoisien de $I_K(\mathcal{G})$ dans $I_L(\mathcal{G})$ et $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ est l'ensemble des points de $I_L(\mathcal{G})$ à distance au plus $s(L/K)$ de l'image de $I_K(\mathcal{G})$.

Démonstration : Si $L = K$ la proposition est évidente, supposons donc l'extension L/K quadratique.

1) Si $\mathcal{G}$ est déployé sur K, $I_K(\mathcal{G})$ se plonge dans $I_L(\mathcal{G})$ et $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ est contenu dans l'ensemble $I^s_{L/K}$ des points de $I_L(\mathcal{G})$ à distance au plus $s(L/K)$ de l'image de $I_K(\mathcal{G})$, (3.3.6 et 2.5.2 a)). Réciproquement, si $x \in I^s_{L/K}$, x est adhérent à l'ensemble des points z dont la distance à l'image d'un point de $I_K(\mathcal{G})$ est $\leqslant s(L/K)$; pour montrer que le point x est fixe par Γ, il suffit de le montrer pour un tel point z. On peut trouver un paramétrage défini sur K, de $I_L(\mathcal{G})$ tel que z soit représenté par un couple (y,λ) tel qu'il existe $y' \in K$ avec $\omega(y'-y) + s(L/K) \geqslant \lambda$, (3.2.8). Si σ est l'automorphisme non trivial de L/K, on a $\sigma z = (\sigma y,\lambda)$ et $\sigma y - y = T(y-y') - 2(y-y')$, (3.2.9) ; mais, par définition, $\omega(T(y-y')) \geqslant \omega(y'-y) + s(L/K) \geqslant \lambda$, et d'après 3.3.2 a, $\omega(2(y-y')) \geqslant \omega(2) + \omega(y-y') \geqslant \omega(y'-y) + s(L/K) \geqslant \lambda$; ainsi z est fixe par Γ et on a démontré la proposition dans ce cas particulier.

2) Supposons dorénavant $\mathcal{G}$ anisotrope sur K.

a) Supposons $\mathrm{diam}(I_L(\mathcal{G})^\Gamma) \geqslant 2s(L/K)$ et montrons que $\mathcal{G}$ se déploie sur une extension galoisienne non ramifiée de degré 2. D'après 3.3.6 on a $\mathrm{diam}(I_L(\mathcal{G})^\Gamma) = 2s(L/K) \in \mathbb{R}$. D'après la démonstration de 3.3.6, on a un élément u de K et un élément a de L tels que : $\omega(u-Na) = \omega(u) + 2.s(L/K)$; et il suffit de trouver une extension galoisienne non ramifiée de degré 2, K'/K et un élément a' de l'extension composée LK' tels que $u = N_{LK'/K'}(a')$. On peut supposer $a = 1$ et $\omega(u) = 0$. Soit $x \in L$ tel que $\omega(\frac{Tx}{x}) = s(L/K)$, on a alors $u = 1+b\,(\frac{Tx}{x})^2$ avec $\omega(b) = 0$. Cherchons a' de la forme $a' = 1 + (\frac{Tx}{x})y$ avec $y \in K'$; on doit avoir $1+b\,(\frac{Tx}{x})^2 = N(a') = 1+y\,T(\frac{Tx}{x}) + y^2\,N(\frac{Tx}{x})$. Mais l'extension étant de degré 2 on a $T(\frac{Tx}{x}) = \frac{(Tx)^2}{Nx} = N(\frac{Tx}{x})$; l'équation est donc : $y^2+y = b\,\frac{Nx}{x^2}$, elle détermine bien une extension non ramifiée de K.

b) Si $\mathcal{G}$ se déploie sur une extension galoisienne non ramifiée K' de degré 2, soit σ l'automorphisme non trivial de LK'/K'. On verra[1] en (5.1.2) qu'il existe des plongements galoisiens de I_K dans $I_{K'}$ et I_L, de $I_{K'}$ et I_L dans $I_{LK'}$ tels que l'image du point qu'est I_K soit la même dans $I_{LK'}$ par les deux plongements composés possibles. Mais d'après (2.5.5) $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ est l'intersection avec I_L de $I_{LK'}(\mathcal{G})^\sigma$. D'après la première partie appliquée à K' et LK', $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ contient l'ensemble des points de $I_L(\mathcal{G})$ dont la distance à $I_K(\mathcal{G})$ est au plus $s(LK'/K') = s(L/K)$. Le corollaire 3.3.7 montre alors que $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ est égal à cet ensemble.

(1) Cette proposition ne sera pas utilisée dans la suite.

§4 Formes de $\mathfrak{sl}_2$ en valuation discrète.

On suppose K hensélien, et, à partir de 3.4.4, K complet et ω discrète.

3.4.1 On a obtenu au chapitre II, deux théorèmes de descente des immeubles, (c'est-à-dire des théorèmes qui disent que, si un groupe réductif $\mathcal{G}$ a un immeuble sur une extension L de K, il en a un sur K), à savoir :

- Si l'extension L/K est telle que $\mathcal{G}$ ait même rang relatif sur K et L. 2.3.1

- Si l'extension L/K est galoisienne finie de groupe de Galois Γ et si $I_L(\mathcal{Z}'(\mathcal{S}))^\Gamma$ est réduit à un point, pour un tore K-déployé maximal $\mathcal{S}$. 2.5.6

On peut se demander si ces deux théorèmes suffisent à prouver la conjecture de F. Bruhat et J. Tits, (2.2.15) ; par récurrence sur le rang absolu du groupe dérivé du centralisateur d'un tore déployé maximal, on se ramène à prouver l'assertion suivante :

3.4.2 "Si $\mathcal{G}$ est un groupe semi-simple anisotrope sur K, il existe une extension valuée K' de K sur laquelle $\mathcal{G}$ est anisotrope et une extension galoisienne finie L/K' de groupe de Galois Γ, sur laquelle $\mathcal{G}$ n'est plus anisotrope, mais telle que $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ soit réduit à un point."

3.4.3 A partir du numéro 3.4.4 nous allons démontrer cette dernière assertion dans le cas d'une valuation discrète, et d'un groupe semi-simple de rang absolu un.

On en déduit donc l'existence d'immeubles, en valuation discrète, pour tout groupe réductif $\mathcal{G}$ tel que, si $\mathcal{S}$ est un tore K-déployé maximal de $\mathcal{G}$, $\mathcal{Z}'(\mathcal{S})$ soit de rang absolu un.

Malheureusement il y a peu de tels groupes ; d'après [27], dont on reprend les notations, on obtient les groupes semi-simples ${}^2A^{(1)}_{2r+1,r}$ et $B_{n,n-1}$ pour $r,n \in \mathbb{N}$, ainsi que les groupes anisotropes de rang un. De plus tous ces groupes sont des groupes classiques, l'existence de leur immeuble a donc été déjà démontrée ([30]).

Cependant cette démonstration va nous conduire à un contre-exemple concernant la fonctorialité de l'immeuble ; c'est la raison de sa présence ici.

3.4.4 Donnons-nous donc un groupe semi-simple $\mathcal{G}$ de rang (absolu) 1 et anisotrope sur K, et supposons la valuation ω de K discrète. Soit π une uniformisante, on suppose, pour simplifier, $\omega(\pi) = 1$.

On peut supposer que K est complet (2.4.7 g) et (d'après l'invariance de l'immeuble par les isogénies centrales) que $\mathcal{G}$ est une K-forme anisotrope de $\mathfrak{sl}_2$.

Alors $\mathcal{G}$ se déploie sur une extension galoisienne de degré 2 et d'après le corollaire 3.3.7, $\mathcal{G}$ vérifie l'assertion 3.4.2 si la caractéristique résiduelle n'est pas 2. Si k est le corps résiduel on suppose donc dorénavant $\mathrm{car}(k) = 2$.

Proposition 3.4.5 : Il existe une extension finie K' de K telle que $\mathcal{G}$ soit anisotrope sur K' et une extension L/K' galoisienne, déployant $\mathcal{G}$, qui est de l'un des deux types suivants :

a) non ramifiée

b) extension quadratique avec extension résiduelle radicielle de degré 2, plus précisément :

$$L = K'[y]/(y^2-\pi y+x) \quad \text{avec} \quad \omega(x) = 0 \quad \text{et} \quad x \quad \text{non carré modulo} \quad \pi .$$

Démonstration : Soient K_s la clôture séparable et K_o l'extension non ramifiée maximale de K. Définissons, par récurrence, une suite de sous-corps K_i de K_s : le corps K_{i+1} est obtenu en ajoutant à K_i les solutions des équations $Y^2-\pi Y+x = 0$ pour x décrivant un système de représentants dans $\mathcal{O}^*_{K_i}$ de k_i/k_i^2, si k_i est le corps résiduel de K_i. La réunion K_∞ des K_i est un corps hensélien, à valuation discrète à corps résiduel algébriquement clos ; son complété $\hat{K}_\infty$ est donc quasi-algébriquement clos (LANG [19]) et $\mathcal{G}$ se quasi-déploie, c'est-à-dire se déploie, sur $\hat{K}_\infty$ ([26] et [24]). Donc $\mathcal{G}$ est déployé sur K_∞ (2.3.9) et sur une sous-extension finie L_1. Soit L_2 l'extension non ramifiée maximale contenue dans L_1 ; si $\mathcal{G}$ est déployé sur L_2, on est dans le cas a) ($K' = K$, L = l'extension non ramifiée galoisienne engendrée par L_2), sinon L_1 peut être obtenu, quitte à l'augmenter, comme réunion d'une suite d'extensions du type b), d'où le résultat.

3.4.6 Si dans la proposition ci-dessus, l'extension L/K' est du type a), l'assertion 3.4.2 résulte du corollaire 3.3.7.

Il nous reste donc à considérer le cas d'une K-forme anisotrope $\mathcal{G}$ de $\mathfrak{sl}_2$, qui se déploie sur une extension galoisienne L/K, de groupe de Galois Γ, de la forme $L = K[y]/(y^2-\pi y+x)$ où x est une unité dont l'image $\tilde{x}$ dans le corps résiduel n'est pas un carré.

On note N la norme et T la trace de l'extension L/K. Cette extension est sauvagement ramifiée (bien que d'indice de ramification 1 !), sa sauvagerie est donc au moins 1 ; par ailleurs $\omega(Ty/y) = 1$, donc $s(L/K) = 1$.

Si $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ est réduit à un point, l'assertion 3.4.2 est bien vraie. Supposons donc le contraire ; on sait d'après le paragraphe 2 que $\mathcal{G}$ est construit à partir d'un élément u de K^* tel qu'il existe a dans L^* avec $\omega(u-Na) > 2\omega(a)$.

Comme u est déterminé à une norme près, on peut supposer $u = Ny(1+\varepsilon) = x(1+\varepsilon)$ avec $\varepsilon \in K$, $\omega(\varepsilon) \geqslant 1$. Mais le diamètre de $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ est supérieur ou égal à $\omega(\varepsilon)$ (3.2.10 1)), donc si $\omega(\varepsilon) \geqslant 2$ $\mathcal{G}$ se déploie sur une extension non ramifiée de degré 2 et $\mathcal{G}$ vérifie l'assertion 3.4.2 (cf. 3.3.8 et 3.3.7), on peut donc supposer $\omega(\varepsilon) = 1$.

Nous allons, dans les numéros qui suivent, développer ce dernier cas, pour achever la démonstration, et surtout expliquer le contre-exemple annoncé en 3.4.3. Notons qu'il existe un modèle de $\mathfrak{sl}_2$ vérifiant les conditions exigées dans ce numéro (et les suivants) sur tout corps K complet pour une valuation discrète, à corps résiduel non parfait de caractéristique 2.

3.4.7 Cherchons les extensions L'/K finies, déployant $\mathcal{G}$, à extension résiduelle séparable. Une telle extension est linéairement disjointe de L/K, ainsi l'extension LL'/L' a un groupe de Galois isomorphe à Γ ; on note σ l'automorphisme non trivial, N et T les normes et traces de LL'/L', (on étend ainsi la définition de N et T donnée en 3.4.6). Le groupe $\mathcal{G}$ est déployé sur L', si et seulement si il existe une demi-droite de $I_{LL'}(\mathcal{G})$ fixe par Γ (3.2.4), c'est-à-dire s'il existe z dans LL' tel que $Nz = u = x(1+\varepsilon)$ (cf. 3.2.9).

Dans la suite, le paramétrage de $I_{LL'}(\mathcal{G})$ est celui, défini sur L, associé à l'identification choisie de $\mathcal{G} \otimes L$ à $\mathfrak{sl}_{2,L}$, (donc associé à u) ; (3.2.8).

Remarquons que $(1,y)$ constitue une base de $\mathcal{O}_{LL'}$ sur $\mathcal{O}_{L'}$.

3.4.8 <u>Toute extension qui déploie $\mathcal{G}$ est sauvagement ramifiée</u>.

Si une extension modérément ramifiée L'/K déploie $\mathcal{G}$, elle a les propriétés décrites en 3.4.7 ; il existe donc a et b dans $\mathcal{O}_{L'}$, tels que $x(1+\varepsilon) = u = N(a+by) = a^2 + \pi ab + xb^2$. En réduction on obtient $\tilde{x} = (\tilde{a}+\tilde{b}\tilde{y})^2 = \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2\tilde{y}^2 = \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2\tilde{x}$, donc $\omega(a) > 0$ et $b = 1+b'$, $\omega(b') > 0$. L'équation s'écrit alors :

$x + \varepsilon x = a^2 + \pi ab + x + 2xb' + xb'^2$ on a donc $\omega((a+yb')^2 - \varepsilon x) > \omega(\pi) = 1 = \omega(\varepsilon x)$.

Ainsi $\omega(a+yb') = \frac{1}{2}$ et 2 divise l'indice de ramification.

3.4.9 $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ <u>est constitué de deux sommets consécutifs et de la chambre qui les joint</u>, <u>tous ces points sont invariants par</u> $\mathcal{G}(K)$.

Les points fixes sous Γ sont les points (a,λ) avec $\omega(x(1+\varepsilon) - Na) \geqslant \lambda \geqslant 0$ et $a \in \mathcal{O}_L$. Mis à part le point $(0,0)$ on obtient en réduction $\tilde{a}^2 = \tilde{x}$ donc $a = y + \pi b$ avec $b \in \mathcal{O}_L$. Alors $Na = Ny + \pi . t(b\,\sigma y) + \pi^2 N(b)$; mais $\omega(\pi . T(b\,\sigma y)) = 1 + \omega(T(b\,\sigma y)) \geqslant 1 + \omega(b\,\sigma y) + s(L/K) \geqslant 2$, $\omega(\pi^2 N(b)) \geqslant 2$ et $\omega(x(1+\varepsilon) - Ny) = \omega(\varepsilon x) = 1$, donc l'équation n'a des solutions que pour $\lambda \in [0,1]$ et les points fixes de Γ, sont les points (y,λ) avec $\lambda \in [0,1]$. Ils sont fixes par $\mathcal{G}(K) = G$, car G stabilise $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ et ne peut échanger deux sommets consécutifs, (3.1.11).

3.4.10 Considérons l'extension galoisienne de degré 2, et d'indice de ramification 2, définie par : $L' = K[z]/(z^2 + \pi z - \varepsilon x)$. Notons L'' l'extension composée de L et L' ; $\omega(z) = \frac{1}{2}$, donc z est une uniformisante de L''.

Notons σ', N', T' l'automorphisme non trivial, la norme et la trace de l'extension L''/L.

$$\begin{tikzcd}
 & L'' & \\
L \arrow[ur, "(\sigma')"] & & L' \arrow[ul, "(\sigma)"'] \\
 & K \arrow[ul, "(\sigma)"] \arrow[ur, "(\sigma')"'] &
\end{tikzcd}$$

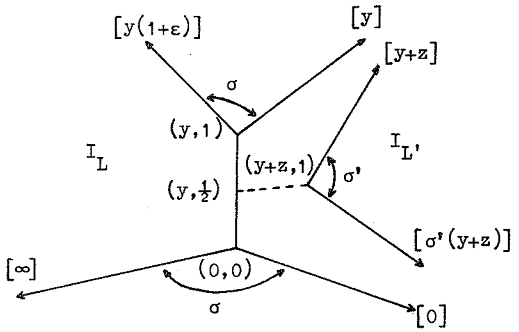
On a :

$N(y+z) = z^2 + zTY + Ny = z^2 + \pi z + x = x(1+\varepsilon)$.

Donc $\mathcal{G}$ est déployé sur L', (3.4.7).

3.4.11 <u>L'immeuble</u> $I_{L'}(\mathcal{G})$, <u>canoniquement plongé dans</u> $I_{L''}(\mathcal{G})$, (2.4.2), <u>est formé de points</u> (a,λ) <u>avec</u> $\lambda \geqslant 1$, $\omega(a-y-z) \geqslant 1$ <u>et</u> $a \in \mathcal{O}_{L''}$. <u>Il est disjoint de</u> $I_L(\mathcal{G})$.

Comme $I_L(\mathcal{G})$ est l'ensemble des (a,λ) avec $a \in L$, $\lambda \in \mathbb{R}$, la dernière assertion résulte de la première. Les sommets de $I_{L'}(\mathcal{G})$ sont (lorsque de $\mathcal{I}(\mathcal{G},L'')^{\Gamma}_{ord}$ il) les points (a,λ) de $I_{L''}(\mathcal{G})^{\Gamma}$, tels que de (a,λ) partent par deux arètes distinctes, deux demi-droites de $I_{L''}(\mathcal{G})^{\Gamma}$, (2.4.15). Cherchons les demi-droites $[a]$ de $I_{L''}(\mathcal{G})^{\Gamma}$. On doit résoudre $x(1+\varepsilon) = u = Na$, $a \in L''$. En 3.4.8 on a vu qu'alors $a = y+b$, $\omega(b) > 0$ et



$\omega(b^2+\varepsilon x) > \omega(\pi) = 1$. Il vient alors $b = z(1+h)$ avec $\omega(h) > 0$, donc $\omega(a-(y+z)) \geqslant 1$. Ainsi toutes les demi-droites de $I_{L''}(\mathcal{G})^{\Gamma}$ d'origine $(0,0)$ coïncident jusqu'à la distance 1 avec la demi-droite $[y+z]$; d'où le résultat.

3.4.12 <u>Remarques</u> :

a) L'énoncé ci-dessus contient le contre-exemple but principal de ce paragraphe : <u>Il n'y a pas de plongement fonctoriel de l'immeuble sur un corps dans l'immeuble sur une extension</u>, (l'énoncé partiel que l'on va obtenir en 5.1.2 ne se généralise donc pas).

En effet, comme $\mathcal{G}$ est déployé sur L et L' , les plongements de I_L et $I_{L'}$ dans $I_{L''}$ sont bien définis et uniques ; mais comme I_L et $I_{L'}$ sont disjoints, on ne sait où envoyer le point qu'est l'immeuble I_K .

b) L'énoncé suivant achève le programme annoncé en 3.4.1 , 3.4.2 et 3.4.3.

3.4.13 <u>Les points de</u> $I_{L''}(\mathcal{G})$ <u>invariants par</u> $\mathrm{Gal}(L''/K)$ <u>sont les points</u> (a,λ) <u>avec</u> $a \in L''$, $\lambda \in [0,1]$, $\omega(a-y) \geqslant \frac{1}{2}$. <u>En particulier</u> $I_{L'}(\mathcal{G})^{\mathrm{Gal}(L'/K)}$ <u>est réduit au point</u> $(y+z,1)$.

D'après 3.2.9 , (a,λ) est invariant par σ et σ' , si et seulement si : $\omega(\sigma'a-a) \geqslant \lambda$; $\omega(x(1+\varepsilon)-Na) \geqslant \lambda \geqslant 0 = \omega(a)$. Posons $a = b+cy+dz+eyz$ avec $b,c,d,e \in \mathcal{O}_K$. La première condition s'écrit alors : $\lambda \leqslant \omega(\sigma'a-a) = \omega((d+ey)(-\pi-2z)) = 1+\omega(d+ey)$. Autrement dit $\omega(d) \geqslant \lambda-1$ et $\omega(e) \geqslant \lambda-1$. Mais on a :

$$N(a) = N(b+cy) + zT((b+cy)\sigma(d+ey)) + z^2N(d+ey) ,$$

et $\omega(zT((b+cy)\sigma(d+ey))) \geqslant \frac{1}{2} + s(L''/L') + \omega(b+cy) + \omega(d+ey) \geqslant \frac{1}{2}+1+0+\lambda-1 > \lambda$, et $\omega(z^2N(d+ey)) = 1+2\omega(d+ey) \geqslant \lambda$. La seconde condition devient donc $\omega(x(1+\varepsilon)-N(b+cy)) \geqslant \lambda$, dont on a vu, (3.4.9) que les solutions sont : $\lambda \in [0,1]$ et $\omega(b+cy-y) \geqslant \lambda$; d'où les résultats.

§5 Un contre-exemple en valuation dense.

3.5.1 Le but de ce paragraphe est de construire une forme $\mathcal{G}$ de $\mathcal{SL}_2$ sur un corps K complet pour une valuation réelle dense (i.e. non triviale, et non discrète), qui se déploie sur une extension quadratique L de K, galoisienne de groupe de Galois Γ, telle que $\mathcal{G}(K)$ ne fixe aucun point de $I_L(\mathcal{G})$. Ainsi il n'y a pas de plongement de $I_K(\mathcal{G})$ dans $I_L(\mathcal{G})$ (au sens de 2.5.1).

Contrairement au paragraphe précédent, on va construire et calculer explicitement un unique contre-exemple, sur des corps K et L construits également explicitement.

3.5.2 Considérons le corps $\mathbb{Q}_2$ muni de sa valuation naturelle ω, telle que $\omega(2) = 1$. On peut prolonger ω au corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}_2(T)$ en posant :

$$\omega(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i) = \mathrm{Inf}\{\omega(a_i)/i=0,1,\dots,n\} .$$

Le complété K_o de $(\mathbb{Q}_2(T),\omega)$ est muni d'une valuation discrète ω, avec $\omega(2) = 1$ et $\omega(K_o^*) = \mathbb{Z}$, son corps résiduel est $\mathbb{F}_2(T)$, ([4 ; n° 10.1]). La construction suivante est suggérée par l'exercice 2 de [4 ; §8].

3.5.3 Considérons les suites π_n et a_n d'éléments de $\mathbb{R}^+$, algébriques sur $\mathbb{Q}$, définies par :

$$\pi_o = 2 \quad ; \quad \pi_{n+1} = \sqrt{\pi_n}$$

$$a_o = 1 \quad ; \quad a_{n+1} = a_n + \frac{2}{\pi_{n+1}} .$$

Définissons K_n comme le corps $K_o(\pi_n)$; la réunion K_∞ des K_n est une extension algébrique du corps complet K_o, donc K_∞ est hensélien pour l'unique prolongement ω à K_∞ de la valuation de K_o, (annexe A2). On note K le complété de K_∞.

Le corps résiduel k de K est $\mathbb{F}_2(T)$ et son groupe des ordres $\omega(K^*)$ est égal à $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}.\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

<u>Proposition</u> 3.5.4 : 1) <u>Pour</u> $n \geqslant 1$, <u>on a</u> : $\omega(3+\frac{4}{\pi_n}-a_n^2) > 2$.

2) <u>L'extension</u> $L' = K(\sqrt{3})$ <u>de</u> K <u>a pour degré</u> 2, <u>pour indice de ramification</u> $e(L'/K) = 1$ <u>et degré résiduel</u> $f(L'/K) = 1$. <u>De plus</u>, $\omega(a_n-\sqrt{3}) = 1-\frac{1}{2^{n+1}}$; $s(L'/K) = 0^+$.

<u>Démonstration</u> : Montrons la première partie par récurrence :

$$a_1^2 = (1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2} = 3+\frac{4}{\pi_1} \; ; \; a_{n+1}^2 = a_n^2+\frac{4}{\pi_{n+1}}+\frac{4}{\pi_{n+1}}(a_n-1)+\frac{4}{\pi_n} \; ;$$

mais par construction, $\omega(a_n-1) \geqslant \frac{1}{2} > \omega(\pi_{n+1})$ et $\omega(\frac{8}{\pi_n}) \geqslant \frac{5}{2} > 2$ pour $n \geqslant 1$, et par hypothèse de récurrence on a $\omega(3+\frac{4}{\pi_n}-a_n^2) > 2$; la conclusion en découle.

Comme K_∞ est hensélien et de caractéristique zéro, il est algébriquement fermé dans son complété K, (annexe A2) ; il suffit donc de montrer l'assertion 2 pour K_∞ et $L'_\infty = K_\infty(\sqrt{3})$ et cela sera fait si l'on montre, pour les corps K_n et $L'_n = K_n(\sqrt{3})$, que l'on a :

$$(*) \begin{cases} [L'_n : K_n] = 2 \; ; \; \omega(a_n-\sqrt{3}) = 1-\frac{1}{2^{n+1}} \\ e(L'_n/K_n) = 2 \; ; \; f(L'_n/K_n) = 1 \; ; \; s(L'_n/K_n) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \end{cases}$$

En effet alors $[L' : K] = 2$ et $f(L'/K) = 1$; $e(L'/K)$ divise 2, mais, comme le groupe des ordres de K est 2-divisible, on a $e(L'/K) = 1$; enfin $s(L'/K) = 0$ ou 0^+, mais compte-tenu de 3.3.2 b) on a $s(L'/K) = 0^+$.

Montrons maintenant $(*)$ par récurrence sur n :

a) Comme 3 n'est pas, dans $\mathbb{Z}$, un carré modulo 4, $\sqrt{3}$ n'est pas dans $\mathbb{Q}_2$, donc $[L'_o : K_o] = 2$. Plus généralement $s(K_{n+1}/K_n) = 1$, puisque

$T(a+b\pi_{n+1}) = 2a$ et $\omega(a+b\pi_{n+1}) = \inf\{\omega(a)\,,\,\omega(b)+\frac{1}{2^{n+1}}\}$; comme, par récurrence, $s(L'_n/K_n) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$, L'_n et K_{n+1} sont distincts, donc $\sqrt{3} \notin K_{n+1}$ et $[L'_{n+1} : K_{n+1}] = 2$.

b) $\omega(a_{n+1}-\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\,\omega((a_{n+1}-\sqrt{3})(a_{n+1}+\sqrt{3})) = \frac{1}{2}\,\omega(a^2_{n+1}-3) = \frac{1}{2}\,\omega(\frac{4}{\pi_{n+1}})$ d'après la première partie ; d'où $\omega(a_{n+1}-\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(2-\frac{1}{2^{n+1}}) = 1-\frac{1}{2^{n+2}}$.

c) Le corps K_{n+1} a pour uniformisante π_{n+1} , avec $\omega(\pi_{n+1}) = \frac{1}{2^{n+1}}$, donc d'après b), $e(L'_{n+1}/K_{n+1}) = 2$.

d) Il en résulte $f(L'_{n+1}/K_{n+1}) = 1$, car e.f divise le degré.

e) $s(L'_{n+1}/K_{n+1}) \leqslant \omega(\frac{T(a_{n+1}-\sqrt{3})}{a_{n+1}-\sqrt{3}}) = \omega(\frac{2a_{n+1}}{a_{n+1}-\sqrt{3}}) = 1-(1-\frac{1}{2^{n+2}}) = \frac{1}{2^{n+2}}$.

3.5.5 Soit L l'extension $K(\sqrt{T})$ de K ; c'est une extension galoisienne de degré 2 , à extension résiduelle radicielle. On a :

$$[L:K] = f(L/K) = 2 \; ; \; e(L/K) = 1 \; ; \; s(L/K) = 1 \; .$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & L'' \arrow[dl, dash, "\sigma'"'] \arrow[dr, dash, "\sigma"] & \\ k(\sqrt{T}) = L \arrow[dr, dash, "\sigma"'] & & L' = k(\sqrt{3}) \arrow[dl, dash, "\sigma'"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

Ainsi L et L' sont deux extensions disjointes. Notons L'' l'extension composée de L et L' , σ , N , T (resp. σ' , N' , T') l'automorphisme non trivial, la norme et la trace de L''/L' (resp. L''/L). Ainsi $\sigma(\sqrt{T}) = -\sqrt{T}$, $\sigma(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, $\sigma'(\sqrt{T}) = \sqrt{T}$ et $\sigma'(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$.

Considérons la K-forme $\mathcal{G}$ de $\mathcal{SL}_2$ déployée sur L et correspondant à $u=3$; l'immeuble $I_{L''}(\mathcal{G})$ est muni d'un paramétrage défini sur L , (3.2.6 , 3.2.8). Le groupe $\mathcal{G}$ est déployé sur L' puisque $3 = N(\sqrt{3}) = \sqrt{3}.\sigma(\sqrt{3})$.

<u>Proposition</u> 3.5.6 : 1) <u>L'équation</u> $\omega(y-\sqrt{3}) \geqslant 1$ <u>n'a pas de solution dans</u> L .

2) $\mathcal{G}$ <u>est</u> <u>K-anisotrope</u>.

3) <u>Pour</u> $y \in L''$ <u>et</u> $\lambda \leqslant 2$, <u>le point</u> (y,λ) <u>de</u> $I_{L''}(\mathcal{G})$ <u>est fixe par</u> σ <u>si et seulement si</u> $\omega(y-\sqrt{3}) \geqslant \frac{\lambda}{2} \geqslant 0$.

4) <u>Pour</u> $y \in L''$, <u>le point</u> (y,λ) <u>de</u> $I_{L''}(\mathcal{G})$ <u>est fixe par</u> σ' <u>si et</u> seulement si $\omega(\sigma'y-y) \geqslant \lambda$.

5) <u>Les points de</u> $I_{L''}(\mathcal{G})$ <u>fixes par</u> $Gal(L''/K)$ <u>sont les points</u> (y,λ) <u>avec</u> :

$$\begin{cases} \lambda \in [0,2[\;\;,\; y \in L'' \; . \\ \omega(y-\sqrt{3}) \geqslant \frac{\lambda}{2} \; . \\ \omega(\sigma'y-y) \geqslant \lambda \; . \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> : 1) Soit $y = a+b\sqrt{T}$ une solution ; comme $(1,\sqrt{T})$ est une base de $\mathcal{O}_L$ sur $\mathcal{O}_K$, on a $\omega(a-\sqrt{3}) \geqslant 1$ et $\omega(a) = 0$. Donc $\omega(\frac{T'(a-\sqrt{3})}{a-\sqrt{3}}) = \omega(\frac{2a}{a-\sqrt{3}}) \leqslant 0$, ce qui contredit $s(L'/K) = 0^+$.

2) Si $\mathcal{G}$ est déployé sur K , il existe $a \in L$ tel que $3 = Na = a\,\sigma a$, alors le point $(a,2)$ de $I_{L''}$ est fixe par σ et d'après le 1) on est ramené à prouver le 3).

3) Posons $y = a+b\sqrt{T}$, avec $a,b \in L'$; alors (y,λ) est fixe par σ si $\omega(N(a+b\sqrt{T})-3) \geqslant \lambda \geqslant 0$. Mais $N(a+b\sqrt{T})-3 = c+d$, avec $c = (a+b\sqrt{T}-\sqrt{3})(a+b\sqrt{T}+\sqrt{3})$; $d = -2b\sqrt{T}(a+b\sqrt{T})$. On a $a,b \in \mathcal{O}_{L'}$

$$\omega(c) = \mathrm{Inf}(\omega(a-\sqrt{3})\,,\,\omega(b)) + \mathrm{Inf}(\omega(a+\sqrt{3})\,,\,\omega(b)) \leqslant 2\omega(b) \; .$$

$$\omega(d) \geqslant 1+\omega(b) \quad ; \quad \omega(c) \leqslant \omega(a-\sqrt{3})+\omega(a+\sqrt{3})$$

Supposons donc $\omega(N(a+b\sqrt{T})-3) \geqslant 3$, $\omega(d) \geqslant 2$ d'où

Si $\omega(b) \geqslant 1$ alors $\omega(c) \geqslant \lambda$ donc $\omega(a-\sqrt{3})$ ou $\omega(a+\sqrt{3}) \geqslant \frac{\lambda}{2} < 1$ alors $\omega(a-\sqrt{3}) \geqslant \frac{\lambda}{2}$ et $\omega(y-\sqrt{3}) \geqslant \frac{\lambda}{2}$.

Si $\omega(b) < 1$ alors $\omega(c) < \omega(d)$, donc $\omega(c) = \omega(c+d) \geqslant \lambda$ et de même $\omega(y-\sqrt{3}) \geqslant \frac{\lambda}{2}$.

Réciproquement si $\omega(y-\sqrt{3}) \geqslant \frac{\lambda}{2}$, alors $\omega(b) \geqslant \frac{\lambda}{2}$ donc $\omega(d) \geqslant 1+\frac{\lambda}{2} \geqslant \lambda$ et $\omega(a-\sqrt{3}) \geqslant \frac{\lambda}{2}$ donc $\omega(c) \geqslant \lambda$; ainsi on a $\omega(N(a+b\sqrt{T})-3) = \omega(c+d) \geqslant \lambda$ et (y,λ) est fixe par σ .

4) La quatrième assertion n'est que la proposition 3.2.9.

5) Il reste à voir que, si (y,λ) est fixe par σ et σ', alors $\lambda < 2$. On peut donc supposer $\lambda = 2$. Posons $y = (a+b\sqrt{3}) + \sqrt{\pi}(c+d\sqrt{3})$ avec $a,b,c,d \in K$. D'après le 3) on a, $\omega(a+b\sqrt{3}-\sqrt{3}) \geqslant 1$ et $\omega(c+d\sqrt{3}) \geqslant 1$. D'après le 4) on a : $2 \leqslant \omega(-2\sqrt{3}\,(b+d\sqrt{\pi})) \leqslant 1+\omega(b)$. Alors $\omega(b) \geqslant 1$ et $\omega(a-\sqrt{3}) \geqslant 1$, contrairement à 1).

<u>Corollaire</u> 3.5.7 : <u>$I_L(\mathcal{G})$ et $I_{L'}(\mathcal{G})$ plongés de la seule manière possible (2.5.2) dans $I_{L''}(\mathcal{G})$ sont disjoints ; $I_{L'}(\mathcal{G})$ contient le point $(\sqrt{3},1)$ qui est adhérent à $I_L(\mathcal{G})$.</u>

<u>Démonstration</u> : Les sommets de $I_{L'}(\mathcal{G})$ sont les points de $I_{L''}(\mathcal{G})$ d'où partent deux demi-droites fixes par σ. Cherchons les demi-droites d'origine $(0,0)$ fixes par σ ; on sait que les bouts correspondants sont les $[y]$ avec $3 = Ny$; le point $(y,2)$ est alors fixe par σ, donc $\omega(y-\sqrt{3}) \geqslant 1$, (3.5.6). La demi-droite associée passe par le point $(y,1) = (\sqrt{3},1)$; de plus $(\sqrt{3},1)$ est le point de divergence des demi-droites fixes par σ de bouts $[\sqrt{3}]$ et $[-\sqrt{3}]$. Donc $(\sqrt{3},1)$ est le point de $I_{L'}(\mathcal{G})$ le plus proche de $(0,0)$. D'après 3.5.6 1), $(\sqrt{3},1)$ n'est pas dans $I_L(\mathcal{G})$. Cependant pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point $P_n = (\sqrt{3}\,,\ 1-\frac{1}{2^{n+1}}) = (a_n\,,\ 1-\frac{1}{2^{n+1}})$ est dans $I_L(\mathcal{G})$ et à la distance $\frac{1}{2^{n+1}}$ de $(\sqrt{3},1)$ qui est donc adhérent à $I_L(\mathcal{G})$.

<u>Proposition</u> 3.5.8 : <u>Le point $(\sqrt{3},1)$ est le seul point de $I_{L''}(\mathcal{G})$ fixe à la fois par $\mathrm{Gal}(L''/K)$ et par $\mathcal{G}(K)$. De plus $\mathcal{G}(K)$ n'a pas de point fixe dans $I_L(\mathcal{G})$.</u>

<u>Démonstration</u> : 1) D'après 3.5.6 et 3.5.7, $(\sqrt{3},1)$ est un point de $I_{L'}(\mathcal{G})$ fixe par σ' ; comme $\mathcal{G}$ est K-anisotrope et L'/K de sauvagerie 0^+, c'est le seul point fixe de σ' dans $I_{L'}(\mathcal{G})$ (3.3.7). Il est donc fixe par $\mathcal{G}(K)$.

2) Soit (y,λ) un point de $I_{L''}(\mathcal{G})$ distinct de $(\sqrt{3},1)$ fixe par $\mathrm{Gal}(L''/K)$, alors $\lambda < 1$ ou $\omega(y-\sqrt{3}) < 1$: sinon $y = \sqrt{3}+2z$ avec $z \in \mathcal{O}_{L''}$, on peut poser $z = a+b\sqrt{3}$, avec $a,b \in L$. D'après 3.5.6 1), on a $b = 0$ ou $\omega(\frac{z}{b}) = \omega(\sqrt{3}+\frac{a}{b}) < 1$, donc $\omega(b) > -1$. Mais $\sigma'y - y = -2\sqrt{3}\,(1+2b)$, et comme $\omega(2b) > 0$ on doit avoir $\lambda \leqslant \omega(\sigma'y-y) = 1$. Et si $\lambda = 1$, alors $(y,\lambda) = (\sqrt{3},1)$.

3) Le résultat précédent (resp. 3.5.6 1)) prouve que si (y,λ) est un point de $I_{L''}(\mathcal{G})$ distinct de $(\sqrt{3},1)$ fixe par $\mathrm{Gal}(L''/K)$, (resp. un point de $I_L(\mathcal{G})$), le segment le joignant à $(\sqrt{3},1)$ intersecte le segment joignant $(0,0) = (\sqrt{3},0)$ à $(\sqrt{3},1)$ ailleurs qu'en $(\sqrt{3},1)$, donc contient un point $P_n = (\sqrt{3}\,,1-\frac{1}{2^n}) = (a_n\,,1-\frac{1}{2^n})$. Si (y,λ) est fixe par $\mathcal{G}(K)$ il en est de même de P_n, il suffit donc de prouver le résultat suivant.

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists g_n \in \mathcal{G}(K)$, g_n fixe P_{n+1} mais non P_n :

On sait que $\omega(a_n^2-3-\frac{4}{\pi_n}) > 2 = \omega(4)$, il existe donc $a \in K^*$ tel que $a^2 = 3+\frac{4}{\pi_n}$ et $\omega(a-a_n) > 1$. Posons pour simplifier $\pi = \pi_{n+1}$, alors $a^2 = 3+\frac{4}{\pi^2}$ et $\omega(a-\sqrt{3}) = 1-\frac{1}{2^{n+1}}$; ainsi $P_n = (a,1-\frac{1}{2^n})$, $P_{n+1} = (a,1-\frac{1}{2^{n+1}})$.

L'élément $g_n = \begin{pmatrix} a\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ 3\frac{\pi}{2} & a\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \in SL_2(K) \subset \mathcal{G}(L)$ est en fait dans $\mathcal{G}(K)$, (3.2.5 ou 3.2.6) ; regardons les points de la forme (a,λ), fixes par g_n :

$$(a,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}(e_1,e_2;\lambda,0) = (e_1+ae_2,e_2;\lambda,0)\ ,$$

$$g_n\cdot(a,\lambda) = \begin{pmatrix} a\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ 3\frac{\pi}{2} & a\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}(e_1+ae_2,e_2;\lambda,0) = (a\pi e_1+\tfrac{\pi}{2}(3+a^2)e_2,\tfrac{\pi}{2}e_1+a\tfrac{\pi}{2}e_2;\lambda,0)\ .$$

S'il y a équivalence, c'est grâce à la matrice $B = \begin{pmatrix} a\pi & -\frac{2}{\pi} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}$, et les conditions sont donc :

$$\omega(a\pi) \geqslant 0 \;;\; \omega(-\tfrac{2}{\pi}) \geqslant \lambda \;;\; \omega(\tfrac{\pi}{2}) \geqslant -\lambda \;;\; \omega(1) = 0 \;.$$

Ces conditions équivalent à $\lambda = \omega(\frac{2}{\pi}) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$: le seul point de la forme (a,λ) fixe par g_n est P_{n+1}.

Remarque 3.5.9 : Le résultat précédent montre que l'immeuble $I_K(\mathcal{G})$, qui est réduit à un point ne peut se plonger dans l'immeuble $I_L(\mathcal{G})$.

Cependant on n'a pas trouvé d'exemple de groupe réductif $\mathcal{G}$ tel que $I_K(\mathcal{G})$ ne se plonge dans aucun $I_L(\mathcal{G})$, pour L extension algébrique de K déployant $\mathcal{G}$, (en particulier on n'a pas trouvé de contre-exemple à 3.4.2).

IV - UN LEMME DE REDRESSEMENT

Pour ce chapitre, on se donne un groupe semi-simple $\mathcal{G}$ défini sur un corps K complet pour une valuation réelle non triviale ω, et une extension galoisienne finie L/K de groupe de Galois Γ. On note $\mathcal{O}_L$ l'anneau des entiers de L pour la valuation ω, unique prolongement à L de la valuation de K. On suppose que $\mathcal{G}$ a un immeuble sur L.

Le but est de généraliser dans ce cadre la proposition 3.3.6. L'idée est simple :

Soit Δ une partie convexe d'un appartement A de l'immeuble $I_L(\mathcal{G})$, fixe par Γ ; la possibilité de trouver un appartement A' fixe par Γ et contenant Δ, dépend de la nullité d'une 1-classe de cohomologie de Γ dans $\hat{P}_\Delta$.

En fait on se fixe un nombre réel ε, $\varepsilon > 0$, et on cherche un appartement A' contenant Δ tel que, si B désigne le sous-espace affine de A' engendré par Δ, l'ensemble $\Delta(A',\varepsilon)$, des points de B à distance au plus ε de Δ, soit fixe par Γ. La possibilité de trouver un tel appartement A' dépend de la nullité d'une 1-classe de cohomologie, de Γ dans un groupe $(V_\Delta . N_{\Delta,\varepsilon})/N_{\Delta,\varepsilon}$, où V_Δ est la partie "unipotente" de $\hat{P}_\Delta$ et $N_{\Delta,\varepsilon}$ un sous-groupe de $\hat{P}_\Delta$, dépendant de ε ; si ε n'est pas "trop grand par rapport à Δ", ce quotient est stable par le groupe de Galois. (Avec les notations du § 2, le rôle de $N_{\Delta,\varepsilon}$ est joué par les groupes U_j, celui de $V_\Delta . N_{\Delta,\varepsilon}$ par les groupes U_j^1, et les assertions ci-dessus sont grosso-modo 4.2.8 et 4.2.14 a)).

L'étape suivante consiste à remarquer que le groupe $V_\Delta . N_{\Delta,\varepsilon}/N_{\Delta,\varepsilon}$ se dévisse en groupes commutatifs qui sont des Γ-$\mathcal{O}$ -modules, (ce résultat, vraisem-