II - IMMEUBLE D'UN GROUPE REDUCTIF

§0 Notations.

2.0.1 On se donne dorénavant un corps commutatif K muni d'une valuation réelle non triviale ω, on note alors :

$\bar{K}$ une clôture algébrique et K_s une clôture séparable de K,

$\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de ω.

Si L est une extension de K, on dit qu'une valuation ω' sur L prolonge ω, ou que (L,ω') est une extension valuée de (K,ω), si $\omega'_{|K} = \omega$; (ainsi si ω est discrète normalisée (i.e. $\omega(K^*) = \mathbb{Z}$), cela ne sera pas toujours le cas pour ω', même si l'extension est finie).

2.0.2 Si L est une extension de K, et si $\mathcal{X}$ est un K-schéma on note $\mathcal{X}(L)$ l'ensemble des points de $\mathcal{X}$ à valeur dans L. On désigne avec des lettres droites les points à valeur dans K, des K-schémas notés avec des lettres rondes : $X = \mathcal{X}(K)$.

2.0.3 Si $\mathcal{H}$ est un groupe algébrique réductif connexe défini sur K (en abrégé : un K-groupe réductif), on note $\mathrm{rad}(\mathcal{H})$ le radical, $\mathrm{ss}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}/\mathrm{rad}(\mathcal{H})$ le semi-simplifié, $\mathcal{H}'$ le groupe dérivé, $\mathrm{corad}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}/\mathcal{H}'$ le coradical (cf [12 ; XXII, n° 6.2]), $X^*(\mathcal{H}) = X^*(\mathrm{corad}(\mathcal{H}))$ le $\mathbb{Z}$ module libre des caractères et $X^*_K(\mathcal{H}) = X^*_K(\mathrm{corad}(\mathcal{H}))$ le sous $\mathbb{Z}$-module des caractères rationnels, de $\mathcal{H}$.

Si $\mathcal{H}$ est un tore on note $X_*(\mathcal{H})$ le $\mathbb{Z}$-module libre, dual de $X^*(\mathcal{H})$, des cocaractères de $\mathcal{H}$, et $X_{*,K}(\mathcal{H})$ le sous-$\mathbb{Z}$-module des cocaractères rationnels

de $\mathcal{H}$.

2.0.4 On se donne pour la suite un K-groupe réductif $\mathcal{G}$; si $\mathcal{S}$ est un tore K-déployé maximal de $\mathcal{G}$, on note alors :

$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ le sous-groupe réductif de $\mathcal{G}$, centralisateur de $\mathcal{S}$

$\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{S})$ le sous-groupe algébrique de $\mathcal{G}$, normalisateur de $\mathcal{S}$

$\Phi = \Phi(\mathcal{S}) = \Phi(\mathcal{S},\mathcal{G}) \subset X^*(\mathcal{S})$ (resp. $\Phi^\vee \subset X_*(\mathcal{S})$) l'ensemble des racines (resp. des coracines) de $\mathcal{G}$ par rapport à $\mathcal{S}$.

${}^vW$ le groupe de Weyl de Φ et ${}^v\nu$ le morphisme canonique de groupes algébriques de $\mathcal{N}$ sur le groupe constant ${}^vW$, de noyau $\mathcal{Z}$. On peut considérer ${}^vW$ comme un groupe d'automorphismes de $\mathcal{S}$; il agit sur $X^*(\mathcal{S})$ (resp. $X_*(\mathcal{S})$) en stabilisant Φ (resp. $\Phi^\vee$).

$\mathcal{U}_a$ le sous-groupe unipotent connexe de $\mathcal{G}$ relatif à la racine $a \in \Phi$ (c'est-à-dire : normalisé par $\mathcal{S}$ et dont l'algèbre de Lie est la somme des espaces propres de $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ correspondants à a et $2a$, pour l'action de $\mathcal{S}$). Si $2a$ n'est pas une racine on note $\mathcal{U}_{2a} = \{1\}$.

2.0.5 L'existence et les principales propriétés des objets ainsi énumérés, sont prouvées dans [1]. En particulier, pour construire $\mathcal{U}_a$, on considère un tore maximal K-défini $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$, contenant $\mathcal{S}$ et une extension galoisienne finie L/K déployant $\mathcal{T}$; alors $\mathcal{U}_a \otimes L$ est le groupe engendré par les $\mathcal{U}_b$ pour $b \in \Phi(\mathcal{T})$ avec $b_{|\mathcal{S}} = a$ ou $2a$.

§1 Donnée radicielle valuée et immeuble.

La valuation ω de K n'interviendra qu'à partir de 2.1.5.

Proposition 2.1.1 : Soit $a \in \Phi(\mathcal{S})$, il existe un ouvert Ω_a de $\mathfrak{U}_a$, non vide et défini sur K, tel que :

1) $\Omega_a(K) = U_a^*$ $(= U_a - \{1\})$.

2) Il existe un K-morphisme de schémas $m : \Omega_a \to \mathcal{N}$ tel que :

Pour toute extension L de K et tout $u \in \Omega_a(L)$, on a $\mathcal{N} \cap \mathfrak{U}_{-a}.u.\mathfrak{U}_{-a} = \{m(u)\}$; de plus ${}^v\nu(m(u)) \in {}^vW$ est la réflexion r_a associée à a, et $m(u)$ s'écrit de manière unique $m(u) = u'.u.u''$ avec $u',u'' \in \mathfrak{U}_{-a}(L)$.

Démonstration : On peut clairement supposer que $\mathcal{G}$ est engendré par $\mathcal{Z}$, $\mathfrak{U}_a$ et $\mathfrak{U}_{-a}$; le groupe de Weyl est alors ${}^vW = \{1, r_a\}$. Soit $n \in N$ tel que ${}^v\nu(n) = r_a$, posons $\Omega_a = (\mathfrak{U}_{-a}.n.\mathcal{Z}.\mathfrak{U}_{-a}) \cap \mathfrak{U}_a = (n.\mathfrak{U}_a.\mathcal{Z}.\mathfrak{U}_{-a}) \cap \mathfrak{U}_a$. On sait que l'application produit de $\mathfrak{U}_a \times \mathcal{Z} \times \mathfrak{U}_{-a}$ dans $\mathcal{G}$ est un K-isomorphisme sur un ouvert K-défini de $\mathcal{G}$ ([1;3.24]) ; donc Ω_a est un ouvert K-défini de $\mathfrak{U}_a$ vérifiant la condition 2). D'après la décomposition de Bruhat, ([1;5.15]), $G = U_{-a}.N.U_{-a}$ est la réunion disjointe de $Z.U_{-a}$ et $U_{-a}.n.Z.U_{-a}$. Comme $\mathfrak{U}_a \cap \mathcal{Z}.\mathfrak{U}_{-a} = \{1\}$, on en déduit que $\Omega_a(K)$ est U_a^*, non vide d'après [1;3.23].

2.1.2 Pour $a \in \Phi$, posons $M_a = ({}^v\nu)^{-1}(r_a) \subset N$.

Théorème : $(Z,(U_a,M_a)_{a\in\Phi})$ est une donnée radicielle génératrice de type Φ dans G. Son groupe de Weyl est donc ${}^vW$.

Démonstration : Les axiomes DR1, DR3, DR6 et DR5 de 1.1.1 résultent de [1;3.23, 3.24 et 5.2]. L'axiome DR4 est la proposition 2.1.1 ; quant à l'axiome

DR2, il est bien connu dans le cas déployé (relations de Chevalley), le cas général en résulte alors par descente. La donnée radicielle est génératrice à cause, par exemple, de la décomposition de Bruhat.

Remarque : On peut préciser l'axiome DR2 : Soient $a,b \in \Phi(\mathcal{S})$ tels que $b \notin -\mathbb{R}^+.a$, munissons $M = \{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / pa+qb \in \Phi,\ \frac{1}{2}(pa+qb) \notin \Phi\}$ d'un ordre total ; il existe alors des morphismes de schémas $u_{p,q} : \mathfrak{U}_a \times \mathfrak{U}_b \to \mathfrak{U}_{pa+qb}$ pour $(p,q) \in M$ tels que : $\forall\, u \in \mathfrak{U}_a$ $\forall\, u' \in \mathfrak{U}_b$ on a $(u,u') = \prod_{(p,q)\in M} u_{p,q}(u,u')$. (Cela résulte de la structure des sous groupes unipotents K-définis de $\mathcal{G}$).

Lemme 2.1.3 : Le groupe $X_K^*(\mathcal{Z})$ des caractères rationnels de $\mathcal{Z}$ est un sous $\mathbb{Z}$-module d'indice fini de $X^*(\mathcal{S})$.

Démonstration : La restriction définit un morphisme de $X_K^*(\mathcal{Z})$ dans $X^*(\mathcal{S})$. Mais $X_K^*(\mathcal{Z}) = X_K^*(\mathrm{corad}(\mathcal{Z}))$ et $\mathrm{corad}(\mathcal{Z})$ est isogène à $\mathrm{rad}(\mathcal{Z})$; la conclusion résulte donc de ce que $\mathcal{S}$ est le tore K-déployé maximal de $\mathrm{rad}(\mathcal{Z})$.

2.1.4 Pour $a \in \Phi$, choisissons un élément m_a de M_a. Soit χ un caractère rationnel de $\mathcal{Z}$ dont la restriction à $\mathcal{S}$ est un multiple c.a de a, avec $c \in \mathbb{N}^*$.

Proposition : Il existe un (unique) K-morphisme de schémas affines λ_χ de $\mathfrak{U}_a$ dans le groupe additif $\mathcal{A}dd$, tel que pour toute extension L de K et tout $u \in \Omega_a(L)$, on ait : $\lambda_\chi(u) = \chi(m(u).m_a^{-1}) \in L^*$.

λ_χ est z-homogène de degré $2c.a = 2\chi$, c'est-à-dire que pour toute extension L de K, tout $z \in \mathcal{Z}(L)$ et tout $u \in \mathfrak{U}_a(L)$, on a : $\lambda_\chi({}^z u) = \chi(z)^2.\lambda_\chi(u)$.

Démonstration. Comme Ω_a est un ouvert non vide du schéma irréductible $\mathfrak{U}_a$, il suffit de vérifier la dernière assertion pour u dans $\Omega_a(L)$:

$$\lambda_\chi({}^z u) = \chi(m({}^z u)m_a^{-1}) = \chi({}^z m(u)m_a^{-1})$$
$$= \chi(z.{}^{m(u)}z^{-1}.m(u).m_a^{-1})$$
$$= \chi(z).[r_a(\chi)(z^{-1})].\lambda_\chi(u) = \chi(z)^2.\lambda_\chi(u)$$

car, comme $\chi_{|\mathcal{S}} = c.a$, on a $r_a(\chi) = \chi^{-1}$.

Pour montrer l'existence de λ_χ , on peut supposer $\mathcal{G}$ engendré par $\mathcal{Z}$, $\mathcal{U}_a$ et $\mathcal{U}_{-a}$; de plus, comme $\lambda_{\chi|\Omega_a}$ est un morphisme de schémas (2.1.1) et comme $\mathcal{U}_a$ est un schéma normal, il suffit de montrer l'existence de λ_χ , pour un caractère χ bien choisi. $\lambda_{\pi.\chi}$

Le groupe $\mathcal{G}$ opère sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$; comme $\mathcal{Z}$ normalise $\mathcal{U}_a$, il stabilise son algèbre de Lie $\underline{u}_a$, le déterminant de cette opération est un caractère χ de $\mathcal{Z}$, dont la restriction à $\mathcal{S}$ est un multiple c.a de a (avec $c = \dim(\mathcal{U}_a) + \dim(\mathcal{U}_{2a})$) . Notons $\underline{v} = \underline{z} \oplus \underline{u}_{-a}$, alors $\mathfrak{g} = \underline{v} \oplus \underline{u}_a$, et on peut définir la projection π de $\mathfrak{g}$ sur $\underline{u}_a$, parallèlement à $\underline{v}$. On a alors un morphisme ϕ de $\mathcal{U}_a$ dans $\mathcal{E}nd(\underline{u}_a)$ défini par $\phi(u) = \pi.u.m_a^{-1}$ et définissons λ_χ comme le composé de ϕ et de l'application déterminant ; c'est bien un K-morphisme de schémas affines. Il reste à vérifier que, si $u \in \Omega_a(L)$, $\lambda_\chi(u) = \chi(m(u).m_a^{-1})$.

Il existe $u',u'' \in \mathcal{U}_{-a}(L)$ tels que $m(u) = u'.u.u''$, alors : $\chi(m(u).m_a^{-1}) = \chi(u'.u.m_a^{-1}.m_a.u''.m_a^{-1})$. Mais le déterminant de l'action de $m_a u'' m_a^{-1} \in \mathcal{U}_a(L)$ sur $\underline{u}_a$ est 1 , puisque $\mathcal{U}_a$ est unipotent ; donc $\chi(m(u)m_a^{-1})$ est le déterminant de l'action sur $\underline{u}_a$ de $u'.u.m_a^{-1}$, tandis que $\lambda_\chi(u)$ est le déterminant de l'action sur $\underline{u}_a$ de $\pi\, u'^{-1}.u'.u.m_a^{-1}$. Il nous suffit donc de prouver que $\det(\pi\, u'^{-1}) = 1$. Mais u' stabilise $\underline{v}$ donc induit un automorphisme de $\mathfrak{g}/\underline{v} \simeq \underline{u}_a$, dont le déterminant est 1 puisque u' est unipotent ; d'où le résultat.

2.1.5 L'homogénéité de λ_χ montre que $\lambda_\chi(1) = 0$.

Pour toute extension valuée L de K définissons l'application φ_a de $\mathcal{U}_a(L)$ dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par $\varphi_a(u) = \frac{1}{2c}\,\omega(\lambda_\chi(u))$. Cette fonction ne dépend pas du choix de χ et elle ne dépend du choix de m_a qu'à une constante (additive) près.

On a : $\varphi_a(1) = \infty$; $\varphi_a(u) = \frac{1}{2c}\,\omega(\chi(m(u).m_a^{-1}))$ si $u \in U_a^*$ et $\varphi_a({}^z u) = \frac{1}{c}\,\omega(\chi(z)) + \varphi_a(u)$ $\forall z \in \mathcal{Z}(L)$, $\forall u \in \mathcal{U}_a(L)$.

2.1.6 Soit V l'espace vectoriel $X_*(\mathcal{S}) \otimes \mathbb{R}$, identifié à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(\mathcal{S}),\mathbb{R})$ et aussi à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_K^*(\mathcal{Z}),\mathbb{R})$ (cf 2.1.3). Le groupe de Weyl ${}^vW$ opère donc sur V . Le sous espace vectoriel $V_1 = \{v \in V/a(v) = 0 , \forall a \in \Phi\}$ de V , est l'espace des vecteurs de V invariants par ${}^vW$.

<u>Lemme</u> : <u>Les morphismes canoniques entre les tores</u> $\mathcal{S}$, $(\mathcal{S} \cap \mathrm{rad}(\mathcal{G}))^o_{red}$, $\mathrm{rad}(\mathcal{G})$ <u>et</u> $\mathrm{corad}(\mathcal{G})$ <u>fournissent des identifications canoniques des quatre espaces vectoriels,</u> V_1 , $V_2 = X_*(\mathcal{S} \cap \mathrm{rad}(\mathcal{G})) \otimes \mathbb{R}$, $V_3 = X_{*,K}(\mathrm{rad}(\mathcal{G})) \otimes \mathbb{R}$ <u>et</u> $V_4 = X_{*,K}(\mathrm{corad}(\mathcal{G})) \otimes \mathbb{R}$.

<u>Démonstration</u> : L'égalité de V_1 et V_2 découle facilement de la caractérisation de $\mathrm{rad}(\mathcal{G})$ comme sous tore maximal de l'intersection des noyaux des racines d'un tore maximal $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$, que l'on peut supposer K-défini et contenant $\mathcal{S}$. L'égalité de V_2 et V_3 résulte de ce que $(\mathcal{S} \cap \mathrm{rad}(\mathcal{G}))^o_{red}$ est le tore K-déployé maximal de $\mathrm{rad}(\mathcal{G})$. Enfin l'isogénie K-définie de $\mathrm{rad}(\mathcal{Z})$ dans $\mathrm{corad}(\mathcal{Z})$ fournit l'égalité de V_3 et V_4 .

2.1.7 a) On définit un homomorphisme de groupes ν de Z dans V par : $\nu(z).\chi = -\omega(\chi(z))$ $\forall \chi \in X_K^*(\mathcal{Z})$, $\forall z \in Z$. On note H son noyau.

Par définition $\nu(Z) = Z/H$ est contenu dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_K^*(\cancel{\mathcal{G}}\,\mathcal{Z}),\omega(K^*))$ et contient $\nu(S) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(\mathcal{S}),\omega(K^*))$. Ainsi $\nu(Z)$ est un sous $\mathbb{Z}$-module de V , qui engendre cet $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si ω est discrète, $\nu(Z)$ est un réseau de V.

b) On a : $\nu({}^{n}z) = {}^{v}\nu(n).\nu(z)$ $\forall\, n \in N$, $\forall\, z \in Z$: En effet

$\nu({}^{n}z).\chi = \omega(\chi({}^{n}z)) = \omega([{}^{v}\nu(n^{-1}).\chi](z)) = \nu(z).[{}^{v}\nu(n)^{-1}.\chi] = [{}^{v}\nu(n).\nu(z)].\ \chi$.

c) On peut appliquer la construction du a) à $\mathrm{corad}(\mathcal{G})$; on obtient ainsi un homomorphisme de $\mathrm{corad}(\mathcal{G})(K)$ dans $V_4 = V_1$ et en composant avec l'homomorphisme de G dans $\mathrm{corad}(\mathcal{G})(K)$, on définit un homomorphisme ν_1 de G dans V_1.

Définitions 2.1.8 : Soient $\mathcal{G}$ un K-groupe réductif et $\mathcal{S}$ un sous tore K-déployé maximal de $\mathcal{G}$,

a) On appelle appartement de $(\mathcal{S},\mathcal{G})$ un couple $(A_{\mathcal{S}},\nu)$ formé d'un espace affine $A_{\mathcal{S}}$ sous $V = X_*(\mathcal{S}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{R}$ et d'un homomorphisme ν de $N = N(\mathcal{S})$ dans le groupe des automorphismes affines de $A_{\mathcal{S}}$, tel que :

- pour tout $z \in Z$, $\nu(z)$ est la translation (appartenant à V) définie en 2.1.7 a)
- pour tout $n \in N$, l'automorphisme vectoriel de V associé à $\nu(n)$ est ${}^{v}\nu(n)$.

b) On appelle point original d'un appartement $(A_{\mathcal{S}},\nu)$ un point $x \in A_{\mathcal{S}}$ tel que, si N_x désigne le fixateur de x dans N, on ait $\nu(N_x) = {}^{v}W$.

c) Si x est un point original d'un appartement $A_{\mathcal{S}}$, alors, pour tout $a \in \Phi$, on choisit $m_a = m_{-a} \in M_a \cap N_x$ et l'application φ_a ainsi obtenue pour ce choix de m_a (cf 2.1.4 , 2.1.5) est notée φ_a^x ; on note φ^x la famille $(\varphi_a^x)_{a\in\Phi}$, (voir 2.1.11a pour la licité de ces notations).

Lemme 2.1.9 : La suite exacte $1 \to \nu(z) = Z/H \to \overset{W}{\overset{\|}{N/H}} \xrightarrow{{}^{v}\nu} {}^{v}W \to 1$ est inessentielle. Plus précisément il existe un sous-groupe fini $\underset{}{\overset{W_0 \text{ de } W}{N_o}}$ de N tel que ${}^{v}\nu(N_o) = {}^{v}W$; ainsi N/H est produit semi-direct de $\overset{W_0}{HN_o/H}$ par Z/H .

Démonstration : Considérons un sous-groupe réductif déployé maximal $\mathfrak{F}$ de $\mathcal{G}$ (cf [1;7.2]) et une $\mathbb{Z}$-forme de Chevalley $\mathfrak{F}_{\mathbb{Z}}$ de $\mathfrak{F}$. Alors $\mathfrak{F}_{\mathbb{Z}}$ possède un sous-tore maximal $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ (déployé), tel que $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} K = \mathcal{S}$. Soient N_o et S_o les sous-groupes finis de $F \subset G$, images des groupes finis $\mathcal{N}(\mathcal{S}_{\mathbb{Z}})(\mathbb{Z})$ et $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$ inclus dans $\mathfrak{F}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$. On sait que ${}^{v}\nu$ identifie N_o/S_o à ${}^{v}W$; comme S_o est un groupe fini, $\nu(S_o) \subset V$ est réduit à 0 ; on en déduit que $S_o = N_o \cap H = N_o \cap Z$; d'où les résultats annoncés.

Proposition 2.1.10 : a) Si $\mathcal{G}$ est un K-groupe réductif et $\mathcal{S}$ un tore K-déployé maximal de $\mathcal{G}$, il existe un appartement $(A_{\mathcal{S}},\nu)$ de $(\mathcal{S},\mathcal{G})$ et il est unique à isomorphisme près. De plus il existe dans $A_{\mathcal{S}}$ des points originaux.

b) Soient $(A_{\mathcal{S}},\nu)$ un appartement de $(\mathcal{S},\mathcal{G})$ et x un point original de $A_{\mathcal{S}}$, alors pour tout $a \in \Phi$ et tout $u \in U_a^*$, $\nu(m(u))$ est la réflexion, d'image vectorielle r_a, par rapport à l'hyperplan

$\{z \in A_{\mathcal{S}}/a(z-x) + \varphi_a^x(u) = 0\} = M(u)$.

c) Le groupe des automorphismes de $(A_{\mathcal{S}},\nu)$, (c'est-à-dire le groupe des automorphismes affines de $A_{\mathcal{S}}$ qui commutent à l'action de N par ν), est le groupe de translations V_1. Ainsi, si $\mathcal{G}$ est semi-simple, l'appartement de $(\mathcal{S},\mathcal{G})$ est unique à isomorphisme unique près.

d) Notons $A'_{\mathcal{S}} = A_{\mathcal{S}}/V_1$ et ν' l'action de N sur $A'_{\mathcal{S}}$ déduite de ν par passage au quotient ; alors $(V_1 \times A'_{\mathcal{S}}, \nu_1 \times \nu')$ est un appartement de

$(\mathcal{S},\mathcal{G})$ <u>et</u> $(A'_{\mathcal{S}}, \nu'_{|N\cap G'})$ <u>est un appartement de</u> $((\mathcal{S}\cap\mathcal{G}')^{o}_{red}, \mathcal{G}')$.

<u>Démonstration</u> : a) Considérons un sous-groupe N_1 de N , contenant H et
$N_1 = \{n \in N /$ [illegible] $N_\sigma\}$
tel que N/H soit produit semi-direct de N_1/H par Z/H (lemme 2.1.9). On fait agir Z/H sur V par les translations fournies par ν et N_1/H , vectoriellement, par ${}^{v}\nu$. La condition de compatibilité a été démontrée en 2.1.7 b) et on obtient ainsi une action affine ν de N sur V . Donc (V,ν) est un appartement de $(\mathcal{S},\mathcal{G})$ et $0 \in V$ est un point original, de même que chacun des points de l'orbite de 0 sous Z ou N .

L'unicité à isomorphisme près d'un appartement est claire, puisque (lemme 2.1.9) il existe un sous-groupe fini N_o de N tel que ${}^{v}\nu(N_o) = {}^{v}W$, en effet un tel sous-groupe a forcément un point fixe dans tout appartement.

b) Si m_a est choisi comme en 2.1.8 c), $\nu(m_a)$ est la réflexion, d'image vectorielle r_a , par rapport à l'hyperplan $\{z \in A_{\mathcal{S}}/a(z-x) = 0\}$. Mais $\nu(m(u)) = \nu(m(u).m_a^{-1}).\nu(m_a)$ et $\nu(m(u)m_a^{-1})$ est, par définition, une translation de vecteur v tel que :

$$a(v) = \frac{1}{c}\,\chi(v) = \frac{1}{c}\,v(\chi) = -\frac{1}{c}\,\omega(\chi(m(u)m_a^{-1})) = -2\,\varphi_a(u) \ ,$$

[illegible] ainsi $\nu(m(u))$ est bien la réflexion indiquée.

c) Tout automorphisme σ de $(A_{\mathcal{S}},\nu)$ commute aux translations de $\nu(Z)$; comme celles-ci engendrent V , cet automorphisme est une translation de vecteur v . Pour que σ soit un automorphisme il faut et il suffit que v soit fixé par ${}^{v}W$, donc que $v \in V_1$ (2.1.6) ; d'où les assertions du c).

d) On sait ([1;4.27]) que $\mathcal{S}$ est produit presque direct des tores $\mathcal{S}' = (\mathcal{S}\cap \mathrm{rad}(\mathcal{G}))^{o}_{red}$ et $(\mathcal{S}\cap\mathcal{G}')^{o}_{red}$, et que ceux-ci sont des tores K-déployés

maximaux de $\mathrm{rad}(\mathcal{G})$ et $\mathcal{G}'$. Ainsi $A'_{\mathcal{S}}$ est un espace affine sous $X_*(\mathcal{S}\cap\mathcal{G}')\otimes\mathbb{R} \simeq X_*(\mathcal{S})\otimes\mathbb{R}/X_*(\mathcal{S}\cap\mathrm{rad}(\mathcal{G}))\otimes\mathbb{R}$; et, vus 2.1.6, 2.1.7 b), les assertions du d) sont évidentes.

<u>Remarques et définitions</u> 2.1.11 : a) La partie b) de la proposition montre que si x est un point original alors l'application φ_a^x ne dépend que de a et de la classe de x dans $A'_{\mathcal{S}}$. De plus si x et x' sont deux points originaux, on a : $\varphi_a^x(u) = \varphi_a^{x'}(u) + a(x-x')$ $\forall u \in U_a^*$. Cette formule permet de définir φ_a^x pour tout point x de $A_{\mathcal{S}}$, de façon que 2.1.10 b) soit encore vérifié. On a donc une bijection entre les points $x \in A'_{\mathcal{S}}$ et les familles $\varphi^x = (\varphi_a^x)_{a\in\Phi}$ ainsi définies.

b) On appelle <u>point spécial</u> d'un appartement $(A_{\mathcal{S}},\nu)$ un point $x \in A_{\mathcal{S}}$, tel que pour tout $a \in \Phi^{red}$, il existe $u \in U_a^*$ tel que $m(u)$ fixe x . Un point spécial est original.

On voit aussitôt que $x \in A_{\mathcal{S}}$ est spécial si et seulement si la famille φ^x est <u>spéciale</u>, c'est-à-dire, ([11;6.2.13]), si pour toute racine $a \in \Phi^{red}$, on a $0 \in \varphi_a^x(U_a)$.

c) Si $A_{\mathcal{S}}$ est un appartement de $(\mathcal{S},\mathcal{G})$, x un point de $A_{\mathcal{S}}$, a une racine et k un nombre réel, on note :

$$U_{a,k}^x = \{u \in U_a/\varphi_a^x(u) \geqslant k\} \ ;$$

$M^x(a+k) = \{z \in A_{\mathcal{S}}/a(z-x)+k = 0\}$; $D^x(a+k) = \{z \in A_{\mathcal{S}}/a(z-x)+k \geqslant 0\}$. Si $u \in U_a^*$ $M^x(a+\varphi_a^x(u))$ et $D^x(a+\varphi_a^x(u))$ ne dépendent pas de x , on les note $M(u)$ et $D(u)$. D'après 2.1.10 b), $m(u)$ est une réflexion par rapport à l'hyperplan $M(u)$. On appelle <u>mur</u> (resp. <u>demi-appartement</u>) de $A_{\mathcal{S}}$ une partie de $A_{\mathcal{S}}$ de la forme $M(u)$ (resp. $D(u)$) avec $a \in \Phi$ et $u \in U_a^*$.

d) L'appartement $(V_1 \times A'_{\mathcal{S}}\ ,\ \nu_1 \times \nu')$ introduit en 2.1.10 d) est appelé <u>appartement centré de</u> $(\mathcal{S},\mathcal{G})$, il est muni d'une structure mi-vectorielle mi-affine. D'après 2.1.10 c) tout automorphisme affine de $(V_1 \times A'_{\mathcal{S}}\ ,\ \nu_1 \times \nu')$ qui respecte la structure vectorielle est l'identité. On a ainsi rigidifié la situation, l'appartement centré de $(\mathcal{S},\mathcal{G})$ est unique à isomorphisme unique près.

e) Si $N_o \subset N$ est comme en 2.1.9 , tout point $x \in A_{\mathcal{S}}$ fixe par N_o est un point original ; d'après 2.1.10 b) l'ensemble de ces points fixes forme une orbite unique sous V_1 .

f) Les tores K-déployés maximaux de $\mathcal{G}$ sont conjugués par G , donc les appartements de $\mathcal{G}$ relatifs à ces tores sont "conjugués", on pourrait définir "l'appartement canonique" du "tore K-déployé maximal canonique" de $\mathcal{G}$. Etant donné le caractère non contractuel de ce descriptif, on parlera plutôt de l'<u>appartement témoin</u> de $\mathcal{G}$!!

<u>Définitions</u> 2.1.12 : 1) On appelle <u>immeuble éventuellement non bornologique</u> (en abrégé : immeuble E.N.B.) <u>de</u> $\mathcal{G}$, un triplet formé d'un ensemble I , d'une action de G sur I et d'un recouvrement de I , indexé par les tores K-déployés maximaux $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$, par des sous-ensembles $A_{\mathcal{S}}$ munis d'une structure d'espace affine sous $X_*(\mathcal{S}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{R}$, tel que pour tout tore K-déployé maximal $\mathcal{S}$, on ait :

α) $N(\mathcal{S})$ stabilise $A_{\mathcal{S}}$ et l'action induite de $N(\mathcal{S})$ sur $A_{\mathcal{S}}$ fait de $A_{\mathcal{S}}$ un appartement de $(\mathcal{S},\mathcal{G})$.

β) $\forall\, a \in \Phi(\mathcal{S})$, $\forall\, u \in U_a^*$ u fixe le demi-appartement $D(u)$ de $A_{\mathcal{S}}$.

γ) $\forall\, g \in G$, $g.A_{\mathcal{S}} = A_{g\mathcal{S}g^{-1}}$.

δ) $\forall\, a \in \Phi(\mathcal{S})$, $\forall\, x \in A_{\mathcal{S}}$, $\forall\, k,\ell \in \mathbb{R}$, $\forall\, u \in U^x_{a,k}$, $\forall\, u' \in U^x_{a,\ell}$, le commutateur (u,u') fixe $D^x(a + \frac{k+\ell}{2})$.

2) Si le triplet introduit ci-dessus satisfait aux axiomes ci-dessus sauf peut-être à l'axiome δ), on dit que c'est un <u>quasi-immeuble</u> de $\mathcal{G}$.

3) Les sous-ensembles $A_{\mathcal{S}}$ d'un quasi-immeuble I , sont appelés les <u>appartements</u> de I . en bij avec les $\mathcal{S}$ car $\mathcal{S} \mapsto N(\mathcal{S})$ est injectif ~~et~~ $\Rightarrow N(N(\mathcal{S})) = N(\mathcal{S})$
(corps ∞)

<u>Remarques</u> 2.1.13 : a) Les notions d'immeuble ENB ou de quasi-immeuble ne sont introduites que pour la commodité de l'exposé, la bonne notion est celle d'immeuble (bornologique) introduite en 2.2.12.

b) On peut reformuler l'axiome β) :

$$\forall\, a \in \Phi ,\ \forall\, x \in A_{\mathcal{S}} ,\ \forall\, k \in \mathbb{R} ,\ \forall\, u \in U^x_{a,k} ,\ u \text{ fixe } D^x(a+k) .$$

<u>Théorème</u> 2.1.14 : 1) <u>Soient</u> $\mathcal{S}$ <u>un tore</u> K-<u>déployé maximal de</u> $\mathcal{G}$, $A_{\mathcal{S}}$ <u>un appartement de</u> $(\mathcal{S},\mathcal{G})$ <u>et</u> x <u>un point de</u> $A_{\mathcal{S}}$, <u>les trois conditions suivantes sont équivalentes</u> :

A) $\mathcal{G}$ <u>a un immeuble E.N.B.</u> .

B) <u>La famille</u> φ^x <u>vérifie les conditions suivantes</u> :

i) $\forall\, a \in \Phi$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $U^x_{a,k}$ <u>est un sous-groupe</u> de U_a .

ii) $\forall\, a,b \in \Phi$, $\forall\, r,s \in \mathbb{R}$, $\forall\, u \in U^x_{a,r}$, $\forall\, u' \in U^x_{b,s}$ <u>tels que</u> $b \notin -\mathbb{R}^+.a$, <u>on peut écrire</u> :

$(u,u') = \Pi\, u_{p,q}$, <u>avec</u> $u_{p,q} \in U^x_{pa+qb\,,\,pr+qs}$, <u>le produit étant étendu aux</u> $p,q \in \mathbb{N}^*$, <u>tels que</u> $pa+qb \in \Phi$.

C) La famille φ^x est une valuation de la donnée radicielle $(Z,(U_a,M_a)_{a\in\Phi})$ de G, relative au tore $\mathcal{S}$.

2) Si les conditions précédentes sont vérifiées, on a alors :

a) Tout quasi-immeuble de $\mathcal{G}$ est un immeuble E.N.B. ; un tel immeuble est unique à isomorphisme près.

b) Si I est un immeuble E.N.B. de $\mathcal{G}$, l'action de V_1, (espace vectoriel indépendant de $\mathcal{S}$ car canoniquement isomorphe à V_3, cf lemme 2.1.6) sur chacun des $A_{\mathcal{S}}$ induit une action G-invariante sur I. Et tout automorphisme de I, qui commute à l'action de G, stabilise chaque appartement $A_{\mathcal{S}}$ et y induit un automorphisme affine, est induit par un élément de V_1. [Ainsi, si $\mathcal{G}$ est semi-simple, l'immeuble ENB de $\mathcal{G}$ est unique à isomorphisme unique près].

c) Si I est un immeuble E.N.B. de $\mathcal{G}$, le quotient $I' = I/V_1$ muni de l'action induite de G et du recouvrement par les $A'_{\mathcal{S}} = A_{\mathcal{S}}/V_1$, s'identifie canoniquement à l'immeuble de la donnée radicielle valuée (Z,U_a,φ_a^x) de G, (pour tout tore K-déployé maximal $\mathcal{S}$ et tout point x d'un appartement de $(\mathcal{S},\mathcal{G})$).
I' est un immeuble E.N.B. de $\mathcal{G}'$. De plus $V_1 \times I'$ muni de son action de G (par ν_1 pour l'action sur V_1) et du recouvrement par les appartements $V_1 \times A'_{\mathcal{S}}$ est un immeuble E.N.B. de $\mathcal{G}$.

Ce théorème sera démontré en 2.1.17.

Remarques et définitions 2.1.15 : a) Les conditions B et C du théorème dépendent du couple $(\mathcal{S},x)$ choisi, mais comme la condition A n'en dépend pas, il suffit de vérifier la condition B ou C pour un couple $(\mathcal{S},x)$, elle sera alors vraie pour tous les autres.

b) Si L est une extension valuée de K, on appelle immeuble E.N.B. de $\mathcal{G}$ sur L, un immeuble de $\mathcal{G}\otimes L$.

c) Si $\mathcal{G}$ a un immeuble E.N.B. I, on a introduit en 2.1.14 c) un autre immeuble $V_1 \times I'$; c'est le produit de l'espace vectoriel $V_1 \simeq X_{*,K}(\mathrm{rad}(\mathcal{G}))\otimes\mathbb{R}$, par l'immeuble d'une donnée radicielle valuée de G. D'après 2.1.14 et 2.1.11 d) $V_1 \times I'$ n'a pas d'automorphisme non trivial respectant toute sa structure : on a rigidifié la situation.

L'immeuble $V_1 \times I'$ est appelé immeuble centré de $\mathcal{G}$ sur K, et noté $I_K(\mathcal{G})$; il est unique à isomorphisme unique près. Le quotient $I'_K(\mathcal{G}) = I_K(\mathcal{G})/V_1$ est muni d'appartements $A'_{\mathcal{S}}$ et les appartements de $I_K(\mathcal{G}) = V_1 \times I'_K(\mathcal{G})$ sont les produits $V_1 \times A'_{\mathcal{S}}$.

Si $\mathcal{G}$ est semi-simple, tout immeuble E.N.B. de $\mathcal{G}$ sur K est centré.

d) $I'_K(\mathcal{G})$ muni de l'action induite de G' est l'immeuble centré $I_K(\mathcal{G}')$ de $\mathcal{G}'$ sur K.

e) Un immeuble E.N.B. I de $\mathcal{G}$ a toutes les propriétés des immeubles rappelées au chapitre I ; en effet il est isomorphe à l'immeuble centré de $\mathcal{G}$, qui est un immeuble généralisé du groupe G au sens de I §3.

En particulier on sait que deux points (ou facettes, ou germes de demi-droites) de I sont contenus dans un même appartement.

f) On peut expliciter la correspondance entre les appartements d'un immeuble E.N.B. I de $\mathcal{G}$ sur K et les tores K-déployés maximaux de $\mathcal{G}$:

L'appartement $A_{\mathcal{S}}$ est la plus petite partie convexe non vide de I stable par $Z(\mathcal{S})$, (cf [11 ; 7.4.32]). [illegible]
[illegible] $H = \mathrm{Ker}(\nu : Z(\mathcal{S}) \longrightarrow Y(\mathcal{S})\otimes\mathbb{R})$

$N(\mathcal{S})$ est le stabilisateur de $A_{\mathcal{S}}$, (cf [11 ; 7.4.10]) ; par densité on en déduit que $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ et donc aussi $\mathcal{S}$ est uniquement déterminé par $A_{\mathcal{S}}$.

g) Les données radicielles (resp. valuations) de $\mathcal{G}$ sur K sont en correspondance bijective avec les tores K-déployés maximaux $\mathcal{S}$ (resp. les couples $(\mathcal{S},x)$ avec $x \in A^{1}_{\mathcal{S}}$) ; voir 2.1.2 (resp. 2.1.2 et 2.1.11 a).

Exemples 2.1.16 : a) Si $\mathcal{G}$ est un K-groupe réductif déployé, il a un immeuble ENB sur K, ([11 ; 6.2.3 b)]) : Choisissons un système de Chevalley $(X_a)_{a\in\Phi}$ du groupe déployé $(\mathcal{G},\mathcal{S})$, on a des isomorphismes de groupe x_a de $\mathcal{A}dd$ sur $\mathcal{U}_a$ et on vérifie facilement sur $\mathcal{SL}_{2,K}$, que l'on a, pour $t \in K^*$:

$m(x_a(t)) = x_{-a}(t^{-1})x_a(t)x_{-a}(t^{-1}) = a^{\vee}(t)m(x_a(1))$. D'autre part les $m(x_a(1))$ font partie d'un sous-groupe fini N_o de $N(\mathcal{S})$, image dans $\mathcal{G}(K)$ de $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$, (pour le modèle de Chevalley $\mathcal{G}_{\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{G}$ associé à (X_a)). Si $A_{\mathcal{S}}$ est un appartement de $(\mathcal{S},\mathcal{G})$ le groupe fini N_o fixe un point x, et pour définir la famille φ^x on peut choisir $\dot{m}_a = m(x_a(1))$, $\forall\, a \in \Phi$; on a donc : $\varphi_a^x(x_a(t)) = \frac{1}{2}\,\omega(a(a^{\vee}(t))) = \omega(t)$. Il reste à vérifier les conditions (i) et (ii) du théorème 2.1.14 : (i) est évident et (ii) résulte des formules de commutation de Chevalley.

b) Si $\mathcal{G}$ est un tore il a un immeuble ENB sur K ; un tel immeuble est réduit à un appartement.

c) Si $\mathcal{G}$ est K-anisotrope il a un immeuble ENB sur K ; un tel immeuble est réduit à un point.

d) $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ ont des immeubles ENB sur K si et seulement si $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ en a un et alors $I_K(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2) = I_K(\mathcal{G}_1) \times I_K(\mathcal{G}_2)$, de plus les appartements de $I_K(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)$ sont les produits d'appartements de $\mathcal{G}_1$ et de $\mathcal{G}_2$: En effet les

vérifications de i) et ii) pour $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ se font séparément sur $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$. D'autre part le coradical du produit est le produit des coradicaux et le dernier résultat vient donc du résultat analogue pour les immeubles des données radicielles valuées, qui est évident par construction.

e) Si f est une isogénie centrale de $\mathcal{G}_1$ dans $\mathcal{G}_2$ alors $\mathcal{G}_1$ a un immeuble ENB sur K si et seulement si $\mathcal{G}_2$ en a un ; de plus alors $I_K(\mathcal{G}_1) \simeq I_K(\mathcal{G}_2)$ avec les mêmes appartements :

Les conditions i) et ii) du théorème ne portent que sur les U_a et les φ_a^x, mais ceux-ci sont "fonctoriels" par isogénie centrale car $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ ont même rang relatif sur K ([2 ; §2]), on a donc bien l'équivalence annoncée. Alors G_1 agit sur $I_K(\mathcal{G}_2)$ et, comme les coradicaux sont isogènes, on vérifie facilement que $I_K(\mathcal{G}_2)$ est un immeuble centré de $\mathcal{G}_1$ sur K.

f) Le résultat précédent permet d'étendre le résultat du d) au cas des produits presque directs. On peut donc ramener l'étude des immeubles ENB au cas des tores et des groupes simples.

2.1.17 Démonstration du théorème 2.1.14 : 1) Donnons-nous un tore K-déployé maximal $\mathcal{S}_o$ et un point x d'un appartement $A_{\mathcal{S}_o}$ de $(\mathcal{S}_o,\mathcal{G})$ et montrons l'équivalence de A, B, C.

Remarque 1 : Si I est un quasi-immeuble de $\mathcal{G}$ sur K, $U^x_{a,k}$ est le fixateur dans U_a de $D^x(a+k)$: $\forall\, z \in A_{\mathcal{S}}$ $\forall\, u \in U_a$, $u(z) = z \Longleftrightarrow a(z-x) + \varphi_a^x(u) \geq 0$:

Dans un sens c'est évident (2.1.13 b)). Dans l'autre écrivons $m(u) = u'.u.u''$ avec $u',u'' \in U_{-a}$; si $a(z-x) + \varphi_a^x(u) < 0$ z est fixé par u' et u'' (β) et remarque 2). Si u fixe z alors $m(u)$ aussi et d'après α) et

2.1.10 b) on a $a(z-x) + \varphi_a^x(u) = 0$.

Remarque 2 : $\forall u \in U_a^*$, écrivons $m(u) = u'.u.u''$ avec $u',u'' \in U_{-a}^*$; alors $m(u') = m(u'') = m(u)$ et $\varphi_{-a}^x(u') = \varphi_{-a}^x(u'') = -\varphi_a^x(u)$.

On a $u' = (m(u)u''^{-1}m(u)^{-1})m(u)u^{-1}$, donc $m(u') = m(u)$ de plus $\varphi_{-a}(u') = \frac{1}{2c}\,\omega(\chi_{-a}(m(u)m_a^{-1})) = -\frac{1}{2c}\,\omega(\chi_a(m(u)m_a^{-1})) = -\varphi_a(u)$. Et on procède de même pour u'' .

A $\Longrightarrow$ B : D'après la remarque 1, i) résulte des conditions α) et β) de 2.1.12, et ii) pour $a = b$ de α, β, δ . Il reste à voir ii) pour a et b non colinéaires. On sait (théorème 2.1.2) que l'on peut écrire : $(u,u') = \Pi\, u_{p,q}$ avec $u_{p,q} \in U_{pa+qb}$, où le produit est étendu aux couples d'entiers positifs non tous deux pairs (p,q) tels que $pa+qb$ soit une racine. Alors (u,u') fixe $C = D^x(a+r) \cap D^x(b+s)$ et il s'agit de montrer que chacun des $u_{p,q}$ fixe C . Mais l'ensemble des points de $A_{\mathcal{S}_o}$ fixes par $u_{p,q}$ est un demi-appartement limité par un mur parallèle au noyau de $pa+qb$; et deux tels noyaux pour des (p,q) distincts ne sont pas parallèles. Il est facile de voir, (au besoin en faisant le dessin pour chaque système de racines de rang 2), que, si un $u_{p,q}$ ne fixe pas C , alors il existe un point z de C fixé par tous les $u_{p,q}$ sauf un, ce qui est absurde puisque z est fixé par (u,u') .

B $\Longrightarrow$ C : Nous devons vérifier pour la famille φ^x les conditions V_o à V_5 de 1.1.3. La condition V_o vient de ce que $\varphi_a^x(u)$ n'est pas toujours $+\infty$ et que $\varphi_a^x({}^s u) = \omega(a(s)) + \varphi_a(u)$. Les conditions V_1 et (i) ou V_3 et (ii) sont équivalentes. La condition V_4 est claire. La condition V_5 est la remarque 2.

Si $n \in M_a$, $u \in U_{-a}^*$, u' et $u'' \in U_a^*$ avec $m(u) = u'.u.u''$ alors ${}^n m(u) = {}^n u'.{}^n u.{}^n u'' = m({}^n u)$ et on a :

$$\varphi_a^x({}^n u) = \frac{1}{2c}\,\omega(\chi_a(m({}^n u)m_a^{-1})) = \frac{1}{2c}\,\omega(\chi_a(n\, m(u)n^{-1}m_a^{-1}))$$
$$= \frac{1}{2c}\,\omega(\chi_{-a}(m_a.n.m(u)^{-1}.n^{-1}))$$
$$= \frac{1}{2c}\,\omega(\chi_{-a}(m_a n)) + \frac{1}{2c}\,\omega(\chi_{-a}(m(u)^{-1}n^{-1}))$$
$$= \frac{1}{2c}\,\omega(\chi_{-a}(m_a.n.m_{-a}.n^{-1})) + \frac{1}{2c}\,\omega(\chi_{-a}(m(u^{-1})m_{-a}^{-1}))$$
$$= \varphi_{-a}^x(u^{-1}) + \text{constante} \; ; \text{ d'où } V_2 \text{ connaissant } V_1 \; .$$

C $\Longrightarrow$ A : Si I" est l'immeuble de la donnée radicielle valuée, et si $\mathcal{S}$ est un tore K-déployé maximal de $\mathcal{G}$, soit $A''_{\mathcal{S}}$ l'appartement de I" associé à $\mathcal{S}$. Alors $V_1 \times I''$ muni des appartements $V_1 \times A''_{\mathcal{S}}$ est un immeuble ENB de $\mathcal{G}$ sur K :

δ) découle de β) et V_3 et γ) est évident. $V_1 \times A''_{\mathcal{S}}$ est un appartement de $(\mathcal{S},\mathcal{G})$; les racines $a \in \Phi$ s'annulent sur V_1 et l'image d'un élément unipotent dans corad($\mathcal{G}$) est 1 , ainsi β) découle de l'assertion correspondante pour I" (cf 1.1.8). Pour α) on sait que l'opération de N sur $V_1 \times A''$ a la bonne image vectorielle, on doit donc regarder l'opération de Z . Si $z \in Z$, soit $\nu(z)$ le vecteur de la translation qu'effectue z sur $V_1 \times A''$; pour toute racine a la comparaison de 1.1.6 (ii) et 2.1.10 b) permet d'affirmer que $a(\nu(z))$ a la bonne valeur. Il reste à vérifier les valeurs $\chi(\nu(z))$ pour $\chi \in X_K^*(\mathrm{corad}(\mathcal{G}))$; mais alors χ s'annule sur A" et la vérification est évidente.

2) Montrons maintenant les assertions a), b), c) du théorème.

b) Soient I un immeuble ENB de $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}$ un tore K-déployé maximal et $A_{\mathcal{S}}$ l'appartement correspondant de I , alors la paire $(A'_{\mathcal{S}}, \nu')$ construite en 2.1.10 d) s'identifie canoniquement à l'appartement $A''_{\mathcal{S}}$ de l'immeuble I" de la donnée radicielle valuée, (cf ci-dessus $C \Longrightarrow A$) .

Remarque 3 : Pour tous $x_1, x_2 \in A_{\mathcal{S}}$, soient x'_1 , x'_2 leurs images dans $A'_{\mathcal{S}} \simeq A''_{\mathcal{S}}$, alors pour tout $g \in G$ on a une décomposition $g = g_1 n g_2$ où n appartient à N et $g_i \in G'$ fixe $V_1.x_i$ pour son action dans I et x'_i pour son action dans I'' :

D'après la décomposition de Bruhat affine (1.1.12 4)) il suffit de voir que si $g_i \in G'$ fixe x'_i , alors il fixe $V_1.x_i$; mais cela résulte de 2.1.10 a) et d) et de la définition des immeubles (1.1.8 et 2.1.12).

Reprenons la démonstration du b). Soient $\mathcal{S}'$ un tore K-déployé maximal, $A_{\mathcal{S}'}$ l'appartement de I correspondant, $x_1 \in A_{\mathcal{S}'} \cap A_{\mathcal{S}}$, $g \in G$ tel que $\mathcal{S}' = g\,\mathcal{S}\,g^{-1}$ donc $A_{\mathcal{S}'} = g.A_{\mathcal{S}}$ et $x_2 = g^{-1}.x_1 \in A_{\mathcal{S}}$. Introduisons la décomposition de la remarque 3, alors, sachant que les actions de N et V_1 sur $A_{\mathcal{S}}$ commutent, on a, pour tout $v \in V_1$:

$$g.(v.x_2) = g_1.n.v.x_2 = g_1.v.n.x_2 = g_1.v.g_1^{-1}.gx_2 = g_1.v.g_1^{-1}.x_1 = vx_1 \ .$$

Ainsi si $x_1 \in A_{\mathcal{S}} \cap A_{\mathcal{S}'}$, $V_1.x_1 \subset A_{\mathcal{S}} \cap A_{\mathcal{S}'}$ et l'action de V_1 sur $A_{\mathcal{S}} \cap A_{\mathcal{S}'}$ est la même dans $A_{\mathcal{S}}$ ou $A_{\mathcal{S}'}$. On peut ainsi définir une action de V_1 sur I . Cette action commute à l'action de g , car si un automorphisme intérieur échange $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, il échange $X_*(\mathcal{S}) \otimes \mathbb{R}$ et $X_*(\mathcal{S}') \otimes \mathbb{R}$ en échangeant $V_{1,\mathcal{S}}$ et $V_{1,\mathcal{S}'}$ de manière compatible aux identifications canoniques de $V_{1,\mathcal{S}}$ et $V_{1,\mathcal{S}'}$ avec V_3 (cf 2.1.6).

Comme tout automorphisme des appartements est induit par V_1 (cf 2.1.10 c)) on a achevé la démonstration du b).

c) D'après 2.1.10 d), on voit que I' est un immeuble ENB de $\mathcal{G}'$ sur K ; comme on a vu ci-dessus ($C \Longrightarrow A$) que $V_1 \times I''$ est un immeuble ENB de $\mathcal{G}$ sur K , il suffit pour montrer le c) de montrer que I' s'identifie canoniquement à I''.

Soient $\mathcal{S}$ un tore K-déployé maximal, x_1 , x_2 deux points de $A_{\mathcal{S}}$ et x'_1 , x'_2 leurs images dans $A'_{\mathcal{S}}$. La remarque 3 montre que, pour tout g dans G , on a $x'_1 = g\,x'_2$ dans I' si et seulement si il existe n dans N tel que $x'_1 = n\,x'_2$ et que $g^{-1}.n$ fixe x'_2 dans I' . Mais comme N agit de la même manière sur $A''_{\mathcal{S}}$ et $A'_{\mathcal{S}}$, la remarque 3 montre que le fixateur de $x'_2 \in A'_{\mathcal{S}} \simeq A''_{\mathcal{S}}$ est le même si on considère x'_2 dans I' ou dans I'' . Par définition même de l'immeuble I'' (1.1.8 et 1.1.10), l'identification canonique de $A'_{\mathcal{S}}$ et $A''_{\mathcal{S}}$ fournit une identification canonique de I' et I'' .

a) Etant donnée la remarque 1, l'axiome δ) des immeubles ENB est équivalent à l'axiome ii) pour $a = b$, d'où la première assertion du a). Pour montrer l'unicité de l'immeuble il suffit d'après la partie c) de montrer que si I est un immeuble ENB , I est isomorphe à $V_1 \times I'$.

Choisissons un point spécial x de $A_{\mathcal{S}}$, et notons $A^1_{\mathcal{S}}$ le sous espace affine de $A_{\mathcal{S}}$ enveloppe convexe de $(Z \cap G').x$; il est clair que $I^1 = G'.A^1_{\mathcal{S}}$ est un immeuble ENB de $\mathcal{G}'$, et c'est donc un relèvement de $I' \simeq I''$ d'après l'assertion d'unicité déjà démontrée au c) pour les semi-simples. Alors, comme ensemble muni d'appartements, I est isomorphe à $V_1 \times I^1$ et il s'agit de vérifier que l'action de G est la même sur les deux termes. C'est clair pour un élément de G' , et comme les tores K-déployés maximaux de $\mathcal{G}$ sont conjugués par G' , il suffit d'identifier les actions de $N(\mathcal{S})$ sur $A_{\mathcal{S}}$ et $A^2_{\mathcal{S}} = V_1 \times A^1_{\mathcal{S}} \simeq V_1 \times A'_{\mathcal{S}}$, ce qui est immédiat.

Remarque 2.1.18 : Les assertions suivantes modifiées de celles du théorème 2.1.14 sont équivalentes : (A') : $\mathcal{G}$ a un quasi-immeuble ; (B') = (B , sauf ii) pour $a = b$) ; (C') : φ^x est une quasi-valuation. En effet on a vu en 1.1.8 qu'une quasi-valuation permet de construire un immeuble ; les autres implications se démontrent comme en 2.1.17.

On peut se demander si l'existence d'un quasi-immeuble implique l'existence d'un immeuble ENB ; c'est vrai pour ω dense (lemme suivant) ou si $\mathcal{G}$ n'a pas de facteur de type relatif BC_1 (lemme 1.1.4). De plus le lemme suivant et les résultats 2.3.1a et 5.1.1 à venir, montrent que si K est hensélien et si $\mathcal{G}$ a un quasi-immeuble sur toute extension galoisienne finie modérément ramifiée L de K , alors $\mathcal{G}$ a un immeuble sur K .

Lemme 2.1.19 : Supposons la valuation ω dense, alors l'assertion B ii) de 2.1.14 pour $a = b$ est une conséquence de l'assertion B i).

Démonstration : 1) Pour toute extension L de K , pour tout $s \in \mathcal{S}(L)$ et tous $u,u' \in \mathcal{U}_a(L)$ on a $({}^{s^2}u,u') = {}^{s}(u,u')$:

On peut ne considérer que des extensions L/K qui déploient un tore maximal K-défini $\mathcal{T}$ contenant $\mathcal{S}$. Alors $\mathcal{U}_a \otimes L$ est isomorphe au produit des $\mathcal{U}_b$ pour $b \in \Phi(\mathcal{T})$ et $b_{|\mathcal{S}} = a$ ou $2a$. Mais si b et b' vérifient cette relation, alors forcément $b + 2b'$ et $2b + b'$ ne sont plus des racines et : $\forall\, u \in \mathcal{U}_b(L)$ $\forall\, u' \in \mathcal{U}_{b'}(L)$ $(u,u') \in \mathcal{U}_{b+b'}(L)$. Avec les notations de 2.1.16 a) les formules de Chevalley montrent que : $(x_b(t),x_{b'}(t')) = x_{b+b'}(\lambda tt')$ avec $\lambda = \pm 1 , \pm 2 , \pm 3$.

On a alors : $({}^{s^2}x_b(t),x_{b'}(t')) = (x_b(b(s^2)t),x_{b'}(t')) = (x_b(a(s)^2t),x_{b'}(t'))$

$= x_{b+b'}((2a)(s)\lambda tt') = {}^{s}x_{b+b'}(\lambda tt')$.

On a donc montré le résultat pour un système de générateurs de $\mathcal{U}_a(L)$; mais si $x,y \in \mathcal{U}_a(L)$, alors $(x,y) \in \mathcal{U}_{2a}(L)$ et commute à $\mathcal{U}_a(L)$, on a donc, pour x_1 , x_2 , y_1 , $y_2 \in \mathcal{U}_a(L)$:

$$\begin{aligned}(x_1x_2,y_1y_2) &= x_1x_2y_1y_2x_2^{-1}x_1^{-1}y_2^{-1}y_1^{-1} = (x_2,y_1)x_1y_1x_2y_2x_2^{-1}x_1^{-1}y_2^{-1}y_1^{-1}\\ &= (x_2,y_1)(x_2,y_2)x_1y_1y_2x_1^{-1}y_2^{-1}y_1^{-1}\\ &= (x_2,y_1)(x_2,y_2)(x_1,y_1)y_1x_1y_2x_1^{-1}y_2^{-1}y_1^{-1}\\ &= (x_2,y_1)(x_2,y_2)(x_1,y_1)(x_1,y_2) .\end{aligned}$$

nous forme le généralisée de Scott (Bourbaki) 3.4.2

$(\prod x_i, \prod y_j) = \prod (x_i,y_j)^{h_{i,j}}$ corrigé

Et le résultat annoncé est vrai en général car vrai pour des générateurs.

2) Soient $u,u' \in U_a^*$ et s_n une suite d'éléments de S telle que $\omega(a(s_n))$ tende vers $\frac{1}{2}(\varphi_a^x(u') - \varphi_a^x(u))$ par valeurs supérieures. Alors $\varphi_a^x({}^{s_n^2}u) = 2\omega(a(s_n)) + \varphi_a(u) \geqslant \varphi_a(u')$; et comme les $U_{a,k}^x$ sont des groupes, $\varphi_a^x(({}^{s_n^2}u,u')) \geqslant \varphi_a(u')$. Donc $2\varphi_a(u') \leqslant \varphi_{2a}(({}^{s_n^2}u,u')) = \varphi_{2a}({}^{s_n}(u,u'))$

$$= \varphi_{2a}((u,u')) + 2\,\omega(a(s_n)) .$$

On obtient alors le résultat cherché en passant à la limite.

Remarque : La première partie de la démonstration ci-dessus équivaut au résultat connu suivant : L'application de $(\mathcal{U}_a/\mathcal{U}_{2a}) \times (\mathcal{U}_a/\mathcal{U}_{2a})$ dans $\mathcal{U}_{2a}$ induite par l'application "commutateur" est bilinéaire (pour les structures de schémas en espace vectoriel introduites en 2.3.2).

§2 Métriques et bornologies

Définition 2.2.1 : Si I est un immeuble ENB de $\mathcal{G}$ sur K, on appelle métrique invariante sur I une métrique de I telle que :

- G agit sur I par des isométries.
- Sur tout appartement la métrique induite est euclidienne.

Proposition 2.2.2 : 1) Soit $A_{\mathcal{S}_0}$ un appartement de I ; l'application qui a une métrique invariante sur I associe sa restriction à $A_{\mathcal{S}_0}$ est une bijection de l'ensemble des métriques invariantes, sur l'ensemble des métriques euclidiennes de $A_{\mathcal{S}_0}$ associées à un produit scalaire invariant par le groupe de Weyl. Il existe donc des métriques invariantes sur I.

2) Si I est l'immeuble centré $I_K(\mathcal{G})$, les espaces euclidiens $A_{\mathcal{S}}$ sont les sommes orthogonales de V_1 et $A'_{\mathcal{S}}$, pour toute métrique invariante.

Démonstration : On peut supposer que $I = I_K(\mathcal{G})$. Une métrique invariante induit sur $A = A_{\mathcal{S}_0}$ une métrique euclidienne pour laquelle $\nu(N)$ est un groupe d'isométries, le produit scalaire associé sur l'espace V des translations est donc invariant par ${}^v\nu(N) = {}^vW$.

Deux métriques invariantes qui induisent la même métrique sur A, induisent la même sur tous les appartements, elles coïncident donc, car deux points sont toujours contenus dans un même appartement.

Considérons sur V un produit scalaire invariant par ${}^vW$, les coracines s'identifient donc, à une constante près, aux racines correspondantes et V_1 est orthogonal à toutes les coracines. Ainsi $A_{\mathcal{S}}$ est somme orthogonale de V_1 et $A'_{\mathcal{S}}$. On sait (1.1.9 4)) qu'il existe sur $I'_K(\mathcal{G})$ une métrique invariante induisant sur $A'_{\mathcal{S}}$ la métrique euclidienne donnée. D'autre part G agit sur V_1 par des translations, la métrique sur I cherchée est la somme euclidienne (ie $d((x,y),(x',y'))^2 = d(x,x')^2 + d(y,y')^2$) de la métrique sur I' et de celle sur V_1.

2.2.3 Normalisation : a) Si $\mathcal{G}$ est déployé on dit qu'un produit scalaire ${}^vW$-invariant sur $V = X_*(\mathcal{S}) \otimes \mathbb{R}$ est normalisé si, pour le produit scalaire induit dans le dual $X^*(\mathcal{S}) \otimes \mathbb{R}$ de V, les racines courtes ont pour norme 1. La norme d'une racine peut alors être 1, $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$.

b) Si $\mathcal{G}$ n'est pas déployé on choisit un tore maximal $\mathcal{T}$ contenant $\mathcal{S}$ (non forcément K-défini). On appelle produit scalaire normalisé sur $V = X_*(\mathcal{S}) \otimes \mathbb{R}$, un produit scalaire induit par un produit scalaire normalisé sur $X_*(\mathcal{T}) \otimes \mathbb{R}$. Comme ${}^vW(\mathcal{S})$ s'identifie à la restriction à $X_*(\mathcal{S})$ de la partie du groupe de Weyl absolu ${}^vW(\mathcal{T})$ qui stabilise $X_*(\mathcal{S})$, (cf [1 ; 5.5]), un produit scalaire normalisé est ${}^vW$-invariant.

Cette définition est indépendante du choix de $\mathcal{T}$, car $\mathfrak{Z}(\bar{K})$ permute transitivement les $\mathcal{T}$ en échangeant les systèmes de racines.

c) On appelle métrique normalisée sur un appartement $A_{\mathcal{S}}$ de $(\mathcal{S},\mathcal{G})$ une métrique induite par un produit scalaire normalisé sur $V = X_*(\mathcal{S}) \otimes \mathbb{R}$.

d) Si I est un immeuble ENB de $\mathcal{G}$ sur K, on appelle métrique normalisée sur I une métrique invariante qui induit sur un appartement, (donc sur tous), une métrique normalisée.

<u>Remarques</u> 2.2.4 : a) Deux métriques normalisées sur l'immeuble centré $I_K(\mathcal{G})$ coïncident sur $I'_K(\mathcal{G})$. Par contre la métrique euclidienne induite par une métrique normalisée sur V_1 est quelconque.

b) Si d_1 et d_2 sont deux métriques invariantes sur un immeuble ENB I de $\mathcal{G}$, elles sont <u>fortement équivalentes</u> :

$\exists\, c_1, c_2 > 0$ tels que $\forall\, x,y \in I \quad c_1 d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant c_2 d_1(x,y)$.

En effet il suffit de le vérifier pour deux métriques euclidiennes sur un même espace affine (de dimension finie).

c) Dans toute la suite, un immeuble ENB de $\mathcal{G}$ sur K sera toujours considéré comme muni de la collection de ses métriques normalisées.

<u>Définition</u> 2.2.5 (cf [11 ; 3.1.1]) : Une <u>bornologie</u> sur un ensemble X est un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de X, dites <u>parties bornées</u>, stable par réunion finie, contenant les points de X et tel que $M \in \mathcal{B}$ et $M' \subset M$ entraîne $M' \in \mathcal{B}$. Si X est un groupe, on dit que $\mathcal{B}$ est <u>compatible</u> avec la loi de groupe ou fait de X un <u>groupe bornologique</u>, si $M, M' \in \mathcal{B}$ entraîne $M^{-1}M' \in \mathcal{B}$.

<u>Exemples</u> 2.2.6 : a) Si X est un ensemble, on appelle <u>structure lipschitzienne</u> sur X, la donnée d'un système complet (d_i) de métriques fortement équivalentes. Ainsi un immeuble ENB de $\mathcal{G}$ a une structure lipschitzienne canonique.

Si $(X,(d_i))$ est un espace Lipschitzien l'ensemble des parties de X bornées pour une métrique d_i, forme une bornologie sur X.

b) Si X' est un groupe bornologique et $\varphi : X \to X'$ un homomorphisme de groupes, l'ensemble des parties de X dont l'image dans X' est bornée, est une bornologie sur X compatible avec la loi de groupe de X et appelée <u>image réciproque de la bornologie de</u> X' <u>par</u> φ.

c) Soit $(X,(d_i))$ un espace Lipschitzien. On note $\mathrm{Bilip}(X,(d_i))$ le groupe des bijections lipschitziennes dans les deux sens, c'est à dire telles que l'image réciproque d'une métrique d_i est une métrique fortement équivalente.

Alors $\mathrm{Bilip}(X,(d_i))$ est un groupe bornologique si on considère comme bornées les parties M du groupe telles que :

(i) Pour toute partie bornée Y de X, l'ensemble des $g(x)$ et $g^{-1}(x)$ pour $g \in M$ et $x \in Y$ est borné dans X.

Si M est formé d'isométries pour une des métriques d_i, la condition précédente est équivalente à :

(ii) Il existe un point x de X tel que l'ensemble des $g(x)$ pour $g \in M$ soit borné dans X.

<u>Exemple</u> 2.2.7 : 1) Soit $\mathcal{Y} = \mathrm{Spec}(R)$ un schéma algébrique affine sur le corps valué (K,ω), on appelle <u>bornologie naturelle</u> sur l'ensemble $Y = \mathcal{Y}(K)$, la bornologie dont les parties bornées sont les parties X vérifiant les conditions équivalentes suivantes :

(i) Pour tout $f \in R$, $f(X)$ est une partie bornée de K, c'est à dire : $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, y \in X \quad \omega(f(y)) \geqslant c$.

(ii) $f_i(X)$ est une partie bornée de K, pour des fonctions $f_1,\dots,f_n$ engendrant la K-algèbre R.

2) On a les propriétés suivantes :

a) L'image d'un borné par un morphisme de schémas affines est un borné.

b) La bornologie induite par la bornologie naturelle de Y sur un sous schéma affine fermé $\mathcal{Y}'$ de $\mathcal{Y}$ est la bornologie naturelle de Y'.

c) Les bornés naturels de $GL_n(K)$ sont les ensembles de matrices à coefficients et à inverse de déterminant bornés.

d) Si $\mathcal{Y}$ est un schéma en groupe, $\mathcal{Y}(K)$ est un groupe bornologique (grâce à b), on se ramène au cas c)).

e) Si (L,ω) est une extension valuée de (K,ω), la bornologie naturelle sur $\mathcal{Y}(L)$ induit sur $\mathcal{Y}(K)$ la bornologie naturelle.

<u>Lemme</u> 2.2.8 : <u>L'image réciproque de la bornologie naturelle par un morphisme entier est la bornologie naturelle</u>.

<u>Démonstration</u> : Soient $g : \mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(R')$ ce morphisme et M un borné de $\mathrm{Spec}(R')(K)$; d'après 2.2.7 a) il suffit de montrer que $g^{-1}(M)$ est borné. Si $f \in R$, f vérifie une équation de dépendance intégrale dont les coefficients sont de la forme $g^*(f_i)$ pour $f_i \in R'$; comme les f_i sont bornés sur M, f est borné sur $g^{-1}(M)$.

2.2.9 Soit $\mathcal{G}_1$ un groupe réductif sur K, considérons la condition :

(DA) Une partie M de $\mathcal{G}_1(K)$ est bornée si et seulement si pour tout $\chi \in X_K^*(\mathcal{G}_1)$, $\chi(M)$ est borné dans K.

<u>Remarque</u> : Un des sens de l'équivalence est toujours vrai, l'autre est vrai, par exemple, pour les tores déployés. D'après le lemme ci-dessous, la condition (DA) pour un groupe réductif $\mathcal{G}_1$, se vérifie sur le groupe dérivé $\mathcal{G}_1'$, le tore anisotrope $\mathcal{T}_a$ et le tore déployé du radical de $\mathcal{G}_1$. Le groupe $\mathcal{G}_1$ vérifie donc (DA) si et seulement si G_1' et T_a sont bornés. Cela implique que $\mathcal{G}_1'$ est anisotrope sur K ; nous verrons la réciproque pour K hensélien (5.2.3).

pour des groupes réductifs

<u>Lemme</u> 2.2.10 : <u>La condition</u> (DA) <u>est invariante par isogénie centrale</u>.

<u>Démonstration</u> : Soit $g : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ une isogénie centrale, alors $X_K^*(\mathcal{G}_2)$ s'identifie à un sous $\mathbb{Z}$-module d'indice fini de $X_K^*(\mathcal{G}_1)$ et comme cette isogénie est un morphisme fini donc entier, le lemme 2.2.8 montre que si $\mathcal{G}_2$ vérifie (DA), $\mathcal{G}_1$ aussi.

Pour la réciproque, considérons les isogénies centrales :

$$\mathrm{rad}(\mathcal{G}_1) \times \mathcal{G}_1' \to \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2 \to \mathrm{corad}(\mathcal{G}_2) \times \mathcal{G}_2^{ad},$$

on est donc ramené à considérer deux cas :

1) $\mathcal{G}_1$ est semi-simple, vérifie (DA) et $\mathcal{G}_2$ est le groupe adjoint $\mathcal{G}_1^{ad}$ de $\mathcal{G}_1$.

Considérons une représentation linéaire fidèle ρ de $\mathcal{G}_1$ dans $\mathcal{G}\ell(V)$. On peut alors définir la représentation ρ_1 de $\mathcal{G}_1$ dans $\mathcal{G}\ell(\mathrm{End}(V))$ par $\rho_1(g).h = \rho(g) \circ h \circ \rho(g^{-1})$. Soit E le sous espace vectoriel de $\mathrm{End}(V)$ engendré par $\rho(G_1)$; comme G_1 est Zariski-dense dans $\mathcal{G}_1$, E est stable par $\rho_1(\mathcal{G}_1)$ et on obtient une représentation ρ_2 de $\mathcal{G}_1$ dans $\mathcal{G}\ell(E)$. Comme ρ était fidèle, le noyau de ρ_2 est le centre de $\mathcal{G}_1$, on en déduit donc une représentation fidèle η de $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1^{ad}$ dans $\mathcal{G}\ell(E)$. Mais $\mathcal{G}_1 \simeq \rho(\mathcal{G}_1)$ est un sous-schéma fermé du K-schéma vectoriel construit sur le K-espace vectoriel E ; comme $\mathcal{G}_1$ est stable par $\rho_2(\mathcal{G}_1)$ il est stable par $\eta(\mathcal{G}_2)$. Ainsi G_2 stabilise $\rho(G_1)$, qui, par hypothèse, est borné, (puisque $X^*(\mathcal{G}_1) = \{0\}$), donc G_2 est borné (2.2.7 a), b), c)) et $\mathcal{G}_2$ vérifie (DA).

2) $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ sont des tores et $\mathcal{G}_1$ vérifie (DA) :

Il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que l'application élévation à la puissance $N^{\text{ième}}$ de $\mathcal{G}_1$ dans $\mathcal{G}_1$ se factorise par $\mathcal{G}_2$. En effet pour montrer cette existence et cette factorisation on peut supposer K algébriquement clos et alors raisonner sur les caractères de $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$, ([13 ; IV §1 n° 1]). On a ainsi une isogénie centrale de $\mathcal{G}_2$ sur $\mathcal{G}_1$, donc $\mathcal{G}_2$ vérifie (DA).

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "N"'] & \mathcal{G}_2 \arrow[d, dashed] \\ & \mathcal{G}_1 \end{tikzcd}$$

Théorème 2.2.11. Soient I un immeuble ENB de $\mathcal{G}$ sur K, $\mathcal{S}$ un tore K-déployé maximal de $\mathcal{G}$, $A_{\mathcal{S}}$ l'appartement correspondant de I et x un point de $A_{\mathcal{S}}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) La bornologie naturelle de G est la bornologie image réciproque de la bornologie du groupe des bijections bilipschitziennes de I.

(ii) Le stabilisateur dans G d'une partie bornée quelconque de I est borné.

(iii) Le fixateur dans G d'un point donné y de I est borné.

(iv) $H = \operatorname{Ker}(\nu : N(\mathcal{S}) \to \operatorname{Aut}(A_{\mathcal{S}}))$ et les $U^x_{a,k}$ sont bornés, pour $k \in \mathbb{R}$.

(v) Z' et les $U^x_{a,k}$ sont bornés ; $\operatorname{rad}(\mathcal{Z})$ vérifie (DA).

(vi) $ss(\mathcal{Z})(K)$ et les $U^x_{a,k}$ sont bornés ; $\operatorname{corad}(\mathcal{Z})$ vérifie (DA).

Remarque : Quand on parle de bornés dans G sans préciser, il s'agit de bornés naturels.

Démonstration : (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) : évident.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) : Par conjugaison dans $\mathcal{G}$, l'assertion (iii) est vraie pour les points y d'un réseau de l'espace $A_{\mathcal{S}}$. Alors H, qui fixe chacun de ces points, et chaque $U^x_{a,k}$, qui fixe un de ces points, sont bornés.

(iv) $\Longrightarrow$ (v) : Z' et le groupe des points dans K du tore anisotrope de $\operatorname{rad}(\mathcal{Z})$ sont contenus dans H ; d'où le résultat (2.2.9).

(v) $\Longleftrightarrow$ (vi) $\Longleftrightarrow$ les $U^x_{a,k}$ sont bornés et $\mathcal{Z}$ vérifie (DA) (2.2.10).

Supposons (vi), alors $\mathcal{Z}$ vérifie (DA), et la bornologie naturelle de Z coïncide avec la bornologie image réciproque de l'action de Z sur $A_{\mathcal{S}}$; il en est donc de même pour N puisque N/Z est fini. De plus U_a n'est pas borné, puisque $\omega(\lambda_\chi(U_a^*)) = 2c\varphi_a^x(U_a^*)$ n'est pas borné inférieurement (2.1.5) et que λ_χ est une fonction régulière sur $\mathcal{U}_a$ (2.1.4) ; et, par hypothèse de (vi), les $U^x_{a,k}$ sont bornés. Enfin pour la bornologie image réciproque de l'action de G sur I, U_a n'est pas borné ([11 ; 8.1.8]) et les $U^x_{a,k}$ le sont. Les deux bornologies sur G coïncident donc d'après [11 ; 8.1.5].

Définition 2.2.12 : On dit qu'un immeuble éventuellement non bornologique I de $\mathcal{G}$ sur K, est un immeuble (bornologique) de $\mathcal{G}$ sur K, si I satisfait aux conditions équivalentes (i), (ii), (iii) du théorème.

Remarques 2.2.13 : a) Les groupes $U^x_{a,k}$ ne dépendent de x qu'à une translation près sur les indices $k \in \mathbb{R}$, ils ne dépendent (ainsi que H, $\operatorname{rad}(\mathcal{Z})$ et $\operatorname{corad}(\mathcal{Z})$) de $\mathcal{S}$ qu'à conjugaison près ; les conditions (iv), (v), (vi) sont donc indépendantes du couple $(\mathcal{S}, x)$ choisi.

b) Comme les conditions (iv), (v) et (vi) du théorème ne dépendent pas de l'immeuble ENB, on voit que si $\mathcal{G}$ a un immeuble sur K, tout quasi-immeuble de $\mathcal{G}$ sur K est un immeuble (cf. 2.1.14 2)a)).

c) Il peut exister des groupes réductifs qui ont des immeubles ENB sans avoir d'immeuble. C'est le cas de tous les tores anisotropes dont le groupe des points rationnels n'est pas borné. Pour cela il est nécessaire que K ne soit pas hensélien, (5.2.4).

<u>Exemples</u> 2.2.14 : a) Si $\mathcal{G}$ est déployé sur K, il a un immeuble sur K :

En effet $\mathcal{G}$ a un immeuble ENB (2.1.16 a), Z' est réduit à un point, $\mathrm{rad}(\mathcal{G}) = \mathcal{S}$ est un tore déployé, donc vérifie (DA) (2.2.9) ; enfin $U^x_{a,k}$ est le groupe additif des éléments de $\mathcal{U}_a(K) \simeq \mathcal{A}dd(K) = K$ de valuation au moins k, il est donc borné : on conclut grâce à (vi).

b) Si $\mathcal{G}$ a un immeuble sur K, $\mathcal{G}'$ aussi : cela résulte de 2.1.14 c) et de la caractérisation (iv).

c) Si $\mathcal{G}$ est un tore ou un groupe réductif anisotrope, alors $\mathcal{G}$ a un immeuble si et seulement si $\mathcal{G}$ vérifie (DA), (cf. 2.1.16 b), c) et 2.2.9).

d) $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ ont des immeubles si et seulement si $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ en a un : cela résulte de 2.1.16 d) et de la caractérisation (iii).

e) L'existence d'un immeuble est invariante par isogénie centrale : cela résulte de 2.1.16 e), de la caractérisation (v) et du lemme 2.2.10. On a déjà noté en 2.1.16 e) que les $U^x_{a,k}$ sont les mêmes pour deux groupes centralement isogènes.

f) Le résultat précédent permet d'étendre le résultat du d) au cas des produits presque directs. On peut donc ramener l'étude des immeubles aux cas des tores et des groupes simples.

<u>Conjecture</u> 2.2.15 (cf [8] et [30]) : <u>$\mathcal{G}$ a un immeuble sur</u> K, <u>dès que</u> K <u>est hensélien</u>.

<u>Remarques</u> : On verra en 5.2.4 et 2.3.9, que cette conjecture de Bruhat et Tits se réduit à montrer que $\mathcal{G}$ a un immeuble ENB sur K complet. On a déjà signalé en 2.1.18 que si $\mathcal{G}$ a un quasi-immeuble sur toute extension finie (donc complète) du corps complet K, alors $\mathcal{G}$ a un immeuble sur K.

On peut reformuler la conjecture (voir 2.3.1).

§3 Passage au corps complété ; corps hensélien.

Proposition 2.3.1 : a) Si $\mathcal{G}$ a même rang relatif sur K et sur une extension valuée L, et si $\mathcal{G}$ a un immeuble sur L, il en a un sur K. De plus $I_K(\mathcal{G})$ est le sous-G-ensemble de $I_L(\mathcal{G})$ réunion des appartements $A_{\mathcal{S}}$ de $I_L(\mathcal{G})$ pour $\mathcal{S}$ tore K-déployé maximal de $\mathcal{G}$, et ces $A_{\mathcal{S}}$ sont les appartements de $I_K(\mathcal{G})$.

b) Si L est une extension algébrique valuée de K et si (L_i) est une famille de sous-extensions dont la réunion est L, alors, si $\mathcal{G}$ a un immeuble ENB sur chaque L_i, il en a un sur L.

Remarque : La conjecture de Bruhat-Tits s'écrit donc : $\mathcal{G}$ a un immeuble sur K, dès que $\mathcal{G}$ a même rang relatif sur K et son complété $\hat{K}$.

Démonstration de la proposition :

a) Soit $\mathcal{S}$ un tore K-déployé maximal, c'est donc aussi un tore L-déployé maximal, et un appartement $A_{\mathcal{S}}$ de $(\mathcal{S}\otimes L, \mathcal{G}\otimes L)$ est aussi un appartement de $(\mathcal{S},\mathcal{G})$; choisissons un point $x \in A_{\mathcal{S}}$. Alors tout ce que l'on construit pour K, $(\mathcal{U}_a, \varphi_a^x, \mathcal{Z}, \mathcal{N}, \nu)$, est induit par ce que l'on construit pour L, et il en est de même pour la bornologie naturelle (2.2.7 e). On conclut grâce à 2.1.14 B et 2.2.11 (v).

b) On peut supposer que $\mathcal{G}$ a même rang relatif sur L et chacun des L_i, alors $U^x_{a,k}(L) = \bigcup_i U^x_{a,k}(L_i)$ et la vérification des assertions (i) et (ii) de 2.1.14 B est immédiate.

Lemme 2.3.2 : Soient $\mathcal{S}$ un tore K-déployé maximal de $\mathcal{G}$, $A_{\mathcal{S}}$ un appartement de $(\mathcal{S},\mathcal{G})$, $x \in A_{\mathcal{S}}$, et a une racine de $\mathcal{G}$ par rapport à $\mathcal{S}$; rappelons que si $2a$ n'est pas une racine, on note $\mathcal{U}_{2a} = \{1\}$.

1) Il existe sur le quotient $\mathcal{U}_a/\mathcal{U}_{2a}$ une structure de schéma en espace vectoriel de dimension finie, définie sur K, telle que, pour toute extension L de K et tout $s \in \mathcal{S}(L)$ l'automorphisme intérieur $\mathrm{Int}(s)$ induise l'homothétie de rapport $a(s)$. Ces conditions déterminent uniquement la structure. Si L déploie un tore maximal $\mathcal{T}$ contenant $\mathcal{S}$, cette structure sur $(\mathcal{U}_a/\mathcal{U}_{2a})\otimes L$ est celle fournie par l'identification de $(\mathcal{U}_a/\mathcal{U}_{2a})\otimes L$ avec le produit commutatif des $\mathcal{U}_b \simeq \mathcal{A}dd$ pour $b \in \Phi(\mathcal{T})$ et $b_{|\mathcal{S}} = a$.

2) Supposons $\mathcal{G}$ défini sur un sous-corps K_1. Soit f un automorphisme algébrique de $\mathcal{G}$ sur K (resp. un élément du groupe des automorphismes de l'extension K/K_1), alors $f(a)$ est une racine de $\mathcal{G}$ relative au tore K-déployé maximal $f(\mathcal{S})$ et pour tout $u \in (\mathcal{U}_a/\mathcal{U}_{2a})(K)$ et tout $\mu \in K$ on a :

$$f(\mu.u) = \mu f(u) \quad (\text{resp.} = f(\mu)\cdot f(u)) \quad \text{calculé dans} \quad (\mathcal{U}_{f(a)}/\mathcal{U}_{f(2a)})(K)).$$

3) Il existe un sous-schéma $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}_a$, K-défini, stable pour l'action de $\mathcal{S}$ et isomorphe à $\mathcal{U}_a/\mathcal{U}_{2a}$ par l'application canonique de $\mathcal{U}_a$ dans $\mathcal{U}_a/\mathcal{U}_{2a}$. Ainsi l'application produit de $\mathcal{U}_{2a}\times\mathcal{V}$ dans $\mathcal{U}_a$ est un isomorphisme.

Soit L une extension valuée de K, si $u \in (\mathcal{U}_a/\mathcal{U}_{2a})(L)$ notons encore u le relèvement de u dans $\mathcal{V}(L)$, alors pour tout $\mu \in L$, on a :

$\varphi_a^x(\mu.u) = \omega(\mu) + \varphi_a^x(u)$.

Démonstration : 1) L'unicité de la structure est claire et l'existence résulte de [1;3.17].

2) Pour tout $s \in \mathcal{S}(K)$ et tout $u \in (\mathcal{U}_a/\mathcal{U}_{2a})(K)$, on a :

$f(a(s).u) = f({}^s u) = {}^{f(s)}f(u) = [f(a).f(s)].f(u)$ et $f(a).f(s) = a(s)$ (resp. $= f(a(s))$). L'application de K dans $(\mathcal{U}_a/\mathcal{U}_{2a})(K)$ qui à μ associe

$f^{-1}(\mu.f(u))$ (resp. $f^{-1}(f(\mu).f(u))$) est polynômiale et coïncide avec l'application polynômiale qui à μ associe $\mu.u$, pour une infinité de valeurs de la forme $a(s)$, avec $s \in \mathcal{S}(K)$. Les deux applications sont donc identiques.

3) On peut supposer que $\mathcal{G}$ est engendré par $\mathcal{Z}.\mathcal{U}_a$ et $\mathcal{U}_{-a}$, et aussi que $\mathcal{G}$ est adjoint. Considérons une extension galoisienne finie L' de K qui déploie un tore maximal de $\mathcal{G}$ contenant $\mathcal{S}$, alors il existe un relèvement $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{U}_a/\mathcal{U}_{2a}$ stable par $\mathcal{S}$, défini sur L' mais à priori pas sur K .

Soit $(u_i)_{i=1,p}$ une base de $(\mathcal{U}_a/\mathcal{U}_{2a})(K)$, pour tout i il existe un relèvement v_i de u_i dans U_a ([13;IV §4 3.7.b]). Choisissons des applications coordonnées $Y_1,\ldots,Y_n$ sur $\mathcal{U}_{2a}$ et soient $X_1,\ldots,X_p$ les applications coordonnées sur $\mathcal{V}'$ correspondant à la base (u_i). Comme $\mathcal{U}_a$ est isomorphe à $\mathcal{U}_{2a} \times \mathcal{V}'$, on peut considérer que v_i a pour coordonnées $(y_1^i,\ldots,y_n^i)$ sur $\mathcal{U}_{2a}$ et $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ sur $\mathcal{V}'$.

Soit $\mathcal{V}_i$ le sous-schéma, défini sur L' de $\mathcal{U}_a \simeq \mathcal{U}_{2a} \times \mathcal{V}'$ d'équations : $X_j = 0$ pour $j \neq i$ et $Y_k = y_k^i X_i^2$ pour $k = 1,\ldots,n$. Alors $\mathcal{V}_i$ est un relèvement du sous-schéma en espace vectoriel de $\mathcal{U}_a/\mathcal{U}_{2a}$ engendré par u_i et il est stable par $\mathcal{S}$. Mais $\mathcal{S}(K).v_i$ est dense dans $\mathcal{V}_i$ et formé de points rationnels sur K ; ainsi $\mathcal{V}_i$ est défini sur K .

Le sous-schéma $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}_a$ image de $\mathcal{V}_1 \times\ldots\times \mathcal{V}_p$ par l'application produit est défini sur K , stable par l'action de $\mathcal{S}$ et est un relèvement de $\mathcal{U}_a/\mathcal{U}_{2a}$.

Soit L une extension valuée de K ; d'après l'hypothèse faite sur $\mathcal{G}$, pour tout μ dans L^* il existe s_μ dans $\mathcal{S}(L)$ tel que $a(s_\mu) = \mu$. Si $u \in \mathcal{V}(L)$, $\mu.u$ est alors $s_\mu.u.s_\mu^{-1}$, et la dernière formule de 2.3.2 résulte de 2.1.5.

<u>Proposition</u> 2.3.3 : <u>Si le</u> K-<u>groupe réductif</u> $\mathcal{G}$ <u>a un immeuble ENB sur</u> K <u>et s'il a même rang relatif sur</u> K <u>et son complété</u> $\hat{K}$, <u>alors il a un immeuble ENB sur</u> $\hat{K}$.

<u>Remarque</u> : D'après 5.2.4, alors $\mathcal{G}$ a un immeuble sur $\hat{K}$ et donc aussi sur K , (2.3.1).

<u>Démonstration</u> : Soient $\mathcal{S}$ un tore K-déployé maximal, $A_{\mathcal{S}}$ un appartement de $(\mathcal{S},\mathcal{G})$ et x un point de $A_{\mathcal{S}}$; alors tout ce que l'on construit pour K , $(\mathcal{U}_a$, φ_a^x , $\mathcal{Z}$, $\mathcal{N}$, $\nu)$, est induit par ce que l'on construit pour $\hat{K}$. Montrons les assertions i) et ii) de 2.1.14 B).

La valuation induit une topologie séparée sur $\mathcal{G}(\hat{K})$ et, d'après le lemme 2.3.2, U_a est dense dans $\mathcal{U}_a(\hat{K})$. D'autre part par construction, l'application φ_a^x de $\mathcal{U}_a(\hat{K})$ dans $\mathbb{R}$ est continue, l'assertion (i) pour $\hat{K}$ se déduit donc par continuité de l'assertion (i) pour K . D'autre part dans la décomposition $(u,u') = \pi u_{p,q}$ les $u_{p,q}$ sont des fonctions continues de u et u' (cf Remarque 2.1.2) ; on démontre donc de même l'assertion (ii) pour $\hat{K}$.

<u>Proposition</u> 2.3.4 : <u>Supposons</u> K <u>complet</u>.

<u>Soient</u> $\mathcal{S}$ <u>un tore</u> K-<u>déployé maximal</u>, $A_{\mathcal{S}}$ <u>un appartement de</u> $(\mathcal{S},\mathcal{G})$ <u>et</u> x <u>un point de</u> $A_{\mathcal{S}}$, <u>alors</u> :

1) <u>Les</u> $U_{a,k}^x$ <u>sont bornés</u> <u>(pour</u> $k \in \mathbb{R}$).

2) <u>Si de plus les</u> $U_{a,k}^x$ <u>sont des sous-groupes de</u> U_a , <u>alors</u> U_a , <u>filtré par les</u> $U_{a,k}^x$ <u>est un groupe complet</u>. <u>Plus précisément l'isomorphisme construit en</u> 2.3.2 3) <u>de</u> $\mathcal{U}_a$ <u>sur un</u> K-<u>espace affine</u>, <u>introduit dans</u> U_a <u>une filtration par les valuations des coordonnées qui est équivalente à la filtration par</u>

les sous-groupes $U^{\chi}_{a,k}$.

Remarques : 1) Si on suppose que les $U^{\chi}_{a,k}$ sont des sous-groupes de U_a , alors on peut démontrer cette proposition sans faire référence au résultat de Greenberg généralisé dans l'annexe ; (cf [30]).

2) Il résulte de 2.3.9 ci-dessous que l'assertion 1) de la proposition est encore valable pour K hensélien. Alors la seconde partie de l'assertion 2 se démontre pour K-hensélien comme ci-dessous. Le seul résultat non valable pour K hensélien non complet est la complétion de U_a .

Démonstration de la proposition : 1) a) D'après le lemme 2.3.2, la K algèbre R des fonctions régulières sur $\mathcal{U}_a$, est un anneau de polynômes : $R = K[f_1,\dots,f_n]$; on peut de plus supposer chaque fonction f_i S-homogène de degré a ou $2a$ (i.e. $\forall u \in U_a$, $\forall s \in S$, $f_i({}^s u) = a(s)f_i(u)$ ou $a(s)^2 f_i(u)$; en particulier $f_i(1) = 0$). On sait (2.1.4) que λ_χ est S-homogène de degré $2.c.a$ et que $\lambda_\chi(U_a^*) \in K^*$. Quitte à multiplier λ_χ par une constante, c'est à dire à ajouter une constante à φ^{χ}_a , on peut supposer que λ_χ est un polynôme en les f_i , à coefficients dans $\mathcal{O}_K$.

b) Soit $\mu \in K^*$ tel que $\omega(\mu) > 0$ et $]0,\frac{\omega(\mu)}{2}[\cap \omega(a(S)) \neq \emptyset$. Considérons le $\mathcal{O}_K$-schéma algébrique affine $\mathcal{V}_i = \mathrm{Spec}(R_i)$ défini par $R_i = \mathcal{O}_K[f_1,\dots,f_n , g_i]/(f_i g_i - \mu)$. Alors $\mathcal{V}_i(\mathcal{O}_K)$ est l'ensemble des points u de U_a tels que : $\omega(f_j(u)) \geqslant 0 \quad \forall j = 1,\dots,n$ et $\omega(f_i(u)) \leqslant \omega(\mu)$.

Si $\mathcal{V}_i^! = \mathrm{Spec}(R_i/(\lambda_\chi))$, on a $\mathcal{V}_i^!(\mathcal{O}_K) = \emptyset$; en effet $\mathcal{V}_i^!(\mathcal{O}_K) \subset \mathcal{V}_i(\mathcal{O}_K) \cap (\mathcal{U}_a(K) - \Omega_a(K)) = \mathcal{V}_i(\mathcal{O}_K) \cap \{1\} = \emptyset$ (2.1.1 et 2.1.4). D'après un résultat de Greenberg (A3, en annexe) appliqué à $\mathcal{X} = \mathcal{V}_i^!$, il existe un nombre

réel q_i tel que pour tout $u \in \mathcal{V}_i(\mathcal{O}_K)$ on a $\omega(\lambda_\chi(u)) \leqslant q_i$.

c) Notons $q = \sup_i (q_i)$. Soient $u \in U_a$ et i_o tels que $\inf_i(\omega(f_i(u))) = \omega(f_{i_o}(u)) = t$. Comme f_{i_o} est homogène de degré $b = a$ ou $2a$, il existe $s \in S$ tel que $0 \leqslant -\omega(b(s)) + t \leqslant \omega(\mu)$. Alors ${}^{s^{-1}}u \in \mathcal{V}_{i_o}(\mathcal{O}_K)$, d'où $\omega(\lambda_\chi({}^{s^{-1}}u)) \leqslant q$. On a donc :

$$\omega(\lambda_\chi(u)) \leqslant q + 2.c.\omega(a(s)) \leqslant q + 2c.t \quad (\text{ou } q + c.t) .$$

d) Ainsi $\forall u \in U^{\chi}_{a,k}$, $\forall i = 1,\dots,n$, on a : $\omega(f_i(u)) \geqslant \mathrm{Inf}(\frac{k-q}{2c} , \frac{k-q}{c})$ et $U^{\chi}_{a,k}$ est donc borné.

2) a) Choisissons des bases $(u_1,\dots,u_n)$ de U_{2a} et $(v_1,\dots,v_p)$ de V , (cf 2.3.2 3)), où les éléments u_i et v_j sont dans $U^{\chi}_{a,0}$. Alors tout élément $u \in U_{2a}$ (resp. $v \in V$) peut se représenter par un vecteur $y = (y_1,\dots,y_n) \in K^n$ (resp. $x = (x_1,\dots,x_p) \in K^p$). Mais tout élément de U_a s'écrit d'une manière unique comme un produit $v \times u$ avec $v \in V$ et $u \in U_{2a}$, on peut donc le représenter par un vecteur $(x,y) \in K^{n+p}$. La multiplication de U_a est alors donnée par : $(x,y)(x',y') = (x+x' , y+y' + f(x,x'))$ où f est un polynôme en x,x' tel que $f(0,x') = f(x,0) = 0$.

b) Notons $U'_{a,k} = \{(x,y) \in U_a/\omega(x_j) \geqslant k , \omega(y_i) \geqslant k\}$. Alors d'après le choix des bases (u_i) , (v_j) et comme les $U^{\chi}_{a,k}$ sont des sous-groupes de U_a , le lemme 2.3.2 montre que $U'_{a,k} \subset U^{\chi}_{a,k}$, pour tout $k \in \mathbb{R}$. D'après la première partie de cette démonstration (1.d), il existe une constante réelle A , $(0 < A < 1)$, telle que pour k assez grand on ait : $U^{\chi}_{a,k} \subset U'_{a,Ak}$.

c) La distance d_1 dans U_a induite par la filtration par les valuations des coordonnées est donnée par :

$$- \mathrm{Log}(d_1((x,y),(x',y'))) = \inf\{\omega(x_j - x'_j), \omega(y_i - y'_i)\}$$
$$= \sup\{k \in \mathbb{R} / (x-x', y-y') \in U'_{a,k}\} .$$

La distance d_2 dans U_a induite par la filtration par les sous-groupes $U^x_{a,k}$ est donnée par :

$$- \mathrm{Log}(d_2((x,y),(x',y'))) = \sup\{k \in \mathbb{R} / (x,y)(x',y')^{-1} \in U^x_{a,k}\}$$
$$= \sup\{k \in \mathbb{R} / (x-x', y-y'-f(x-x',x')) \in U^x_{a,k}\} .$$

D'après la partie b) ci-dessus d_2 donne la même topologie et les mêmes suites de Cauchy que d_3 définie par :

$$- \mathrm{Log}(d_3((x,y),(x',y'))) = \sup\{k \in \mathbb{R} / (x-x', y-y'-f(x-x',x')) \in U'_{a,k}\} .$$

D'après les propriétés du polynôme f indiquées dans la partie a) ci-dessus, d_1 et d_3 donnent la même topologie et les mêmes suites de Cauchy, cqfd.

<u>Proposition</u> 2.3.5 : <u>Supposons que</u> $\mathcal{G}$ <u>ait même rang relatif sur</u> K <u>et son complété</u> $\hat{K}$, <u>et qu'il ait un immeuble sur</u> $\hat{K}$; <u>alors il a un immeuble sur</u> K . <u>De plus</u> $I_{\hat{K}}(\mathcal{G})$ <u>s'identifie canoniquement à</u> $I_{\hat{K}}(\mathcal{G})$, <u>comme</u> G-<u>ensemble avec métriques normalisées</u> ; <u>les appartements de</u> $I_K(\mathcal{G})$ <u>sont les appartements de</u> $I_{\hat{K}}(\mathcal{G})$ <u>correspondants aux tores</u> $\hat{K}$-<u>déployés maximaux</u>, <u>définis et déployés sur</u> K .

<u>Démonstration</u> : L'existence d'un immeuble sur K a été prouvée en 2.3.1. Soit $\mathcal{J}$ un tore K-déployé maximal, qui est donc $\hat{K}$-déployé maximal, l'appartement centré $A_{\mathcal{J},K} = V_{1,K} \times A'_{\mathcal{J},K}$ de $I_K(\mathcal{G})$ s'identifie canoniquement à l'appartement centré $A_{\mathcal{J},\hat{K}}$ de $I_{\hat{K}}(\mathcal{G})$ et on a donc une injection de $I_K = G.A_{\mathcal{J},K} = V_{1,K} \times (G.A'_{\mathcal{J},K})$ dans $I_{\hat{K}}$; il s'agit de montrer que c'est une bijection et il suffit de s'en assurer sur I'_K et $I'_{\hat{K}}$. Soient $y \in I'_{\hat{K}}$ et $x \in A'_{\mathcal{J}} \subset I'_K \subset I'_{\hat{K}}$ un point spécial pris comme origine de $A'_{\mathcal{J}}$. Il existe un appartement de $I'_{\hat{K}}$

contenant x et y ; et comme $U_{\{x\}}(\hat{K})$ est transitif sur les appartements de $I'_{\hat{K}}$ contenant x (1.1.9 2_b)), il existe $g \in U_{\{x\}}(\hat{K})$ et $z \in A'_{\mathcal{J}}$ tels que $y = g.z$. La structure de $U_{\{x\}}(\hat{K})$ (1.1.7 $_2$)) montre que, quitte à changer z , on peut supposer que g est produit d'éléments $u_a \in U^x_{a,0}(\hat{K})$ pour les racines a de Φ^{red} telles que $a(z-x) < 0$. D'après 2.3.2 et 2.3.4 , pour tout $k \geqslant 0$ il existe $u'_a \in U^x_{a,0}(K)$ tel que $u_a \in u'_a . U^x_{a,k}(\hat{K})$. D'après l'axiome V_3 de 1.1.3 , $g^{-1}.\pi_a u'_a$ appartient au produit des groupes $U^x_{a,k}(\hat{K})$, c'est-à-dire fixe z , si k est assez grand. Alors $y = g.z = (\pi u'_a)z$ est dans I'_K .

<u>Corollaire</u> 2.3.6 : <u>Sous les hypothèses de</u> 2.3.5 , <u>les parties bornées des appartements de</u> $I_{\hat{K}}(\mathcal{G})$ <u>sont contenues dans des appartements de</u> $I_K(\mathcal{G})$.

<u>Démonstration</u> : En effet une partie bornée d'appartement est contenue dans l'enclos de deux points.

<u>Proposition</u> 2.3.7 : <u>Supposons</u> K <u>complet et soit</u> I <u>un immeuble de</u> $\mathcal{G}$ <u>sur</u> K ; <u>alors toute partie de</u> I <u>isométrique</u> (<u>pour une métrique invariante</u>) <u>à un espace euclidien</u>, <u>est un sous-espace affine d'un appartement</u>.

<u>Démonstration</u> : D'après la proposition 1.3.9 , il suffit de le montrer pour une partie Δ isométrique à une droite, on est donc ramené au lemme suivant.

<u>Lemme</u> 2.3.8 : <u>Supposons</u> K <u>complet</u> ; <u>soient</u> I <u>un immeuble de</u> $\mathcal{G}$ <u>sur</u> K , Δ' <u>une partie de</u> I <u>et</u> Δ'' <u>une partie de</u> I <u>isométrique à une demi-droite</u>, <u>tels que</u> :

- <u>l'origine</u> x <u>de</u> Δ'' <u>est dans</u> Δ' ,
- <u>pour tout point</u> y <u>de</u> Δ'' , <u>il existe un appartement de</u> I <u>contenant</u> y <u>et</u> Δ' ,

<u>alors il existe un appartement de I contenant Δ' et Δ''.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit $A_{\mathcal{S}}$ un appartement de I contenant Δ' et un point $y \in \Delta''$, y distinct de x ; choisissons x comme origine de $A_{\mathcal{S}}$. Considérons $\Phi_1 = \{a \in \Phi(\mathcal{S})/a(x) > a(y)\}$ et, pour tout $k \in \mathbb{R}$, les groupes V_k engendrés par les groupes, $\hat{P}_{\Delta'} \cap U^x_{a,k}$ pour a dans Φ_1. Si $k' \geqslant k \geqslant 0$, $V_{k'}$ est un sous-groupe distingué de V_k. Considérons une suite $y_o = y, y_1, \dots, y_n, \dots$ de points de Δ'', telle que $d(y_i,x)$ croisse et tende vers l'infini ; alors il existe une suite de couples (f_n,A_n) formés d'un élément de G et d'un appartement de I, telle que : $A_o = A_{\mathcal{S}}$, $f_n \in \hat{P}_{\Delta' \cup \{y_n\}}$ et $A_{n+1} = f_n.A_n$ contient Δ' et y_{n+1}. Posons alors $g_n = \prod_{i=o}^{n} f_i$, on a donc $A_{n+1} = g_n.A$ et $f_{n+1} = g_n^{-1}.g_{n+1} \in \hat{P}_{\Delta' \cup \{y_{n+1}\}} = {}^{g_n}\hat{P}_{\Delta' \cup \{g_n^{-1}(y_{n+1})\}}$. Posons $k_n = \dfrac{d(x,y_{n+1})}{d(x,y)} \times \mathrm{Inf}\{a(x)-a(y)/a \in \Phi_1\}$. Alors la suite k_n croît et tend vers l'infini, de plus $k_o > 0$. Quitte à changer les A_n, f_n, g_n on peut supposer :

$$f_{n+1} \in {}^{g_n}V_{k_{n+1}} = V_{k_{n+1}} \quad \text{et} \quad g_n \in V_{k_o}.$$

Comme U_a, filtré par les $U^x_{a,k}$ est un groupe complet (2.3.4), V_{k_o}, filtré par les V_{k_n}, est un groupe complet. Il existe donc $g \in V_{k_o}$ tel que, pour tout n, $g \in g_n.V_{k_n}$; il est alors clair que $g.A_{\mathcal{S}}$ est un appartement contenant Δ' et tous les y_i, donc Δ'' par convexité. (En effet V_{k_n} fixe le point z_n de la demi-droite de $A_{\mathcal{S}}$ d'origine x, s'appuyant sur y déterminé par :

$$\frac{d(x,z_n)}{d(x,y_n)} = \frac{\mathrm{Inf}\{a(x)-a(y)/a \in \Phi_1\}}{\mathrm{Sup}\{a(x)-a(y)/a \in \Phi_1\}} \text{).}$$

<u>Proposition</u> 2.3.9 : <u>Si le corps K est hensélien</u> (A2), $\mathcal{G}$ <u>a même rang relatif sur K et son complété $\hat{K}$, de plus le groupe $\mathcal{G}$ a un immeuble sur K si et seulement si il en a un sur $\hat{K}$.</u>

<u>Démonstration</u> : 1) En passant au groupe dérivé $\mathcal{Z}'$ ou au tore anisotrope $\mathcal{C}_a$ du radical du centralisateur d'un tore K-déployé maximal $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$, il suffit pour prouver la première assertion, ([1;4.2.7]), de montrer que si $\mathcal{G}$ est anisotrope et semi-simple, ou si $\mathcal{G}$ est un tore anisotrope, alors $\mathcal{G} \otimes \hat{K}$ est anisotrope.

Si $\mathcal{G}$ est semi-simple, on considère le schéma lisse $\mathcal{P}$ des sous-groupes paraboliques de $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{G} \otimes \hat{K}$ n'est pas anisotrope $\mathcal{P}(\hat{K})$ a un point non trivial, mais $\mathcal{P}(K)$ est dense dans $\mathcal{P}(\hat{K})$ (annexe A4), donc $\mathcal{P}(K)$ a un point non trivial. Alors $\mathcal{G}$ a un parabolique non trivial et n'est donc pas anisotrope.

Si $\mathcal{G}$ est un tore anisotrope, on verra (2.4.8) que $\mathcal{G}(K)$ est borné, mais comme $\mathcal{G}(K)$ est dense dans $\mathcal{G}(\hat{K})$, le groupe $\mathcal{G}(\hat{K})$ est borné et $\mathcal{G}$ est anisotrope sur $\hat{K}$.

2) D'après 2.3.5, 2.3.3, 2.2.11 (v) et 2.2.9, pour prouver la deuxième assertion, il suffit de montrer que si $\mathcal{Z}'(K)$ et $\mathcal{C}_a(K)$ sont bornés, alors $\mathcal{Z}'(\hat{K})$ et $\mathcal{C}_a(\hat{K})$ le sont aussi ; mais cela résulte aussitôt de la densité de $\mathcal{Z}'(K)$ (resp. $\mathcal{C}_a(K)$) dans $\mathcal{Z}'(\hat{K})$ (resp. $\mathcal{C}_a(\hat{K})$) (cf A4).

<u>N.B.</u> On n'utilisera pas 2.3.9 avant le numéro 2.5.4.

<u>Remarques</u> 2.3.10 : a) La proposition 2.3.9 montre que la conjecture de Bruhat et Tits (2.2.15) est équivalente à sa formulation pour K complet.

b) Les corps henséliens ont toutes les bonnes propriétés des corps complets (cf annexe A2) : un corps complet est hensélien, il y a unicité du prolongement de la valuation à une extension algébrique. De plus toute extension algébrique d'un corps hensélien est hensélienne, alors qu'une extension algébrique d'un corps complet n'est complète que si elle est finie ([4 ; §8 exercice 16]). C'est ce qui nous fera préférer, pour la suite, les corps henséliens.

c) Signalons dès maintenant que (d'après 2.3.9) tous les résultats de ce mémoire valables pour les corps complets le sont pour les corps henséliens, à part deux sortes d'exceptions :

- la complétion de U_a (énoncé et remarque 2.3.4)
- l'existence d'appartements ayant telle ou telle propriété, (numéros 2.3.7 , 2.3.8 , 2.4.2g , 4.1.5 , 4.1.6 , 4.2.6 e) et 4.2.14 exclusivement).

Par ailleurs les contre-exemples du III §4,5 sont étudiés pour K complet.

§4 Action d'un groupe de Galois ; Morphismes.

On suppose dorénavant K hensélien.

Définitions 2.4.1 : Soient L (resp. M) un corps muni d'une valuation réelle non triviale, $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{H}$) un groupe réductif sur L (resp. sur M) qui a un immeuble sur L (resp. sur M), f_1 un homomorphisme de groupes de $\mathcal{G}(L)$ dans $\mathcal{H}(M)$ et f une application de $I_L(\mathcal{G})$ dans $I_M(\mathcal{H})$.

a) On dit que f est un morphisme de $I_L(\mathcal{G})$ dans $I_M(\mathcal{H})$ s'il vérifie les trois conditions suivantes :

M1) l'image réciproque par f de toute métrique invariante sur $I_M(\mathcal{H})$ est une métrique invariante sur $I_L(\mathcal{G})$,

M2) pour tout appartement A de $I_L(\mathcal{G})$, f induit un isomorphisme affine f_A de A sur un sous-espace affine d'un appartement A_1 de $I_L(\mathcal{H})$,

M3) l'isomorphisme f_A identifie les racines de A à certaines restrictions à $f(A)$ des racines de A'.

b) Si f est un morphisme, on dit qu'il est centré s'il vérifie la condition supplémentaire :

MC) f envoie $I'_L(\mathcal{G}) = \{0\} \times I'_L(\mathcal{G}) \subset V_1 \times I'_L(\mathcal{G}) = I_L(\mathcal{G})$ dans $I'_M(\mathcal{H})$.

c) On dit que l'application f est adaptée à f_1 si :

MA) pour tout $g \in \mathcal{G}(L)$ et tout $x \in I_L(\mathcal{G})$, on a : $f(g.x) = f_1(g).f(x)$.

<u>Remarques</u> 2.4.2 : a) Un morphisme est nécessairement une application injective (M1).

b) Le composé de deux morphismes (resp. morphismes centrés), est un morphisme (resp. un morphisme centré).

c) La composée de deux applications adaptées à deux homomorphismes de groupes est adaptée au composé des homomorphismes de groupes.

d) La notion de morphisme (resp. d'application adaptée) peut-être définie pour tout immeuble de $\mathcal{G}$ sur L et tout immeuble de $\mathcal{H}$ sur M , et non pas seulement pour les immeubles centrés $I_L(\mathcal{G})$ et $I_M(\mathcal{H})$.

e) Cette notion de morphisme, oublie complètement dans la structure des immeubles $I_L(\mathcal{G})$ et $I_M(\mathcal{H})$ les actions respectives de $\mathcal{G}(L)$ et $\mathcal{H}(M)$. Si $L = M$ et $\mathcal{G} = \mathcal{H}$, les isomorphismes dont on parle dans 2.1.14 , sont les morphismes de $I_L(\mathcal{G})$ dans $I_L(\mathcal{G})$ adaptés à l'automorphisme identité de $\mathcal{G}(L)$. Dire que l'immeuble centré $I_L(\mathcal{G})$ est unique à isomorphisme unique près, c'est dire que tout automorphisme centré de $I_L(\mathcal{G})$ adapté à l'identité de $\mathcal{G}(L)$ est réduit à l'identité.

f) Si une application f adaptée à f_1 vérifie la condition M2, elle vérifie aussi la condition M1.

g) Si M est complet et si l'application f vérifie la condition M1, elle vérifie aussi la condition M2 : En effet l'image d'un appartement A de $I_L(\mathcal{G})$ est un sous-espace métrique de $I_M(\mathcal{H})$ isomorphe à un espace euclidien ; ainsi, d'après 2.3.7 , f(A) est contenu dans un appartement de $I_M(\mathcal{H})$ et on conclut facilement.

h) On suppose les groupes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ ci-dessus, absolument simples de rang relatif au moins 2. D'après [31], si f est un isomorphisme de $I_L(\mathcal{G})$ sur $I_M(\mathcal{H})$, il existe un isomorphisme σ de L dans M , qui échange, à équivalence près, les valuations de L et M , et une isogénie centrale de ${}^{\sigma}\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$ tels que f soit l'unique isomorphisme de $I_L(\mathcal{G})$ sur $I_M(\mathcal{H})$ adapté au morphisme de $\mathcal{G}(L)$ dans $\mathcal{H}(M)$, ainsi construit.

i) Si $\mathcal{H}$ est semi-simple, tout morphisme de $I_L(\mathcal{G})$ dans $I_M(\mathcal{H})$ est centré.

j) D'après le lemme 2.4.3 ci-dessous, si f est un automorphisme (non centré) de $I_L(\mathcal{G})$, il existe un automorphisme (non centré) g de $I_L(\mathcal{G})$ adapté à l'identité de $\mathcal{G}(L)$ tel que $g \circ f$ soit centré ; un automorphisme centré de $I_L(\mathcal{G})$ est le produit d'un automorphisme vectoriel de $V_1(\mathcal{G})$ et d'un automorphisme (centré) de $I_L(\mathcal{G}') = I'_L(\mathcal{G})$.

<u>Lemme</u> 2.4.3 : <u>Sous les conditions et avec les notations de</u> 2.4.1, <u>si</u> f <u>est un morphisme tel que</u> :

M4) <u>pour tout appartement</u> A <u>de</u> $I_L(\mathcal{G})$, <u>l'isomorphisme</u> f_A <u>identifie les racines de</u> A <u>à l'ensemble des restrictions non nulles, à</u> f(A) , <u>des racines de</u> A',

<u>alors</u> f <u>est le produit d'une injection affine de</u> $V_{1,L}(\mathcal{G})$ <u>dans</u> $V_{1,M}(\mathcal{H})$ <u>et d'un morphisme de</u> $I_L(\mathcal{G}') = I'_L(\mathcal{G})$ <u>dans</u> $I_M(\mathcal{H}') = I'_M(\mathcal{H})$.

<u>Remarque</u> : La condition M4 est plus forte que M3 , elle lui est équivalente si $\mathcal{G} = \mathcal{H}$ et L = K .

<u>Démonstration</u> :

Soit $\mathcal{S}$ un tore L-déployé maximal de $\mathcal{G}$, l'appartement $A_{\mathcal{S}}$ de $I_L(\mathcal{G})$ correspondant, est un appartement centré : on a $A_{\mathcal{S}} = V_1 \times A'_{\mathcal{S}}$. Deux points x et y de $A_{\mathcal{S}}$ ont même projection sur $A'_{\mathcal{S}}$ si et seulement si $a(y-x) = 0$ pour toute racine $a \in \Phi(\mathcal{S})$. Une métrique invariante sur $I_L(\mathcal{G})$ identifie les racines à des vecteurs translation de $A_{\mathcal{S}}$ et deux points x et y ont même projection sur V_1 si et seulement si le vecteur $y-x$ est combinaison linéaire des racines.

Les mêmes résultats sont valables pour $\mathcal{H}$ et L ; on conclut alors facilement.

Définition 2.4.4 : Soient L et M deux extensions algébriques de K et $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{H}$) un groupe réductif sur L (resp. M) ; un homomorphisme de groupes f_1 de $\mathcal{G}(L)$ dans $\mathcal{H}(M)$ est dit K-semi-algébrique, s'il existe un K-isomorphisme σ de L dans M et un L-homomorphisme de groupes algébriques φ de ${}^{\sigma}\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$ tels que f_1 soit le composé $\varphi(M) \circ \mathcal{G}(\sigma)$.

Le composé de deux homomorphismes K-semi-algébriques est K-semi-algébrique.

Remarque 2.4.5 : Reprenons les hypothèses et les notations de 2.4.1 et 2.4.4. Soient f_1 un homomorphisme K-semi-algébrique de $\mathcal{G}(L)$ dans $\mathcal{H}(M)$ et f une application de $I_L(\mathcal{G})$ dans $I_M(\mathcal{H})$ adaptée à f_1. Supposons que pour tout tore L-déployé maximal $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$, il existe un tore M-déployé maximal $\mathcal{C}$ de $\mathcal{H}$, tel que $f_1(\mathcal{S}(L)) \subset \mathcal{C}(M)$ et que f induise un isomorphisme affine de $A_{\mathcal{S}}$ sur un sous-espace affine de $A_{\mathcal{C}}$, alors f est un morphisme qui vérifie la condition supplémentaire (M4) du lemme 2.4.3. En effet l'application f vérifie la condition M2 et donc la condition M1 (2.4.2 f)) ; mais f_1 définit un morphisme de groupe de $X_*(\mathcal{S})$ dans $X_*(\mathcal{C})$, donc une application linéaire de $X_*(\mathcal{S}) \otimes \mathbb{R}$ dans $X_*(\mathcal{C}) \otimes \mathbb{R}$; d'après la condition MA), cette dernière application coïncide avec celle définie

par $f_{A_{\mathcal{S}}}$, la conclusion en découle aussitôt.

Proposition 2.4.6 : Soit L/K une extension galoisienne telle que $\mathcal{G}$ ait un immeuble E.N.B. sur L,

a) pour tout automorphisme K-semi-algébrique f de $\mathcal{G}(L)$, il existe un unique automorphisme centré f^* de $I_L(\mathcal{G})$ adapté à f,

b) de plus pour tout tore L-déployé maximal $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$, on a :

$$f^*(A_{\mathcal{S}}) = A_{f(\mathcal{S})},$$

c) On obtient ainsi un homomorphisme du groupe des automorphismes K-semi-algébriques de $\mathcal{G}(L)$ dans le groupe des automorphismes centrés de $I_L(\mathcal{G})$.

N.B. On abréviera parfois f^* en f, bien que l'homomorphisme du c) ci-dessus ne soit pas toujours injectif (par exemple si $\mathcal{G}$ est L-anisotrope ; voir cependant 2.4.2 h).

Démonstration : L'assertion c) résulte de l'assertion a).

Soit f un automorphisme K-semi-algébrique de $\mathcal{G}(L)$, et montrons l'unicité d'un automorphisme centré f^* de $I_L(\mathcal{G})$ adapté à f. D'après la remarque 2.4.2 j), un tel f^* s'écrit comme le produit d'un automorphisme vectoriel f_1^* de V_1 et d'une bijection $f^{*\prime}$ de $I'_L(\mathcal{G})$. L'unicité de la partie f_1^* est claire = f_1^* est l'automorphisme vectoriel de V_1 qui induit sur les translations images des éléments de $\mathcal{G}(L)$, l'application f. Considérons un appartement $A'_{\mathcal{S}}$ de I'_L, il existe un sous-groupe $\hat{P}_{\{x\}}$ de $\mathcal{G}(L)$ n'ayant qu'un seul point fixe dans I', le point $x \in A'_{\mathcal{S}}$. Si f^* existe, $f(\hat{P}_{\{x\}})$ ne peut avoir qu'un seul point fixe dans I', ce point est alors nécessairement $f^{*\prime}(x)$. On connait ainsi $f^{*\prime}(y)$ pour tous les points y translatés de x par $\mathcal{S}(L)$ et donc pour tous les points de

$A'_{\mathcal{S}}$ puisque $f^{*'}$ doit être affine sur $A'_{\mathcal{S}}$. D'où l'unicité, puisque $I'_L(\mathcal{G}) = \mathcal{G}(L).A'_{\mathcal{S}}$.

Montrons maintenant l'existence d'un automorphisme f^* satisfaisant a) et b). Pour cela on peut se limiter au cas où f est induit soit par un élément du groupe de Galois, soit par un L-automorphisme de $\mathcal{G}\otimes L$. On peut aussi remplacer $\mathcal{G}$ par le produit de son coradical et de son groupe adjoint, donc traiter séparément le cas d'un tore et d'un groupe semi-simple.

Si $\mathcal{G}$ est un tore, un élément f du groupe de Galois de L/K induit un automorphisme $\mathbb{Z}$-linéaire f^* de $X^*_L(\mathcal{G})$ tel que pour tout $\chi \in X^*_L(\mathcal{G})$ et tout $g \in \mathcal{G}(L)$, on ait $f^*(\chi).f(g) = f(\chi(g))$; comme la valuation ω de L est invariante par le groupe de Galois, l'automorphisme f^* de $X^*_L(\mathcal{G})$ induit l'automorphisme cherché de $V_1 = X^*_L(\mathcal{G})\otimes\mathbb{R}$. De même un automorphisme L-algébrique de $\mathcal{G}$ induit un automorphisme f^* de $X^*_L(\mathcal{G})$ tel que $f^*(\chi).f(g) = \chi(g)$, et la conclusion est la même.

Si $\mathcal{G}$ est semi-simple, soit $\mathcal{S}$ un tore L-déployé maximal de $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}' = f(\mathcal{S})$ est un tore L-déployé maximal ; f induit un isomorphisme f de $X^*(\mathcal{S})$ sur $X^*(\mathcal{S}')$ qui transforme $\Phi = \Phi(\mathcal{S})$ en $\Phi' = \Phi(\mathcal{S}')$ et pour toute racine $a \in \Phi$, on a $f(U_a) = U_{f(a)}$. Soit N_o un sous-groupe fini de $N_L(\mathcal{S})$ tel que ${}^v\nu(N_o) = {}^vW$, alors $f(N_o)$ est un sous-groupe fini de $N_L(\mathcal{S}')$ tel que ${}^v\nu'(f(N_o)) = {}^vW'$ et N_o (resp. $f(N_o)$) a un unique point fixe y dans $A_{\mathcal{S}}$ (resp. y' dans $A_{\mathcal{S}'}$) (cf 2.1.11 e)). L'isomorphisme f de $X^*(\mathcal{S})$ sur $X^*(\mathcal{S}')$ se restreint en un isomorphisme de $X^*_K(\mathfrak{Z}(\mathcal{S}))$ sur $X^*_K(\mathfrak{Z}(\mathcal{S}'))$ tel que $\omega(\chi(g)) = \omega(f(\chi).f(g))$ pour $\chi \in X^*_K(\mathfrak{Z}(\mathcal{S}))$ et $g \in Z_L(\mathcal{S})$. On a donc une bijection affine f^* de $A_{\mathcal{S}}$ sur $A_{\mathcal{S}'}$ telle que $f^*(y) = y'$ et que la relation MA vaille pour $x \in A_{\mathcal{S}}$ et $g \in Z_L(\mathcal{S})$; d'après le choix de N_o, y et y' la relation MA vaut encore pour $g \in N_L(\mathcal{S})$. Le théorème 2.1.14 et la remarque 2.4.5 montrent que, pour que f^* s'étende en un automorphisme de I_L adapté à f, il faut et il suffit que, pour $a \in \Phi$ et $u \in U_a$, on ait $\varphi^{y'}_{f(a)}(f(u)) = \varphi^y_a(u)$. Mais si on choisit $m_a \in N_o$ pour définir φ^y_a (2.1.8 c)), on peut choisir $m_{f(a)} = f(m_a) \in f(N_o)$ pour définir $\varphi^{y'}_{f(a)}$. Comme $f(m(u)) = m(f(u))$, on a :

$$\varphi^y_a(u) = \frac{1}{2c}\,\omega(\chi_a(m(u).m_a^{-1})) = \frac{1}{2c}\,\omega(f(\chi_a).(f(m(u)).f(m_a)^{-1}))$$
$$= \frac{1}{2c}\,\omega(\chi_{f(a)}(m(f(u)).m_{f(a)})) = \varphi^{y'}_{f(a)}(f(u)) . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

<u>Remarques</u> 2.4.7 : a) L'unicité de f^* n'est vraie que pour les automorphismes centrés (cf b) ci-dessous). Si I est un immeuble non centré de $\mathcal{G}$ sur L, il n'y a pas de morphisme canonique du groupe des automorphismes K-semi-algébriques de $\mathcal{G}(L)$ dans le groupe des automorphismes de I.

b) Si $g \in \mathcal{G}(L)$, l'action de g sur $I_L(\mathcal{G})$ est adaptée à l'action de g sur $\mathcal{G}(L)$ par automorphisme intérieur ; mais elle n'est pas centrée si $V_1 \neq 0$, car g agit sur V_1 par translation. L'automorphisme centré g^* coïncide donc avec g sur $I'_L(\mathcal{G})$ mais est l'identité sur V_1. En particulier g^* est une isométrie pour toute métrique invariante.

c) Si $\mathcal{G}$ est semi-simple et si $\mathcal{G} \to \mathcal{G}_1$ est une isogénie centrale, tout élément $g \in \mathcal{G}_1(L)$ agit sur $\mathcal{G}$ par automorphisme intérieur, donc agit sur $I_L(\mathcal{G})$. D'après la remarque précédente cette action est celle de g sur $I_L(\mathcal{G}_1) \simeq I_L(\mathcal{G})$. Cette façon d'obtenir l'action de $\mathcal{G}_1(L)$ sur $I_L(\mathcal{G})$ s'apparente à la méthode des "homomorphismes B-N adaptés" de [11 ; § 2.7].

d) Le morphisme qui à f associe f^* est compatible aux produits et aux isogénies centrales ; en particulier l'action de $\Gamma = \mathrm{Gal}(L/K)$ sur V_1 ou $I'_L(\mathcal{G})$ est l'action de Γ sur $I_L(\mathrm{corad}(\mathcal{G}))$ ou $I_L(\mathcal{G}')$.

e) La bijection f^* transforme une métrique normalisée en une métrique normalisée ; en effet f s'étend en un automorphisme de $\mathcal{G}(\bar{K})$ et transforme un tore maximal contenant $\mathcal{S}$ en un tore maximal contenant $f(\mathcal{S})$, en échangeant les racines.

f) D'après la remarque d) et la proposition ci-dessous, il existe sur V_1 un produit scalaire invariant par le groupe de Galois Γ. D'après la remarque e), il existe donc une métrique normalisée sur $I_L(\mathcal{G})$ pour laquelle l'action de Γ est isométrique.

g) Si $\hat{L}$ (resp. $\hat{K}$) désigne le complété de L (resp. K), alors les actions de $\Gamma = \mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Gal}(\hat{L}/\hat{K})$ sur $I_L(\mathcal{G}) = I_{\hat{L}}(\mathcal{G})$ coïncident, (2.3.5 ; 2.3.9 ; 2.4.6 et A2).

h) Si on a une isogénie centrale définie sur K $\mathcal{G} \to \mathcal{G}_1$ les actions de $\Gamma = \mathrm{Gal}(L/K)$ sur $I_L(\mathcal{G}) = I_L(\mathcal{G}_1)$ coïncident, (2.2.14 e) et 2.4.6).

Proposition 2.4.8 : "Descente galoisienne pour les tores sur un corps hensélien". 1) Soient $\mathcal{G}$ un tore défini sur K et L/K une extension galoisienne de groupe de Galois Γ, [$\mathcal{G}$ a donc des immeubles E.N.B. sur K et L (2.1.16 b)] ; l'action de Γ sur $V_1 = I_L(\mathcal{G}) = X_{*,L}(\mathcal{G})\otimes\mathbb{R}$ se fait à travers un groupe fini. Le sous-espace de $I_L(\mathcal{G})$ formé des vecteurs invariants par Γ, muni de l'action de G, s'identifie canoniquement à $I_K(\mathcal{G}) = X_{*,K}(\mathcal{G})\otimes\mathbb{R}$.

2) Un tore a un immeuble sur K.

Démonstration : 1) L'action de Γ sur $I_L(\mathcal{G})$ se fait par l'action de Γ sur $X_{*,L}(\mathcal{G})$, c'est-à-dire qu'elle est induite par la restriction à $X_{*,L}(\mathcal{G})$ de l'action de $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ sur $X_*(\mathcal{G})$. Comme $\mathcal{G}$ se déploie sur une extension galoisienne finie de K, la partie 1) de l'énoncé résulte de ce que pour toute extension galoisienne M/K, $X_{*M}(\mathcal{G})$ s'identifie au $\mathbb{Z}$ module des cocaractères de $X_*(\mathcal{G})$ invariants par $\mathrm{Gal}(K_s/M)$.

2) D'après 2.1.16 b) et 2.2.11 iii), pour voir que $\mathcal{G}$ a un immeuble sur K, il suffit de voir que le fixateur dans G d'un point de $I_K(\mathcal{G})$ est borné, or c'est vrai si $\mathcal{G}$ est déployé (2.2.14 a)), donc dans le cas général d'après la première partie.

2.4.9 Passage à un sous-groupe.

Soient $\mathcal{S}$ un tore K-déployé maximal de $\mathcal{G}$ et Φ_1 une partie quasi-close ([1 ; 3.8]) et symétrique (i.e. $\Phi_1 = -\Phi_1$) de $\Phi(\mathcal{S})$. Alors, par définition, le sous-groupe fermé $\mathcal{G}_1$ de $\mathcal{G}$ engendré par $\mathcal{Z}(\mathcal{S})$ et les $\mathcal{U}_a$ pour $a \in \Phi_1$ ne contient pas de groupe $\mathcal{U}_b$ pour $b \in \Phi - \Phi_1$. C'est un groupe réductif dont le système de racines relatif sur K est Φ_1.

Proposition : Reprenons les notations de 2.1.2.

1) $(Z,(U_a,M_a)_{a\in\Phi_1})$ est une donnée radicielle génératrice de type Φ_1 dans G_1.

2) Si $\mathcal{G}$ a un immeuble sur K, il en est de même pour $\mathcal{G}_1$. De plus $(\varphi_a^x)_{a\in\Phi_1}$ est une valuation de la donnée radicielle ci-dessus, le sous-ensemble $I_K(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}) = G_1.A_{\mathcal{S}}$ de $I_K(\mathcal{G})$ est un immeuble de $\mathcal{G}_1$ sur K et une métrique invariante sur $I_K(\mathcal{G})$ induit une métrique invariante sur $I_K(\mathcal{G}_1,\mathcal{G})$.

Démonstration : La première assertion est évidente. Pour vérifier la seconde on peut supposer que x est un point spécial de $A_{\mathcal{S}}$. Alors pour $a \in \Phi_1$, φ_a^x peut être défini par $m_a = m(u)$ avec $u \in U_a \subset G_1$, ainsi φ_a^x est le même, qu'il soit défini dans $\mathcal{G}$ ou dans $\mathcal{G}_1$. Si $\mathcal{G}$ a un immeuble sur K, $G_1.A_{\mathcal{S}} \subset I_K(\mathcal{G})$ est un immeuble E.N.B. de $\mathcal{G}$ sur K (2.1.12), c'est un immeuble d'après 2.2.11 (iii). Enfin le dernier résultat est évident.

Exemples 2.4.10 : Une partie Φ_1 de Φ est quasi-close dès qu'elle est close, c'est-à-dire dès que pour tous $a,b \in \Phi_1$, on a $(\mathbb{Z}.a+\mathbb{Z}.b)\cap\Phi\subset\Phi_1$. On obtient en particulier deux exemples.

1) Soit $a \in \Phi$, Φ_1 est composé de a, $-a$ et éventuellement $2a$, $-2a$. Alors $\mathcal{G}_1$ est engendré par $\mathcal{Z}$, $\mathcal{U}_a$, $\mathcal{U}_{-a}$; on l'a déjà utilisé.

2) Soit $\mathcal{S}_1$ un sous-tore de $\mathcal{S}$, le groupe $\mathcal{Z}(\mathcal{S}_1)$ est construit à partir de $\Phi_1 = \{a \in \Phi / a(\mathcal{S}_1) = 1\}$. Si $\mathcal{G}$ a un immeuble sur K, l'immeuble $I_K(\mathcal{Z}(\mathcal{S}_1),\mathcal{G})$ de $\mathcal{Z}(\mathcal{S}_1)$ est la réunion des appartements $A_{\mathcal{S}'}$ de $I_K(\mathcal{G})$, pour $\mathcal{S}' \supset \mathcal{S}_1$.

Remarque 2.4.11 : Sous les conditions de 2.4.9, il existe au moins un morphisme de $I_K(\mathcal{G}_1)$ dans $I_K(\mathcal{G})$ adapté à l'injection de $\mathcal{G}_1(K)$ dans $\mathcal{G}(K)$; mais en général, il n'y a pas de meilleur choix parmi les morphismes possibles. Par exemple une injection de $I_K(\mathcal{Z}(\mathcal{S})) = X_*(\mathcal{S})\otimes\mathbb{R}$ dans $A_{\mathcal{S}} = I_K(\mathcal{Z}(\mathcal{S}),\mathcal{G})$ est déterminée par un point origine de $A_{\mathcal{S}}$ (l'image de $I_K(\mathcal{Z}'(\mathcal{S}))$).

Ce cas particulier montre que l'on ne peut espérer une fonctorialité en $\mathcal{G}$ de $I_K(\mathcal{G})$.

2.4.12 Considérons une extension galoisienne L/K de groupe de Galois Γ, supposons qu'un sous-groupe $\mathcal{G}_1$, défini sur K, de $\mathcal{G}$ puisse être construit sur L comme en 2.4.9 et que $\mathcal{G}$ ait un immeuble sur L, alors :

Proposition : L'action de Γ sur $I_L(\mathcal{G})$ stabilise $I_L(\mathcal{G}_1,\mathcal{G})$ et il existe une identification de $I_L(\mathcal{G}_1,\mathcal{G})$ avec $I_L(\mathcal{G}_1)$ telle que l'action induite de Γ sur $I_L(\mathcal{G}_1)$ soit l'action construite en 2.4.6.

Démonstration : Soit $\mathcal{S}$ un tore L-déployé maximal de $\mathcal{G}_1$ donc de $\mathcal{G}$. Si $\gamma \in \Gamma$, $\gamma.\mathcal{S}$ est un tore L-déployé maximal de $\mathcal{G}_1$, ainsi il existe $g \in \mathcal{G}_1(L)$ tel que $\gamma.\mathcal{S} = {}^g\mathcal{S}$, alors $\gamma.A_{\mathcal{S}} = g.A_{\mathcal{S}}$ et $I_L(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}) = \mathcal{G}_1(L).A_{\mathcal{S}}$ est stable par Γ. De plus γ induit une bijection de $\Phi(\mathcal{S},\mathcal{G})$ sur $\Phi(\gamma\mathcal{S},\mathcal{G})$ et stabilise $\mathcal{G}_1$, donc γ induit une bijection de $\Phi(\mathcal{S},\mathcal{G}_1)$ sur $\Phi(\gamma\mathcal{S},\mathcal{G}_1)$. Choisissons une identification de $I_L(\mathcal{G}_1)$ avec $I_L(\mathcal{G}_1,\mathcal{G})$, alors l'action de γ est un automorphisme de $I_L(\mathcal{G}_1)$ adapté à l'automorphisme γ de $\mathcal{G}_1(L)$. D'après le lemme 2.4.3 cette action est le produit d'une action sur V_1 et d'une action sur $I_L^!(\mathcal{G}_1)$. Il suffit de montrer que l'action de Γ sur V_1 a un point fixe. Mais $\mathcal{S}$ est défini et déployé sur une extension galoisienne finie de K, ainsi Γ agit sur $A_{\mathcal{S}}$, donc sur V_1, à travers un groupe fini d'isométries, d'où le résultat.

Définition 2.4.13 : Soit L/K une extension galoisienne de groupe de Galois Γ, on suppose que $\mathcal{G}$ a un immeuble sur L, et on note $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ l'ensemble des points de $I_L(\mathcal{G})$ invariants par l'action de Γ.

On appelle point invariant ordinaire de $I_L(\mathcal{G})$ par Γ, un point de $I_L(\mathcal{G})^\Gamma$ contenu dans un appartement $A_{\mathcal{C}}$ de $I_L(\mathcal{G})$ relatif à un tore L-déployé maximal $\mathcal{C}$ contenant un tore K-déployé maximal $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$.

L'ensemble des points invariants ordinaires est noté $I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord}$.

Remarques 2.4.14 : a) Le tore $\mathcal{C}$ introduit ci-dessus n'est pas forcément défini sur K , cependant le tore K-déployé maximal $\mathcal{S}$ contenu dans $\mathcal{C}$ est unique (cela résulte du lemme 2.4.16).

b) D'après la proposition 2.4.8 et la remarque 2.4.7 d), on a :

$$I_L(\mathcal{G})^{\Gamma} = (X_{*K}(\mathrm{rad}(\mathcal{G})\otimes\mathbb{R}) \times I'_L(\mathcal{G})^{\Gamma}$$
$$I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord} = (X_{*K}(\mathrm{rad}(\mathcal{G}))\otimes\mathbb{R}) \times I'_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord} .$$

c) Par définition $I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord}$ est la réunion des $I_L(\mathcal{Z}(\mathcal{S}),\mathcal{G})^{\Gamma}$ pour les tores K-déployés maximaux $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$.

d) L'action de $G = \mathcal{G}(K) \subset \mathcal{G}(L)$ sur $I_L(\mathcal{G})$ stabilise $I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord}$.

Proposition 2.4.15 : Un point de $I_L(\mathcal{G})$ est un point invariant ordinaire si et seulement si il est contenu dans un sous-espace affine B , d'un appartement de $I_L(\mathcal{G})$, tel que B soit fixe par Γ et de dimension supérieure ou égale au rang relatif ℓ de $\mathcal{G}$ sur K . Et alors la dimension de B est ℓ .

Démonstration : Si $x \in I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord}$, il existe $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ comme en 2.4.13, tels que $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ et $x \in A_{\mathcal{C}}$, alors le sous-espace convexe B de $A_{\mathcal{C}}$ engendré par $\mathcal{S}(K).x$ répond à la question. Le reste de la proposition découle du lemme suivant.

Lemme 2.4.16 : Sous les hypothèses de 2.4.13, si $A_{\mathcal{C}}$ est un appartement de $I_L(\mathcal{G})$ contenant un espace affine B , fixe par Γ , de dimension r , alors il existe un sous-tore $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}$ de rang au moins r , défini et déployé sur K . De plus l'ensemble des éléments de $\mathcal{G}(L)$ qui stabilisent B et y induisent des translations, est contenu dans $Z_L(\mathcal{S})$.

Démonstration : On peut supposer $r > 0$, c'est-à-dire B non vide et non réduit à un point. Considérons le sous-tore L-déployé $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}$ intersection des noyaux des caractères χ de $\mathcal{C}$ tels que $\chi(B)$ soit réduit à un point. Le rang de $\mathcal{S}$ est au moins r . Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma A_{\mathcal{C}}$ est un appartement contenant B , il existe donc un élément g_γ de $\mathcal{G}(L)$ fixant l'enclos de B , tel que $g_\gamma.A = \gamma.A$. Ainsi $\theta_\gamma = g_\gamma^{-1} \circ \gamma$ est un automorphisme de I_L qui stabilise $A = A_{\mathcal{C}}$ et fixe B ; donc $\psi_\gamma = \mathrm{Int}(g_\gamma^{-1}) \circ \gamma$ est un automorphisme de $\mathcal{G}(L)$ qui stabilise $\mathcal{C}(L)$.

a) $\mathcal{S}(L)$ est stable par ψ_γ : en effet ψ_γ induit un automorphisme φ_γ de $X^*(\mathcal{C})$ et cet automorphisme étendu à $X^*(\mathcal{C})\otimes\mathbb{R}$ est le transposé de l'automorphisme vectoriel de $X_*(\mathcal{C})\otimes\mathbb{R}$ induit par l'automorphisme affine $\theta_{\gamma}|_A$. Donc φ_γ stabilise l'ensemble X_B des caractères de $\mathcal{C}$ tels que $\chi(B)$ soit réduit à un point ; d'où le résultat.

b) $\mathcal{S}(L)$ est stable par Γ : g_γ fixe B , on sait même que l'on peut choisir g_γ dans le groupe engendré par les sous-groupes U_a , pour $a \in \Phi(\mathcal{C}) \cap X_B$; ainsi g_γ centralise $\mathcal{S}(L)$ d'où le résultat d'après le a).

c) $\mathcal{S}$ est défini sur K : $\mathcal{S}(L)$ est dense dans $\mathcal{S}$ puisque K est infini, donc $\mathcal{S}$ est stable par Γ et défini sur K .

d) $\mathcal{S}$ est déployé sur K : il s'agit de voir que Γ fixe $X^*(\mathcal{S}) = X^*(\mathcal{C})/X_B$. Puisque g_γ centralise $\mathcal{S}(L)$ l'action de γ sur $X^*(\mathcal{S})$ est la même que celle de φ_γ ; mais θ_γ fixe B , donc par dualité φ_γ fixe $X^*(\mathcal{S})$.

e) Un élément g de $\mathcal{G}(L)$ qui stabilise B et y agit par translation, fixe toutes les directions de demi-droites de B , donc appartient à tous les sous-groupes paraboliques déterminés par ces directions (1.3.4). L'intersection des sous-groupes paraboliques associés à deux demi-droites opposées d'une même droite D est le groupe réductif engendré par $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ et les $\mathcal{U}_a$ pour $a \in \Phi(\mathcal{C})$ et $a(D)$ réduit à un point (1.2.3). En prenant une droite en position générale dans B, on voit que g est dans $\mathcal{Z}(\mathcal{S})(L)$.

<u>Lemme</u> 2.4.17 : <u>L'ensemble</u> $I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord}$ <u>est non vide</u>. modulo la conjecture 1.2.11

<u>Démonstration</u> : D'après la remarque 2.4.14 c) et la proposition 2.4.12, il suffit de montrer que $I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}$ n'est pas vide. Il existe une sous extension galoisienne finie M de L sur K, telle que $\mathcal{G}$ ait même rang sur L et sur M ; l'exemple 2.5.2 a et la proposition 2.5.5 permettent donc de se ramener au cas d'une extension finie. Mais ce dernier cas est démontré en 1.2.11.

<u>N.B.</u> On n'utilisera pas le lemme 2.4.17 avant le numéro 2.5.6.

§5 <u>Plongements et descente</u>.

On suppose toujours le corps K hensélien.

<u>Définitions</u> 2.5.1 : a) Soit $\sigma : L \to M$ un K-homomorphisme d'extensions algébriques de K, on suppose que $\mathcal{G}$ a des immeubles sur M et sur L,

un <u>plongement de</u> $I_L(\mathcal{G})$ <u>dans</u> $I_M(\mathcal{G})$ est un morphisme centré f de $I_L(\mathcal{G})$ dans $I_M(\mathcal{G})$, adapté à l'homomorphisme de groupe $\mathcal{G}(\sigma)$ de $\mathcal{G}(L)$ dans $\mathcal{G}(M)$ et vérifiant la condition supplémentaire :

(P) pour tout tore L-déployé maximal $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$, il existe un tore M-déployé maximal $\mathcal{C}$ de $\mathcal{G}$, tel que $\mathcal{G}(\sigma).\mathcal{S}(L) \subset \mathcal{C}(M)$ (i.e. $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ si on considère σ comme une inclusion) et $f(A_{\mathcal{S}}) \subset A_{\mathcal{C}}$.

Si l'extension M/L est galoisienne de groupe de Galois Γ, on dit que le plongement f est <u>galoisien</u> si $f(I_L(\mathcal{G})) \subset I_M(\mathcal{G})^{\Gamma}$.

b) On dit que $\mathcal{G}$ <u>a des immeubles fonctoriels au-dessus de</u> K, ou que $I_L(\mathcal{G})$ <u>est fonctoriel en</u> L, si pour toute extension algébrique L de K, $\mathcal{G}$ a un immeuble sur K et s'il existe un <u>système fonctoriel de plongements</u> (p_σ), à savoir : pour tout K-homomorphisme $\sigma : L \to M$ d'extensions algébriques de K, p_σ est un plongement de $I_L(\mathcal{G})$ dans $I_M(\mathcal{G})$ et on a : $p_{id} = Id$ et $p_{\sigma' \circ \sigma} = p_{\sigma'} \circ p_\sigma$.

<u>Exemples</u> 2.5.2 : a) Si $\mathcal{G}$ a <u>même rang relatif</u> sur L et sur M et a un immeuble sur M, il en a un sur L et il existe un unique plongement de $I_L(\mathcal{G})$ dans $I_M(\mathcal{G})$:

L'existence d'un plongement p résulte de 2.3.1 a) ; montrons l'unicité de p. Pour cela, d'après la remarque c) ci-dessous, on peut supposer que $\mathcal{G}$ est un tore ou est semi-simple. Si $\mathcal{G}$ est un tore on a $I_L(\mathcal{G}) = V_1$ et $p(0) = 0$; comme p est adapté à l'injection de $\mathcal{G}(L)$ dans $\mathcal{G}(M)$, on connait l'image de $\mathcal{G}(L).0$, donc par convexité p est forcément unique. Si $\mathcal{G}$ est semi-simple, la condition (P) montre que l'image par p de l'appartement $A_{\mathcal{S},L} \subset I_L(\mathcal{G})$ est l'appartement $A_{\mathcal{S},M} \subset I_M(\mathcal{G})$. Soit N_o un sous-groupe fini de $N_L(\mathcal{S})$ tel que ${}^v\nu(N_o) = {}^vW$, alors N_o a un unique point fixe x dans $A_{\mathcal{S},L}$ (resp. x' dans $A_{\mathcal{S},M}$), (cf. 2.1.11 e), comme p est adapté à l'inclusion de $\mathcal{G}(L)$ dans $\mathcal{G}(M)$ on a nécessairement $p(x) = x'$. Alors $p(g.x) = g.x'$, pour tout $g \in \mathcal{S}(L)$ et, par convexité, p est forcément uniquement déterminé sur $A_{\mathcal{S},L}$, ainsi l'unicité de p découle de ce que $I_L(\mathcal{G}) = \mathcal{G}(L).A_{\mathcal{S},L}$.

b) Si $\mathcal{G}$ est <u>déployé</u> sur K, il a des immeubles fonctoriels au-dessus de K :

L'existence des immeubles est démontrée en 2.2.14 a), leur fonctorialité découle du premier exemple et de la remarque b) ci-dessous.

<u>Remarques</u> 2.5.3 : a) Un plongement est une application injective.

b) Le composé de deux plongements est un plongement. ~~On verra en 2.5.5 que le composé de deux plongements galoisiens est un plongement galoisien.~~

c) D'après le lemme 2.4.3, un plongement de $I_L(\mathcal{G})$ dans $I_M(\mathcal{G})$ est le produit d'une injection vectorielle de $V_{1,L}(\mathcal{G})$ dans $V_{1,M}(\mathcal{G})$ (plus précisément d'un plongement de $I_L(\mathrm{rad}(\mathcal{G}))$ dans $I_M(\mathrm{rad}(\mathcal{G}))$) et d'un plongement de $I'_L(\mathcal{G}) = I_L(\mathcal{G}')$ dans $I'_M(\mathcal{G}) = I_M(\mathcal{G}')$.

d) Si σ est un K-automorphisme de L, l'unique plongement, associé à σ, de $I_L(\mathcal{G})$ dans $I_L(\mathcal{G})$ est l'action de σ sur $I_L(\mathcal{G})$ construite en 2.4.6.

e) Il résulte de la remarque d) que si $\mathcal{G}$ a des immeubles fonctoriels au-dessus de K et si $\sigma : L \to M$ est une extension galoisienne, alors le plongement p_σ de $I_L(\mathcal{G})$ dans $I_M(\mathcal{G})$ est galoisien. De même, dans le cas général, s'il existe un unique plongement de $I_L(\mathcal{G})$ dans $I_M(\mathcal{G})$, celui-ci est galoisien.

f) L'image d'un plongement galoisien est contenue dans l'ensemble des points invariants ordinaires.

g) Supposons que $\mathcal{G}$ ait des immeubles sur toute extension algébrique de K, on peut se demander si $\mathcal{G}$ a des immeubles fonctoriels au-dessus de K, ou, au moins, si pour toute extension $\sigma : L \to M$ de corps algébriques sur K, il existe toujours un plongement de $I_L(\mathcal{G})$ dans $I_M(\mathcal{G})$. On répondra à ces deux questions par des contre-exemples au chapitre III (§4 et 5) et des théorèmes au chapitre V (5.1.2 et 5.3.3).

h) D'après le lemme 2.4.3 et la remarque 2.4.5 si une application p de $I_L(\mathcal{G})$ dans $I_M(\mathcal{G})$ adaptée à l'injection de $\mathcal{G}(L)$ dans $\mathcal{G}(M)$ et isométrique pour des métriques invariantes fixées vérifie la condition (P), il existe une translation t de $V_{1,M}(\mathcal{G})$ telle que $t \circ p$ soit un plongement. Le lemme que l'on montrera en 5.3.2, valable sous des conditions assez générales (par exemple valuation discrète corps résiduel infini), permet de prouver que la condition (P) est en fait automatiquement vérifiée pour une application centrée, adaptée et isométrique. La proposition ci-dessous donne également une caractérisation simple des plongements galoisiens.

i) L'image réciproque d'une métrique normalisée par un plongement, est une métrique normalisée : d'après la condition (P), l'application affine de l'appartement $A_{\mathcal{S}}$ dans l'appartement $A_{\mathcal{T}}$ induit une application linéaire de $X_*(\mathcal{S})\otimes\mathbb{R}$ dans $X_*(\mathcal{T})\otimes\mathbb{R}$, qui est celle déduite de l'inclusion de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{T}$; le résultat vient alors de la définition même des métriques normalisées (2.2.3).

Proposition 2.5.4 : *Soit* L/K *une extension galoisienne de groupe de Galois* Γ, *on suppose que* $\mathcal{G}$ *a des immeubles sur* K *et sur* L *et on choisit une métrique invariante sur* $I_L(\mathcal{G})$ *et une métrique invariante sur* $I_K(\mathcal{G})$.

Si f *est une isométrie de* $I_K(\mathcal{G})$ *dans* $I_L(\mathcal{G})$, *adaptée à l'injection de* $\mathcal{G}(K)$ *dans* $\mathcal{G}(L)$, *et si* $f(I_K(\mathcal{G}))\subset I_L(\mathcal{G})^\Gamma$, *alors, quitte à modifier* f *par une translation de* $V_{1,K}(\mathcal{G}) = V_{1,L}(\mathcal{G})^\Gamma$, f *est un plongement galoisien de* $I_K(\mathcal{G})$ *dans* $I_L(\mathcal{G})$.

Démonstration : D'après 2.4.7 d) et 2.4.8, on a : $I_L(\mathcal{G})^\Gamma = V_{1,L}(\mathcal{G})^\Gamma \times I_L'(\mathcal{G})^\Gamma = V_{1,K}(\mathcal{G}) \times I_L'(\mathcal{G})^\Gamma$. Pour montrer que f est un plongement, il suffit de prouver que f vérifie la condition (P) (2.5.3 h)).

Soient r le rang relatif de $\mathcal{G}$ sur K et $\hat{K}$, $\hat{L}$ les complétés de K, L. Comme K est hensélien, il est séparablement algébriquement fermé dans $\hat{K}$, (annexe A2), donc $\hat{L}/\hat{K}$ est une extension galoisienne de groupe de Galois Γ. Soient $\mathcal{S}$ un tore K-déployé maximal de $\mathcal{G}$ et $x\in A_{\mathcal{S}}$, alors $\mathcal{S}$ est aussi $\hat{K}$-déployé maximal (2.3.9) et $f(x)\in f(A_{\mathcal{S}})\subset I_L(\mathcal{G})^\Gamma = I_{\hat{L}}(\mathcal{G})^\Gamma$ (2.4.7 g)). D'après la proposition 2.3.7, $f(A_{\mathcal{S}})$ est un sous-espace affine de dimension r et fixe par Γ d'un appartement $A_{\mathcal{T}'}$ de $I_{\hat{L}}(\mathcal{G})$. On a donc (2.4.16) un sous-tore $\mathcal{S}'$, $\hat{K}$-déployé, de $\mathcal{T}'$ de rang au moins r ; de plus $\mathcal{S}(K)$ stabilise $f(A_{\mathcal{S}})$ et y

induit des translations, donc $\mathcal{S}(K)\subset Z_L(\mathcal{S}')$ et, par densité, $\mathcal{S}\subset\mathcal{Z}(\mathcal{S}')$. Mais comme $\mathcal{G}$ est de rang r sur $\hat{K}$, on a $\mathcal{S}=\mathcal{S}'$. Ainsi $f(x)\in I_{\hat{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{S}),\mathcal{G}) = I_L(\mathcal{Z}(\mathcal{S}),\mathcal{G})$ et il existe un tore L-déployé maximal $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$, contenant $\mathcal{S}$, tel que $f(x)\in A_{\mathcal{T}}$. Mais alors $f(A_{\mathcal{S}})$, qui est l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}(K).f(x)\subset A_{\mathcal{T}}$, est contenu dans $A_{\mathcal{T}}$, cqfd.

Proposition 2.5.5 : 1) *Soient* L/K *une extension galoisienne*, M/K *une sous-extension galoisienne*, *telles que* $\mathcal{G}$ *ait des immeubles sur* L *et* M, *et* p *un plongement galoisien de* $I_M(\mathcal{G})$ *dans* $I_L(\mathcal{G})$, *alors l'action de* $Gal(L/K)$ *sur* $I_L(\mathcal{G})$ *induit sur* $I_M(\mathcal{G})$, *identifié par* p *à un sous-ensemble de* $I_L(\mathcal{G})$, *l'action de* $Gal(M/K)$.

2) *Le composé de deux plongements galoisiens est un plongement galoisien.*

Démonstration : Par hypothèse $Gal(L/M)$ fixe $p(I_M(\mathcal{G}))$, donc $\gamma\in Gal(L/K)$ induit sur $I_M(\mathcal{G})$ [$I_H(\mathcal{G})$ est fixe par Gal(L/M)] un automorphisme centré, adapté à l'action de γ sur $\mathcal{G}(M)$; mais celle-ci est l'action sur $\mathcal{G}(M)$ de l'image $\bar{\gamma}$ de γ dans $Gal(M/K)$, d'où la première assertion. La seconde en résulte aussitôt.

Théorème 2.5.6 : "Descente galoisienne sur un corps hensélien".

Soient L/K *une extension galoisienne de groupe de Galois* Γ, *telle que le groupe réductif K-défini* $\mathcal{G}$ *ait un immeuble sur* L, *et* $\mathcal{S}_1$ *un tore K-déployé maximal de* $\mathcal{G}$, [*alors le groupe dérivé* $\mathcal{Z}'(\mathcal{S}_1)$ *du centralisateur de* $\mathcal{S}_1$ *a un immeuble sur* L (2.4.10 2) et 2.2.14 b))], *supposons la condition suivante vérifiée*,

(D1) Γ *a un seul point fixe dans* $I_L(\mathcal{Z}'(\mathcal{S}_1))$

alors, si pour tout tore K-déployé maximal $\mathcal{S}$ *de* $\mathcal{G}$, *on pose* $A_{\mathcal{S}} = I_L(\mathcal{Z}(\mathcal{S}),\mathcal{G})^\Gamma$,

<u>le sous-ensemble</u> $I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord} = V_{1,K}(\mathcal{G}) \times I'_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord}$ <u>de</u> $I_L(\mathcal{G})$ <u>muni de l'action induite de</u> G <u>et du recouvrement par les</u> $A_{\mathcal{S}}$ <u>est un immeuble centré, de</u> $\mathcal{G}$ <u>sur</u> K.

<u>En particulier</u>, (<u>sous les conditions ci-dessus</u>), $\mathcal{G}$ <u>a un immeuble sur</u> K <u>et il existe un unique plongement galoisien de</u> $I_K(\mathcal{G})$ <u>dans</u> $I_L(\mathcal{G})$.

Ce théorème sera démontré en 2.5.10.

<u>Proposition</u> 2.5.7 : <u>Reprenons les hypothèses de</u> 2.5.6 (<u>sauf</u> D1) <u>et considérons la condition suivante</u> :

(D2) <u>pour tous</u> $x,y \in I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}$, $x \neq y$, <u>il existe une droite d'un appartement de</u> $I_L(\mathcal{G})$ <u>fixe par</u> Γ <u>contenant</u> x <u>et</u> y,

<u>alors la condition</u> (D2) <u>est satisfaite si et seulement si la condition</u> (D1) <u>est vérifiée et si</u> $I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord} = I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}$.

Cette proposition sera démontrée en 2.5.9.

<u>Remarques</u> 2.5.8 : a) On sait (2.4.17) que $I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord} \neq \emptyset$.

b) La condition (D1) équivaut à la condition (D'_2), dont l'énoncé est obtenu à partir de l'énoncé de (D2) en supposant $x,y \in I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord}$: cela résultera de la démonstration de 2.5.7.

c) Ce théorème est une version simplifiée du théorème de descente de [11 ; §9]. C'est lui que l'on utilisera dans les démonstrations à venir d'existence d'immeuble. On peut déjà voir grâce au théorème qu'un groupe quasi-déployé a un immeuble. La proposition 2.5.7 permet, sous l'hypothèse (D2), de renforcer la conclusion du théorème.

d) Sous les hypothèses du théorème $I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord}$ est canoniquement isomorphe à $I_K(\mathcal{G})$.

2.5.9 <u>Démonstration de la proposition</u> 2.5.7 : Si $I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord} = I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}$ et si (D1) est vérifiée, pour tous $x,y \in I_L(\mathcal{G})^{\Gamma} = I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord}$, les points x et y sont dans $I_K(\mathcal{G})$, (2.5.6) et si $x \neq y$ il existe une droite D d'un appartement $A_{\mathcal{S}}$ de $I_K(\mathcal{G})$ qui contient x et y, mais $A_{\mathcal{S}}$ est contenu dans un appartement $A_{\mathcal{C}}$ de $I_L(\mathcal{G})$ (avec $\mathcal{C} \supset \mathcal{S}$) et est fixe par Γ, d'où (D2).

Réciproquement supposons (D2) satisfaite. Soit r le rang relatif de $\mathcal{G}$ sur K. Comme $I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord}$ est non vide, il existe un appartement de $I_L(\mathcal{G})$ et un sous-espace affine B de dimension r de cet appartement, fixe par Γ, (2.4.15). Choisissons une demi-droite Δ en position générale dans B, alors Δ est fixe par Γ et l'enclos $cl(\Delta)$ de Δ est tel que $cl(\Delta)^{\Gamma}$ contient un fermé d'intérieur non vide d'un espace de dimension r, (l'espace B). Soit $x \in I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}$, quitte à raccourcir Δ, il existe un appartement **A** de $I_L(\mathcal{G})$ contenant Δ et x (1.2.6). Choisissons y sur Δ assez loin de x pour que l'enclos du segment $[x,y]$ contienne un segment non vide de Δ. Alors $[x,y]$ est fixe par Γ et $cl([x,y])^{\Gamma}$ contient un fermé d'intérieur non vide d'un espace de dimension $r' > r$; on a $r' > r$ s'il n'existe pas de sous-espace affine de dimension r de **A**, contenant $cl(\Delta)^{\Gamma}$ et x. D'après l'hypothèse (D2) le segment $[x,y]$ se prolonge en une droite D, contenue dans un appartement **A'**, fixe par Γ ; l'enclos de D est un sous-espace affine de **A'** stable par Γ et d'après le choix de y, $cl(D)^{\Gamma}$ est un sous-espace affine, contenant x, de **A'** de dimension au moins $r' > r$. D'après 2.4.15, il en résulte que x est un point invariant ordinaire ; on a bien $I_L(\mathcal{G})^{\Gamma} = I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord}$.

Il reste donc à voir que $I_L(\mathcal{Z}')(\mathcal{S}))^\Gamma = I'_L(\mathcal{Z}(\mathcal{S}))^\Gamma$ est réduit à un point, si $\mathcal{S}$ est un tore K-déployé maximal de $\mathcal{G}$. Pour cela choisissons une identification de $I_L(\mathcal{Z}(\mathcal{S}))$ avec $I_L(\mathcal{Z}(\mathcal{S}),\mathcal{G}) \subset I_L(\mathcal{G})$, (2.4.12). Si le résultat n'est pas vrai, il existe un tore L-déployé maximal $\mathcal{T}$ contenant $\mathcal{S}$, et deux points distincts x', y' de $(A'_{\mathcal{T}})^\Gamma$, (on note ici $A'_{\mathcal{T}}$ le quotient habituel de $A_{\mathcal{T}}$ considéré comme appartement de $I_L(\mathcal{Z}(\mathcal{S}))$ et non comme appartement de $I_L(\mathcal{G})$). Reprenons le raisonnement de l'alinéa précédent en prenant pour A l'appartement $A_{\mathcal{T}} = V_{1,L}(\mathcal{Z}) \times A'_{\mathcal{T}}$ de $I_L(\mathcal{Z},\mathcal{G}) \subset I_L(\mathcal{G})$, pour x le point $(0,x')$ et pour Δ une demi-droite en position générale dans l'espace affine $V_{1,L}(\mathcal{Z})^\Gamma \times \{y'\}$ de dimension r. Il n'existe pas de sous-espace affine de dimension r de $A_{\mathcal{T}}$ contenant $cl(\Delta)^\Gamma$ et x ; d'après l'alinéa précédent, il existe un sous-espace affine d'un appartement de dimension au moins $r' > r$, fixe par Γ ; cela contredit la proposition 2.4.15.

2.5.10 Démonstration du théorème 2.5.6 : On note r le rang relatif de $\mathcal{G}$ sur K.

Par transport de structure la condition (D1) est vérifiée par tout tore K-déployé maximal $\mathcal{S}$. Alors $I_L(\mathcal{Z}(\mathcal{S})) = V_{1,L}(\mathcal{Z}(\mathcal{S})) \times I'_L(\mathcal{Z}(\mathcal{S}))$ et $I'_L(\mathcal{Z}(\mathcal{S})) = I_L(\mathcal{Z}'(\mathcal{S}))$, donc $I_L(\mathcal{Z}(\mathcal{S}))^\Gamma = V^\Gamma_{1,L} \times I_L(\mathcal{Z}'(\mathcal{S}))^\Gamma$ est isomorphe à $V_{1,L}(\mathcal{Z}(\mathcal{S}))^\Gamma = V_{1,K}(\mathcal{Z}(\mathcal{S}))$, (2.4.7 d) et 2.4.8). D'après la proposition 2.4.12, $A_{\mathcal{S}} = I_L(\mathcal{Z}(\mathcal{S}),\mathcal{G})^\Gamma \simeq I_L(\mathcal{Z}(\mathcal{S}))^\Gamma$ est un espace affine de rang r, sous $X_*(\mathcal{S}) \otimes \mathbb{R} = V_{1,K}(\mathcal{Z}(\mathcal{S}))$. Cet espace $A_{\mathcal{S}}$ est l'ensemble des points fixes par Γ de tout appartement $A_{\mathcal{T}}$ de $I_L(\mathcal{G})$ tel que $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ et $(A_{\mathcal{T}})^\Gamma \neq \emptyset$.

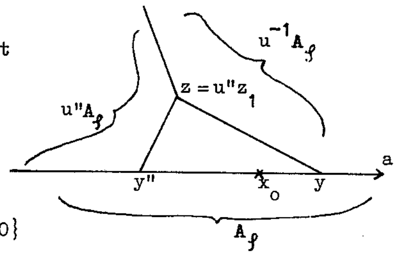
Le groupe $G = \mathcal{G}(K)$ agit sur $I_L(\mathcal{G})^\Gamma_{ord}$ qui est la réunion des $A_{\mathcal{S}}$, (2.4.14 c) et d)) ; montrons que $I_L(\mathcal{G})^\Gamma_{ord}$ est un immeuble ENB de $\mathcal{G}$ sur K, et

pour cela vérifions les conditions α, β, γ, δ de la définition 2.1.12.

α) $\mathcal{Z}(\mathcal{S})$ agit sur $A_{\mathcal{S}}$ comme il agit sur $V_{1,K}(\mathcal{Z}(\mathcal{S})) \simeq X_{*,K}(\mathcal{Z}(\mathcal{S})) \otimes \mathbb{R}$ rad ou $V_{1,L}(\mathcal{Z}(\mathcal{S}))$, c'est-à-dire par les translations déterminées par les caractères de $\mathcal{Z}$, comme il le faut. Plus généralement $Z_L(\mathcal{S})$ agit sur $V_{1,L}(\mathcal{Z}(\mathcal{S}))$ par des translations. Il reste à voir que, si $n \in N(\mathcal{S})$, n agit sur $V_{1,L}(\mathcal{Z}(\mathcal{S}))$ de façon que l'endomorphisme vectoriel associé soit ${}^v\nu(n)$. Choisissons un tore L-déployé maximal $\mathcal{T}$ contenant $\mathcal{S}$ tel que $A_{\mathcal{T}} \supset A_{\mathcal{S}}$; quitte à modifier n par un élément de $Z_L(\mathcal{S})$ on peut supposer n dans $N_L(\mathcal{S},\mathcal{T})$, ([1 ; 5.5]). Alors n agit sur $A_{\mathcal{T}}$ de façon que l'endomorphisme vectoriel associé, induise sur $V_{1,K}(\mathcal{Z}(\mathcal{S}))$ l'endomorphisme ${}^v\nu(n)$.

β) Soient $a \in \Phi(\mathcal{S})$ et $u \in U^*_a$ pour montrer que u fixe $D(u)$, on peut remplacer $\mathcal{G}$ par le groupe engendré par $\mathcal{Z}(\mathcal{S})$, $\mathcal{U}_a$ et $\mathcal{U}_{-a}$ (2.4.10 1)) et même par le groupe dérivé de ce dernier. Alors $\mathcal{S}$ est de rang 1 et $A_{\mathcal{S}}$ est une droite. Ecrivons $m(u) = u'.u.u''$ avec $u',u'' \in U_{-a}$. D'après α) ci-dessus, $m(u)$ induit une symétrie de la droite $A_{\mathcal{S}}$. Grâce à la définition de $\mathcal{U}_a$ et $\mathcal{U}_{-a}$ (2.0.5), on voit que l'ensemble des points de $A_{\mathcal{S}}$ fixés par u (resp. u',u'') est une demi-droite de $A_{\mathcal{S}}$ de la forme $\{x \in A_{\mathcal{S}}/a(x-y) \geqslant 0\}$ (resp. $\{x/a(x-y') \leqslant 0\}$, $\{x/a(x-y'') \leqslant 0\}$) avec $y,y',y'' \in A_{\mathcal{S}}$. Il s'agit de montrer que $a(y-y'') \leqslant 0$: car alors $u'^{-1}(m(u)y) = y$, mais u'^{-1} fixe une demi-droite de $A_{\mathcal{S}}$ et est isométrique, de plus $y, m(u).y \in A_{\mathcal{S}}$, donc $y = m(u).y$; ainsi $m(u)$ est la réflexion par rapport à y, donc $M(u) = \{y\}$ et $D(u) = \{x \in A/a(x-y) \geqslant 0\}$ est fixe par u.

Supposons $a(y-y'') > 0$. Pour $x \in A_{\mathcal{S}}$, on a $u''x = u^{-1}(u'^{-1}m(u)x)$; si $a(x-y)$ est suffisamment grand $a(m(u)x-y')$ est négatif, donc $m(u).x$ est fixe par u' et $u''x$ appartient à $u^{-1}A$: Il existe une demi-droite de $A_{\mathcal{S}}$, $\{x \in A \,/ a(x-z_1) \geqslant 0\}$ telle que son image par u'' soit commune à $u''(A_{\mathcal{S}})$ et $u^{-1}(A_{\mathcal{S}})$. Soit $z = u''z_1$ et supposons (par exemple) que $d(y,z) \geqslant d(y'',z)$, (le cas contraire se ramène à celui-ci en remplaçant u par u''^{-1} , sachant que $m(u''^{-1}) = m(u)^{-1} = ({}^{m(u)^{-1}}u'^{-1}).u''^{-1}.u^{-1})$.



Soient A un appartement de $I_L(\mathcal{G})$ contenant $A_{\mathcal{S}}$, et C une chambre (fermée) de A contenant le germe de segment $[y,y'')$, il existe un appartement A' de $I_L(\mathcal{G})$ contenant z et C . Ainsi il existe un point x_o de $A_{\mathcal{S}}$ strictement compris entre y'' et y tel que A' contienne le segment $[x_o,y]$, alors :

a) Pour tout $x \in]x_o,y[$, on a $A_{\mathcal{S}} \cap [x,z] = \{x\}$:

Sinon, soient $x' \in [x_o,y] \cap]x,z]$ et ρ la rétraction sur A relativement à la chambre C , ([11 ; 7.4.19]). Comme A' est un appartement contenant C , z et $[x_o,y]$, la rétraction ρ induit une isométrie de l'enclos de $\{z\} \cup [x_o,y]$, dans A . En particulier $\rho([x,z])$ et $\rho([y,z])$ sont des segments de A . Mais x et x' sont deux points distincts de $[x,z]$ contenus dans $A_{\mathcal{S}} \subset A$, donc fixes par ρ ; ainsi $\rho([x,z])$ est inclus dans $A_{\mathcal{S}}$. Comme une rétraction diminue les distances, on a $d(\rho(z),y'') \leqslant d(z,y'') \leqslant d(z,y) = d(\rho(z),y)$; ainsi $\rho(z)$ est plus près de y'' que de y et le segment $\rho(]y,z]) =]y,\rho(z)]$ a une intersection non vide avec $[y,x_o]$. Mais ceci contredit le fait que ρ induit une isométrie sur l'enclos de $\{z\} \cup [x_o,y]$, puisque par hypothèse $A_{\mathcal{S}} \cap]y,z] = \emptyset$.

b) Soit $x \in]x_o,y[$; la somme des angles de $[x,z)$ avec $[x,x_o)$ et $[x,y)$ se calcule dans A' , et vaut donc π . On en déduit (1.3.5) qu'il existe un appartement A'' de $I_L(\mathcal{G})$ contenant $A_{\mathcal{S}}$ et un point $z' \in]x,z]$. Mais, comme A'' contient $A_{\mathcal{S}}$, et comme $\mathcal{S}(K)$ agit par translations sur $A_{\mathcal{S}}$, on sait que $A'' = A_{\mathcal{T}}$ où $\mathcal{T}$ est un tore L-déployé maximal contenant $\mathcal{S}$ (2.4.16). L'espace $(A_{\mathcal{T}})^{\Gamma}$ n'est pas réduit à $A_{\mathcal{S}}$, puisqu'il contient z'. C'est contraire à un résultat établi dans le second alinéa de cette démonstration. D'où $a(y-y'') \leqslant 0$ et u fixe $D(u)$.

γ) Il est clair, par définition, que pour $g \in G$, on a : $g.A = A_{g.\mathcal{S}.g^{-1}}$.

δ) Soient $a \in \Phi(\mathcal{S})$, $x \in A$, $k_1,k_2 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in U^x_{a,k_1}$ et $u_2 \in U^x_{a,k_2}$, montrons que (u_1,u_2) fixe $D^x(2a+k_1+k_2)$. On sait déjà que u_i fixe $D^x(a+k_i) \subset A_{\mathcal{S}}$; alors d'après 1.1.7 et 1.1.9 , u_i s'écrit comme un produit d'éléments $u_{b,i}$, où $u_{b,i} \in \mathcal{U}_b(L)$ fixe $D^x(a+k_i) \subset A_{\mathcal{S}} \subset A_{\mathcal{T}}$, le produit étant étendu à l'ensemble Φ_a des racines b de $\Phi(\mathcal{T})$ telles que $b_{|\mathcal{S}} = a$ ou $2a$, ($\mathcal{T}$ est un tore L-déployé maximal contenant $\mathcal{S}$, tel que $A_{\mathcal{S}} \subset A_{\mathcal{T}}$). Mais pour $i,j,k \in \{1,2\}$ et $b,c,d \in \Phi_a$, le commutateur $(u_{b,i}, u_{c,j})$ commute à l'élément $u_{d,k}$ et il suffit donc de montrer que $(u_{b,1}, u_{c,2})$ fixe $D^x(2a+k_1+k_2) \subset A_{\mathcal{S}} \subset A_{\mathcal{T}}$, pour $b,c \in \Phi_a$. Mais cela résulte facilement de l'axiome V_3 de 1.1.3 pour $\mathcal{G}$ sur L .

On vient de vérifier que $I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord}$ est un immeuble ENB de $\mathcal{G}$ sur K ; c'est un immeuble de $\mathcal{G}$ sur K d'après 2.2.11 iii) et 2.2.7 e), puisque $I_L(\mathcal{G})$ est un immeuble de $\mathcal{G}$ sur L . D'autre part

$I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord} = V_{1,L}(\mathcal{G})^{\Gamma} \times I'_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord} = V_{1,K}(\mathcal{G}) \times I'_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord}$ (cf 2.4.14 b)), donc

$I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord}$ est un immeuble centré. Enfin il est clair que l'injection de $I_L(\mathcal{G})^{\Gamma}_{ord}$ dans $I_L(\mathcal{G})$, est l'unique plongement galoisien possible.

III - EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

On se donne un corps K muni d'une valuation réelle non triviale ω . On note $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de (K,ω) et on appelle unités de K les éléments de K , de valuation nulle, c'est-à-dire les éléments inversibles de $\mathcal{O}_K$.

§1 Immeubles de $\mathcal{G}\ell(V)$, $\mathcal{S}\ell(V)$, $\mathcal{P}g\ell(V)$.

3.1.1 Rappels : (cf par exemple [11 ; n° 10.2, 6.1.3 a) b), 6.2.3.a) b)]). Soit V un espace vectoriel de dimension $N \geqslant 1$ sur K . Choisissons-en une base $e = (e_1,\dots,e_N)$; le groupe $\mathcal{G}\ell(V)$ s'identifie alors à $\mathcal{G}\ell_{N,K}$; c'est un groupe réductif.

Les endomorphismes diagonaux par rapport à la base e constituent un tore maximal $\mathcal{T}_e$ de $\mathcal{G}\ell(V)$ qui est déployé sur K . Le normalisateur de $\mathcal{T}_e$ est constitué des endomorphismes qui dans la base e sont représentés par une matrice monomiale. Le groupe de Weyl associé s'identifie au groupe symétrique $\mathfrak{S}_N$ des permutations de $(e_1,\dots,e_N)$.

Le $\mathbb{Z}$-module des caractères de $\mathcal{T}_e$ s'identifie à $\mathbb{Z}^N$, avec pour base $(\chi_1,\dots,\chi_n)$ où χ_i est tel que $\chi_i(A) = a_{i,i}$ pour toute matrice diagonale A . Alors ${}^vW = \mathfrak{S}_N$ opère (à droite) sur $X^*(\mathcal{T})$ par $w(\chi_i) = \chi_{w^{-1}(i)}$.

Le radical de $\mathcal{G}\ell(V)$ est le groupe multiplicatif des endomorphismes scalaires ; le coradical s'identifie grâce au déterminant au groupe multiplicatif. L'isogénie du radical dans le coradical est donc l'élévation à la puissance $N^{\underline{\text{ième}}}$.

Le système de racines Φ s'identifie à l'ensemble des couples ordonnés (i,j) avec $i \neq j$; la racine associée à (i,j) s'écrit $a_{i,j} = \chi_i - \chi_j$. Un système de