

P43

T H È S E

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR LE TITRE DE DOCTEUR D'ÉTAT

SPECIALITÉ : MATHÉMATIQUE

par Guy ROUSSEAU

Sujet de la thèse : IMMEUBLES DES GROUPES RÉDUCTIFS SUR LES CORPS LOCAUX

Soutenue le 12 Janvier 1977 devant la Commission d'Examen

MM. J. CERF Président
 F. BRUHAT
 M. DEMAZURE
 P. GERARDIN
 M. RAYNAUD
 J. TITS

SOMMAIRE 267 p.

| | | |
|-----|--|-------|
| | | 0.1 |
| | | pages |
| | INTRODUCTION.....7 p. | 0.2 |
| I | DONNÉES RADICIELLES VALUÉES 28 p. | |
| | §1 Définitions et rappels..... | 1.1 |
| | §2 Cheminées..... | 1.10 |
| | §3 Notion d'angle..... | 1.19 |
| II | IMMEUBLE D'UN GROUPE RÉDUCTIF 69 p. | |
| | §0 Notations..... | 2.1 |
| | §1 Donnée radicielle valuée et immeuble..... | 2.3 |
| | §2 Métriques et bornologies..... | 2.23 |
| | §3 Passage au corps complété ; corps hensélien..... | 2.33 |
| | §4 Action d'un groupe de Galois ; morphismes..... | 2.44 |
| | §5 Plongements et descente..... | 2.58 |
| III | EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES 40 p. | |
| | §1 Immeubles de $\mathbb{Q}_\ell(V)$, $\mathbb{Z}_\ell(V)$, $\mathbb{F}_\ell(V)$ | 3.1 |
| | §2 Immeubles des formes de \mathbb{Z}_2 | 3.9 |
| | §3 Sauvagerie d'une extension..... | 3.17 |
| | §4 Formes de \mathbb{Z}_2 en valuation discrète..... | 3.27 |
| | §5 Un contre-exemple en valuation dense..... | 3.34 |
| IV | UN LEMME DE REDRESSEMENT 23 p. | |
| | §1 Énoncé du lemme..... | 4.3 |
| | §2 Démonstration du lemme..... | 4.8 |
| V | DESCENTE ET PLONGEMENT DES IMMEUBLES 26 p. | |
| | §1 Descente modérément ramifiée..... | 5.1 |
| | §2 Bornes et bornologies..... | 5.8 |
| | §3 Existence du plongement des immeubles..... | 5.16 |
| | ANNEXE : CORPS HENSELIENS...8 p. | A1 |
| | BIBLIOGRAPHIE.....2 p. | B1 |
| | INDEX.....4 p. | C1 |

ERRATA

Il faut apporter les corrections suivantes aux énoncés (les démonstrations sont parfois à remanier assez nettement) :

1.2.9 : Faux en général en rang ≥ 2 .

1.2.11 : Conjecture démontrée dans les cas suivants :

Valuation discrète ; rang ≤ 1 ; H est un 2-groupe.

2.4.17 : Conjecture démontrée dans les cas suivants :

Valuation discrète ; rang (sur L) ≤ 1 ; Γ est un 2-groupe ; K est d'égale caractéristique 0 .

2.5.5 : 1) n'est démontré que si $(\mathcal{G}, L/M)$ vérifie D1 .

2) est faux dans cette généralité.

2.5.6 : Dans D1 remplacer "un seul" par "un et un seul".

2.5.7 : Dans D2 rajouter l'hypothèse $I_L(\mathcal{G})_{\text{ord}}^{\Gamma} \neq \emptyset$.

2.5.8.a : Cf. 2.4.17.

4.1.4 : Rajouter l'hypothèse $\Delta \neq \emptyset$.

5.1.1 : Rajouter l'hypothèse $I_L(\mathcal{G})_{\text{ord}}^{\Gamma} \neq \emptyset$.

5.1.2 : Rajouter l'hypothèse $I_{K_1}(\mathcal{G})_{\text{ord}}^{\Gamma} \neq \emptyset$ si K_1/K est l'extension modérée qui quasidéploie \mathcal{G} .

5.2.2 et 5.2.7 : Rajouter l'hypothèse $I_L(\mathcal{G})_{\text{ord}}^{\Gamma} \neq \emptyset$.

5.3.4 : Dans le cas b) rajouter les hypothèses :

$$I_{K'}(\mathcal{G})_{\text{ord}}^{\text{Gal}(K'/K)} \neq \emptyset \text{ et } I_{L'}(\mathcal{G})_{\text{ord}}^{\text{Gal}(L'/L)} \neq \emptyset .$$

Remarque : Sauf 1.2.9, 2.5.5 et 4.1.4, il n'y a aucune modification en valuation discrète.

INTRODUCTION

Soit \mathcal{G} un groupe réductif (connexe) sur un corps K complet pour une valuation réelle non triviale ω ; on veut construire un analogue de l'espace riemannien symétrique d'un groupe de Lie semi-simple réel. Cet analogue sera un espace métrique contractile I sur lequel opère le groupe $\mathcal{G}(K)$ des points rationnels de \mathcal{G} , et qui donne le plus d'informations possible sur la structure algébro-géométrique de $\mathcal{G}(K)$. En particulier on veut que les fixateurs des points de I soient des sous-groupes bornés de $\mathcal{G}(K)$, et que l'espace I permette la classification des sous-groupes bornés maximaux de $\mathcal{G}(K)$, (cf [7]).

Nous allons nous attacher à construire de tels espaces, les immeubles, et à étudier leurs propriétés. Un immeuble de \mathcal{G} sur K est un espace métrique I sur lequel $\mathcal{G}(K)$ opère, et qui est recouvert par un ensemble de sous-espaces euclidiens, les appartements. A chaque sous-tore K -déployé maximal de \mathcal{G} correspond bijectivement un appartement, stable par le normalisateur de \mathcal{J} dans $\mathcal{G}(K)$. Deux points de I sont toujours contenus dans un même appartement.

Nous ne donnerons que très peu d'applications de la théorie; pour un tour d'horizon de celles-ci, on pourra se référer à [31]. Signalons cependant dès maintenant, que la classification des sous-groupes bornés maximaux de $\mathcal{G}(K)$ résulte aussitôt de [11] et de la connaissance de l'immeuble.

L'immeuble de \mathcal{G} sur K a d'abord été construit, en valuation discrète, comme immeuble d'un système de Tits à groupe de Weyl infini, système découvert, pour les groupes déployés par N. Iwahori et H. Matsumoto, ([17]). F. Bruhat et J. Tits ont ensuite montré l'existence d'un immeuble en particulier si la valuation de K est discrète à corps résiduel parfait, ([9], [10]). Leur méthode utilise la notion de donnée radicielle valuée, (développée dans [11]), qui a un

sens même en valuation dense. Comme suggéré par F. Bruhat et J. Tits, ([8], [11], [30]), c'est encore grâce à cette notion que l'on va chercher à généraliser le résultat.

La donnée radicielle cherchée est construite aussitôt grâce aux résultats de A. Borel et J. Tits, ([1]); on voit également assez facilement, quelle famille φ est candidate au titre de valuation, (on construira φ sans explication, au chapitre II). Le problème est alors de montrer que cette famille φ permet de construire un immeuble. Plus généralement on peut se poser cinq questions:

1) Le groupe \mathcal{G} a-t-il un immeuble sur K ? Plus précisément la famille φ vérifie-t-elle les axiomes des valuations dégagés par F. Bruhat et J. Tits, ([11])?

2) Si \mathcal{G} a un immeuble I , les fixateurs dans $\mathcal{G}(K)$ des points de I sont-ils bornés? (alors les sous-groupes bornés de $\mathcal{G}(K)$ sont les sous-groupes qui fixent au moins un point de I).

3) Si \mathcal{G} a un immeuble, peut-on mettre sur les fixateurs des points de I , des "structures entières" qui nous donneraient des informations supplémentaires?

4) Si L/K est une extension galoisienne finie et si \mathcal{G} a des immeubles I_K sur K et I_L sur L , peut-on "plonger" I_K dans I_L ? Autrement dit peut-on réaliser I_K comme sous-ensemble de l'ensemble des points de I_L invariants par le groupe de Galois de L/K , avec l'action induite de $\mathcal{G}(K)$?

5) Si \mathcal{G} a un immeuble I_L sur toute extension algébrique (finie) de K , y-a-t-il un foncteur covariant naturel de la catégorie des extensions algébriques de K , dans celle des ensembles, qui au corps L associe l'immeuble I_L ? (pour une formulation plus précise voir 2.5.1).

On ne cherchera en fait pas à répondre à la question 1 en vérifiant les propriétés de la famille φ , mais en construisant directement l'immeuble par descente: Si \mathcal{G} est un groupe réductif sur K , on sait qu'il existe une extension galoisienne finie L de K , telle que \mathcal{G} ait un immeuble I_L sur

L , (c'est le cas, par exemple, si $\mathcal{G} \otimes L$ est déployé). Le groupe de Galois Γ de L/K agit sur I_L , et on pourrait penser que l'ensemble des points de I_L invariants par Γ est un immeuble de \mathcal{G} sur K . Cela n'est malheureusement pas toujours vrai. Cependant F. Bruhat et J. Tits ont démontré un théorème ([11; §9], et version simplifiée dans [30]), qui dit que, sous certaines conditions, l'immeuble de \mathcal{G} sur K existe et s'identifie à un certain sous-ensemble de l'ensemble des points invariants. Ce théorème s'applique en particulier si \mathcal{G} est quasi-déployé, et nous allons montrer qu'il s'applique également si l'extension L/K est modérément ramifiée, (5.1.1).

Regardons maintenant les réponses que l'on peut apporter aux questions ci-dessus :

Une réponse positive à la seule question 1 semble insuffisante : l'immeuble ne donne pas de renseignements sur les parties bornées de $\mathcal{G}(K)$. Mais on montrera en fait (5.2.4), que si la réponse à la question 1 est oui, alors il en est de même pour la question 2. En particulier on montrera (5.2.3) que, si le groupe \mathcal{G} est anisotrope sur K , alors le groupe $\mathcal{G}(K)$ est borné. On généralise ainsi complètement un résultat connu dans certains cas, principalement si la valuation est discrète et le corps résiduel parfait (Bruhat et Tits) ou si le corps est parfait (Tamagawa, [32]).

On obtient une réponse positive aux questions 1 et 2 dans le cas où \mathcal{G} se quasi-déploie sur une extension modérément ramifiée (5.1.2), ce qui est toujours le cas si le corps résiduel est de caractéristique 0 ou si le corps résiduel est parfait et la valuation discrète. Par ailleurs dans [30], J. Tits démontre l'existence de l'immeuble de tous les groupes classiques et de tous les groupes simples de système de racines relatif différent de BC_1 , BC_2 . On démontre alors (5.1.5) l'existence de l'immeuble pour un groupe réductif quelconque si la caractéristique résiduelle est différente de 2. On n'obtient cependant pas de réponse à la conjecture de F. Bruhat et J. Tits, qui affirme que \mathcal{G} a toujours un immeuble.

Nous n'aborderons pas la question 3. Signalons que c'est par la construction de telles structures, que F. Bruhat et J. Tits, démontrent le théorème de descente non ramifiée, en valuation discrète à corps résiduel parfait. Si \mathcal{G} est déployé, les "structures entières" sont des schémas sur l'anneau des entiers de K , (cf [30]) ; dans le cas général, ce sont des groupes proalgébriques sur le corps résiduel.

La réponse à la question 4 est positive (5.3.3), au moins si la valuation ω est discrète et si l'on connaît l'existence d'immeubles de \mathcal{G} sur suffisamment d'extensions. Dans le cas général on étudiera un contre-exemple, (III §5) ; de plus chaque fois que le plongement de I_K dans I_L existe, on donnera une majoration explicite de la distance à I_K d'un point de I_L invariant par le groupe de Galois, (5.2.8).

La réponse à la question 5 n'est pas toujours positive, même en valuation discrète : on étudiera (III §4) une famille de contre-exemples sur des corps munis d'une valuation discrète (à corps résiduel non parfait). Cependant la réponse est oui, si \mathcal{G} se quasi-déploie sur une extension modérément ramifiée, (5.1.2).

Le chapitre I est consacré à la théorie abstraite des données radicielles valuées. On y trouvera des rappels des résultats et définitions de [11], (pour la commodité du lecteur), et quelques compléments qui nous seront utiles. Certains de ceux-ci étaient déjà connus en valuation discrète, (cf [11], [28], et [29]).

Le chapitre II consiste en la rédaction d'une partie de [30], à savoir la définition d'un immeuble, l'étude de conditions équivalentes à son existence et un théorème de descente (simplifié de [11; §9]). On n'y trouvera ni la démonstration de la conjecture de F. Bruhat et J. Tits pour certains groupes (grâce à la classification de [27]), ni l'étude des structures entières sur les immeubles, qui sont faites dans [30]. On a été amené à introduire quelques notions ne

figurant pas explicitement dans [30] : immeuble centré (afin de préciser l'étude de l'immeuble d'un groupe réductif non semi-simple), normalisation de la métrique, morphismes, points invariants ordinaires, plongements. J'espère que certains résultats sont nouveaux.

Le chapitre III est entièrement dévolu à l'étude de l'immeuble du groupe linéaire et surtout des formes de \mathbb{L}_2 . Les paragraphes 1 et 2 rassemblent des résultats bien connus, mais, me semble-t-il, non présentés systématiquement dans la littérature. On introduit au paragraphe 3 la notion simple, mais apparemment nouvelle, de sauvagerie d'une extension galoisienne finie, et on montre son utilité pour l'étude des points invariants des immeubles des formes de \mathbb{L}_2 ; ces résultats seront en partie généralisés dans les chapitres IV et V. On explicite, dans les paragraphes 4 et 5 des contre-exemples aux questions 5 et 4 ci-dessus.

Le chapitre IV est consacré à un lemme (technique) de redressement. C'est sans doute le résultat le plus original de ce mémoire ; en tout cas, on en déduit tous les résultats nouveaux, sauf les contre-exemples, annoncés plus haut. Ces applications du lemme sont rassemblées dans le chapitre V.

Enfin on a fait figurer en annexe la généralisation d'un théorème de Greenberg, que l'on utilise dans les chapitres précédents.

Dans la rédaction, pour plus de généralité et de commodité, on a remplacé l'hypothèse "K complet" par "K hensélien". Les conclusions diffèrent très peu (remarque 2.3.10).

Les résultats exposés ici ont été annoncés en [20], ainsi qu'à Oberwolfach en juin 1976.

On aura déjà compris que ce mémoire doit tout aux travaux antérieurs de F. Bruhat et J. Tits qui ont bien voulu faire partie de mon jury. En particulier J. Tits a évoqué dans son cours au Collège de France les problèmes à l'origine de cette thèse ; il a bien voulu s'intéresser à mes premiers résultats et lire les ébauches de ce travail. Je suis heureux de pouvoir les remercier ici.

J'ai bénéficié tout au long de mes années de recherche des conseils de M. Demazure, qui a toujours accepté de déchiffrer mes manuscrits. Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie P. Gerardin et M. Raynaud, qui m'a orienté dans la voie immobilière, d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je suis très reconnaissant à J. Cerf de m'avoir proposé un sujet de seconde thèse qui a excité mon intérêt pour un domaine nouveau.

Je voudrais enfin remercier mesdames M. Bonnardel et N. Parvan qui ont assuré avec compétence la frappe du manuscrit.

I - DONNEES RADICIELLES VALUEES

Si u et z sont deux éléments d'un groupe G , on note z_u l'élément $z.u.z^{-1}$ et (z,u) le commutateur $z_u.u^{-1} = z.u.z^{-1}.u^{-1}$.

§1 Définitions et rappels.

On se donne un espace vectoriel réel de dimension finie V et un système de racines Φ de groupe de Weyl ${}^V W$, dans le dual de V . Pour $a \in \Phi$, on désigne par r_a la réflexion de ${}^V W$ associée à la racine a . On notera Φ^+ un système de racines positives et $\Phi^- = -\Phi^+$.

Définition 1.1.1 : Une donnée radicielle de type Φ dans un groupe G est un système $(T, (U_a, M_a)_{a \in \Phi})$ possédant les propriétés suivantes :

(DR1) T est un sous-groupe de G , et pour $a \in \Phi$, U_a est un sous-groupe de G , non réduit à l'élément neutre.

(DR2) Pour $a, b \in \Phi$, le groupe des commutateurs (U_a, U_b) est contenu dans le groupe engendré par les U_{pa+qb} , pour $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $pa+qb \in \Phi$.

(DR3) Si a et $2a$ appartiennent à Φ , on a $U_{2a} \subsetneq U_a$.

(DR4) Pour $a \in \Phi$, M_a est une classe à droite suivant T et on a :

$$U_{-a}^* = U_{-a} - \{1\} \subset U_a.M_a.U_a.$$

(DR5) Pour $a, b \in \Phi$ et $n \in M_a$, on a :

$$n.U_b.n^{-1} = U_{r_a(b)}.$$

(DR6) Si U^+ (resp. U^-) désigne le groupe engendré par les U_a , pour

$a \in \Phi^+$ (resp. Φ^-), on a $(T.U^+) \cap U^- = \{1\}$.

Cette donnée radicielle est dite génératrice si T et les U_a engendrent G .

Toutes les données radicielles que l'on rencontrera seront génératrices. Si $a \in \Phi$ et $2a \notin \Phi$, on note $U_{2a} = \{1\}$.

1.1.2 Propriétés [11, n° 6.1] :

a) Soit N le sous-groupe de G engendré par T et les M_a , pour $a \in \Phi$; il existe un unique épimorphisme ${}^V v : N \rightarrow {}^V W$ tel que pour $a \in \Phi$ et $n \in N$, l'on ait $n.U_a.n^{-1} = U_b$ avec $b = {}^V v(n)(a)$. De plus on a $T = \text{Ker}({}^V v)$ et, pour $a \in \Phi$, $M_a = {}^V v^{-1}(\{r_a\})$. En particulier T normalise les U_a et U^+ , ainsi TU^+ est un sous-groupe de G .

b) Si $u \in U_a^*$, il existe un unique élément de M_a , noté $m(u)$ tel que $u \in U_{-a}.m(u).U_{-a}$.

c) Soit Π la base de Φ correspondant à Φ^+ ; posons $R = \{M_a/a \in \Pi\} \subset N/T$. Alors (G, TU^+, N, R) est un système de Tits de groupe de Weyl N/T isomorphe, par ${}^V v$ à ${}^V W$. En particulier on a la décomposition de Bruhat (sphérique) :

$$G = T.U^+.N.T.U^+ = U^+.N.U^+$$

Définition 1.1.3 : ① On appelle valuation de la donnée radicielle génératrice $(T, (U_a, M_a)_{a \in \Phi})$ une famille $\varphi = (\varphi_a)_{a \in \Phi}$, où φ_a est une application de U_a dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ possédant les propriétés suivantes :

(V₀) pour tout $a \in \Phi$, l'image de φ_a contient au moins 3 éléments,

(V₁) pour tout $a \in \Phi$ et tout $k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, l'ensemble $U_{a,k} = \varphi_a^{-1}([k, \infty])$

est un sous-groupe de U_a , et on a $U_{a,\infty} = \{1\}$,

(V₂) pour a ∈ Φ et m ∈ M_a, la fonction qui à u associe φ_{-a}(u) - φ_a^(m)(u) est constante sur U_{-a}^{*},

(V₃) soient a, b ∈ Φ et k, l ∈ R; si b ∉ -R⁺.a, le groupe des commutateurs (U_{a,k}, U_{b,l}) est contenu dans le groupe engendré par les U_{pa+qb, pk+ql} pour p, q ∈ N^{*} et pa+qb ∈ Φ,

(V₄) si a et 2a appartiennent à Φ, alors φ_{2a} est la restriction de 2φ_a à U_{2a},

(V₅) soient a ∈ Φ, u ∈ U_a et u', u'' ∈ U_{-a}; si u'uu'' ∈ M_a, on a φ_{-a}(u') = -φ_a(u).

② On dit que la famille φ = (φ_a)_{a ∈ Φ} est une quasi-valuation de la donnée radicielle si elle satisfait aux conditions V₀, V₁, V₂, V₄, V₅ et à la condition V₃bis, plus faible que V₃, obtenue en remplaçant dans V₃ l'hypothèse "b ∉ -R⁺.a" par l'hypothèse b ∉ R.a.

1.1.4 : Pour qu'une quasi-valuation soit une valuation, il faut et il suffit que, si c et 2c sont des racines et si k, l ∈ R, on ait : (U_{c,k}, U_{c,l}) ⊂ U_{2c, k+l}. Cependant beaucoup des propriétés des valuations sont encore valables pour les quasi-valuations, car, d'après DR2 et V₁, V₄, on a : (U_{c,k}, U_{c,l}) ⊂ U_{2c, 2inf(k,l)}.

Lemme : Si Φ n'a pas de facteur de type BC₁, toute quasi-valuation est une valuation.

Démonstration : Soit c une racine comme ci-dessus, alors c est dans un système BC_n, avec n ≥ 2 et on peut supposer n = 2. Le système est de base a, b (a racine longue) et c = a+b. Les racines positives sont : a₁ = a, a₂ = c = a+b, a₃ = a+2b, a₄ = b et 2c = 2a+2b. Soient z et z' dans U_c^{*},

choisissons u = u₁ ∈ U_a^{*} et posons u' = u₄ = ^{m(u₁)}z' ∈ U_b^{*}. D'après [10, 6.1.8] on a (u, u') = u₂.u₃, u_i ∈ U_{a_i} et u₂ = ^{m(u₁)}u' = z'. De plus, d'après DR2, u₃ commute à z' = u₂ et à z, donc (z, (u, u')) = (z, z'.u₃) = (z, z'). Posons k = φ_a(u), l = φ_b(u') et m = φ_c(z). D'après [10, 6.2.9] (encore valable pour une quasi-valuation) on a : φ_c(z') = k+l et alors, d'après DR2 et V₃bis :

$$\begin{aligned} (z, z') &= (z, (u, u')) = z.u.u'.u^{-1}.u'^{-1}.z^{-1}.u'.u.u'^{-1}.u^{-1} = u.z.u'.u^{-1}.u'^{-1}.z^{-1}(u', u) \\ &= u.t_1.u'z.u^{-1}.u'^{-1}.z^{-1}(u', u) \\ &= t_2.t_1.u.u'.u^{-1}.z.u'^{-1}.z^{-1}(u', u) = t_2.t_1.u.u'.u^{-1}.t_3.u'^{-1}(u', u) \\ &= t_2.t_1.u'.t_4.t_3.u^{-1}.u'^{-1}(u', u) = t_2.t_1.t_4.u.u'.t_3.u'^{-1}.u^{-1} \\ &= t_2.t_1.t_4.t_3.u^{-1} = t_2.t_1.t_4.t_5.t_3 = t_1.t_3.t_2.t_4.t_5 \end{aligned}$$

avec t₁, t₃ ∈ U_{a+2b, l+m} et t₂, t₄, t₅ ∈ U_{2a+2b, k+l+m}. D'après DR2 et DR6 on a t₁t₃ = 1; d'après V₁ on a donc φ_{2c}((z, z')) ≥ k+l+m = φ_c(z) + φ_c(z').

1.1.5 Parties closes :

1) On appelle fonction radicielle affine sur V, une application affine de la forme a+k avec a ∈ Φ et k ∈ R (ainsi (a+k)(v) = a(v) + k, pour tout v ∈ V).

2) La fonction radicielle affine a+k est appelée une racine affine si et seulement si a ∈ Φ et s'il existe u ∈ U_a^{*} tel que φ_a(u) = sup{φ_a(uu')/u' ∈ U_{2a}} = k.

3) Si a+k est une fonction radicielle affine, on note D(a+k) le demi espace {v ∈ V/a(v)+k ≥ 0} et M(a+k) l'hyperplan {v ∈ V/a(v)+k = 0}. On dit que M(a+k) est le bord de D(a+k).

Si $a+k$ est une racine affine, on dit que $D(a+k)$ est un demi-appartement et que $H(a+k)$ est un mur.

Comme $D(2a+2k) = D(a+k)$, on voit facilement que, si $a \in \Phi$ et $k \in \varphi_a(U_a^*)$, $D(a+k)$ est un demi-appartement, et $H(a+k)$ un mur.

4) Soit Ω une partie non vide de V , l'enclos de Ω , $cl(\Omega)$ est l'intersection des demi-appartements de V qui contiennent Ω . Si $\Omega = cl(\Omega)$, on dit que Ω est une partie close de V . Toute partie close est convexe fermée.

Remarque : Dans [11], on note $\alpha_{a,k} = D(a+k)$ et $\delta_{a,k} = H(a+k)$, de plus c'est $\alpha_{a,k}$ que l'on appelle racine affine ([11; 6.2.6]).

1.1.6 Action de N sur V [11; 6.2.10] :

Il existe un morphisme v de N dans le groupe des automorphismes affines de V , tel que :

- (i) pour $n \in N$, l'automorphisme vectoriel associé à $v(n)$ est $v_{v(n)} \uparrow$
- (ii) pour $a \in \Phi$ et $u \in U_a^*$, $v(m(u))$ est la réflexion par rapport au mur $H(a+\varphi_a(u))$, d'image vectorielle r_a
- (iii) pour $n \in N$, $a \in \Phi$ et $u \in U_a^*$, notons $b = v_{v(n)}.a \in \Phi$, or a alors : $v(n).D(a+\varphi_a(u)) = D(b+\varphi_b({}^n u))$.

1.1.7 Les groupes U_Ω , P_Ω , \hat{P}_Ω :

Soit Ω une partie non vide de V :

1) On définit une fonction f_Ω de Φ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ par $f_\Omega(a) = \inf\{k \in \mathbb{R}/\Omega \subset D(a+k)\}$; et U_Ω est le sous-groupe de G engendré par les sous-groupes $U_{a,f_\Omega(a)}$. On note : $U_\Omega^+ = U_\Omega \cap U^+$; $U_\Omega^- = U_\Omega \cap U^-$; $N'_\Omega = U_\Omega \cap N$.

2) On a alors ([11; 6.4.9])

$$(i) U_\Omega = U_\Omega^- \cdot U_\Omega^+ \cdot N'_\Omega.$$

(ii) L'application produit $\prod_{a \in \Phi_{\text{red}}}^\pm U_{a,f_\Omega(a)} \rightarrow U_\Omega^\pm$ est bijective quel que soit l'ordre dans lequel sont rangés les facteurs.

3) On note : $N_\Omega = N'_\Omega \cdot \text{Ker}(v)$; $P_\Omega = U_\Omega \cdot N_\Omega$

$$\hat{N}_\Omega = \{n \in N/v(n).x = x, \forall x \in \Omega\} \supset N_\Omega$$

$$\hat{P}_\Omega = \hat{N}_\Omega \cdot U_\Omega = U_\Omega \cdot \hat{N}_\Omega.$$

On a $U_\Omega = U_{cl(\Omega)}$ et $P_\Omega = P_{cl(\Omega)}$ par contre on peut avoir $\hat{P}_\Omega \not\supset \hat{P}_{cl(\Omega)}$.

\hat{P}_Ω et P_Ω sont des groupes qui contiennent U_Ω comme sous-groupe distingué, et pour $n \in N$ on a ([11; 7.1.8]) :

$$n.P_\Omega.n^{-1} = P_{v(n)\Omega}; \quad n.U_\Omega.n^{-1} = U_{v(n)\Omega}; \quad n.\hat{P}_\Omega.n^{-1} = \hat{P}_{v(n)\Omega}.$$

1.1.8 L'immeuble I de la donnée radicielle valuée est (cf. [11; 7.4.2]) le quotient de $G \times V$ par la relation d'équivalence :

$$(g,x) \sim (g,y) \iff \exists n \in N, y = v(n).x \text{ et } g^{-1}hn \in \hat{P}_x.$$

Les appartements (resp. demi-appartements, murs) de I sont les images de V (resp. des demi-appartements de V , des murs de V) par les applications injectives j_g de V dans I , indexées par G : $j_g(x) = \text{classe}(g,x)$. L'immeuble I est réunion de ses appartements.

Le groupe G opère sur I , par son opération évidente à gauche sur $G \times V$. Le sous-groupe N stabilise l'appartement canonique $A = j_1(V)$ et y induit l'action décrite en 1.1.6. Le groupe $U_{a,k}$ fixe $j_1(D(a+k))$.

Remarque : Toutes les propriétés énoncées jusqu'à maintenant, et peut-être certaines des suivantes, sont encore valables pour une quasi-valuation.

1.1.9 Premières propriétés : On identifie V à son image A dans I (par j_1).

- 1) Le sous-groupe N (resp. $H = \text{Ker}(v)$) est le stabilisateur (resp. fixateur) de A dans G ([11; 7.4.10]).
- 2) Soit Ω non vide dans A :
 - a) Le fixateur de Ω dans G est \hat{P}_Ω ([11; 7.4.4]).
 - b) Le groupe U_Ω est transitif sur l'ensemble des appartements contenant Ω (cela résulte de la définition et de [11; 7.4.9, 7.4.10]).
- 3) La définition 1.1.5 4) des parties closes, s'étend à toute partie d'appartement; l'intersection de deux appartements est une partie close; l'enclos d'une partie d'appartement Ω ne dépend pas de l'appartement contenant Ω choisi, (cf. [11; 7.4.8 et 7.4.11]).
- 4) Pour tout produit scalaire sur V invariant par le groupe de Weyl, il existe sur I une unique métrique qui induise sur V la structure euclidienne donnée, et pour laquelle G agisse isométriquement ([11; 7.4.20 (i)]). Dans la suite on fixera un tel produit scalaire et donc une telle métrique.
- 5) Etant donnés deux points x et y de I , il existe un appartement qui les contient. Le segment $[x,y]$ défini dans cet appartement est indépendant du choix de celui-ci : c'est la géodésique de x à y (cf. [11; 7.4.18 (i) et 7.4.20 (ii)]).

Une partie B de I est dite convexe si :

$$\forall x,y \in B, [x,y] \subset B.$$

6) Si pour tout $a \in \Phi$, $\varphi_a(U_a^*)$ est discret dans \mathbb{R} , on dit que la valuation est discrète. Alors I est l'immeuble d'un système de Tits de type affine ([11; 7.4.2]), c'est un complexe polysimplicial et un immeuble au sens de [29] et [28; page 38].

1.1.10 Un automorphisme intérieur $\text{Int}(g)$ transforme une donnée radicielle valuée dans G , en une autre donnée radicielle valuée. Les immeubles I et I' correspondants sont canoniquement isomorphes. Ainsi on peut définir l'immeuble d'une donnée radicielle valuée définie à conjugaison près; mais alors il n'y a plus d'appartement canonique A , ni d'origine canonique dans A .

1.1.11 Chambres et facettes (cf. [11; n° 7.2]) :

1) On identifie toute partie Ω de I au filtre des parties de I contenant Ω . Un filtre quelconque est dit contenu dans un second, si pour tout élément du second il existe un élément du premier qu'il contient.

L'enclos $\text{cl}(\mathcal{F})$ d'un filtre contenu dans un appartement est le filtre des parties de I qui contiennent l'enclos d'un élément de \mathcal{F} .

Soit \mathcal{F} un filtre contenu dans une partie B d'un appartement A , on dit que \mathcal{F} est en position générale dans B si chaque fois que deux fonctions radicielles affines coïncident sur tout élément de \mathcal{F} , alors elles coïncident sur B . Cette définition est indépendante du choix de l'appartement A .

2) Soit $[x,y]$ un segment de I , le germe en x de ce segment, noté $[x,y)$, est $\{x\}$ si $x = y$ et le filtre des parties de I qui contiennent un segment $[x,z]$ avec $z \in]x,y] = [x,y] - \{x\}$ si $x \neq y$.

Une facette est l'enclos d'un germe de segment ; si celui-ci est en position générale dans un appartement, on dit que la facette est une chambre. Toute facette est contenue dans une chambre. Tout point est contenu dans une chambre.

3) Si la valuation est discrète, l'ensemble des murs d'un appartement A est localement fini, les facettes contenues dans cet appartement, sont les parties de A qui sont contenues dans tout demi-appartement et tout mur de A , qu'elles rencontrent.

Remarque : Contrairement à la convention de [11; n° 7.2], toutes les facettes considérées ici sont "fermées".

1.1.12 Les fixateurs de facettes :

1) Soit $\tilde{\mathbb{R}}$ l'ensemble des éléments notés ∞ , r et r^+ pour $r \in \mathbb{R}$. $\tilde{\mathbb{R}}$ est ordonné par les relations :

$$r \leq r^+ \leq s \leq s^+ \leq \infty \quad \text{si } r, s \in \mathbb{R} \quad r < s.$$

$\tilde{\mathbb{R}}$ est muni d'une addition commutative et compatible avec la relation d'ordre, pour $r, s \in \mathbb{R}$, on a : $r+s = r+s$; $r^++s = r+s^+ = r^++s^+ = (r+s)^+$; $\infty+r = \infty+r^+ = \infty$.

Pour $a \in \Phi$ et $r \in \mathbb{R}$, on note :

$$U_{a,r^+} = \varphi_a^{-1}([r, \infty]) \quad ([11; 6.4.])$$

2) Si Ω est un filtre de I contenu dans A , on définit l'application f_Ω de Φ dans $\tilde{\mathbb{R}}$ par :

$$f_\Omega(a) = \inf \{k \in \mathbb{R}/\mathbb{D}(a+k) \supset \Omega\}.$$

Le groupe U_Ω engendré par les $U_{a,f_\Omega(a)}$ vérifie le théorème de structure de 1.1.7 2. On définit également N_Ω , \hat{N}_Ω , P_Ω et \hat{P}_Ω avec les propriétés de 1.1.7 3.

Le groupe U_Ω (resp. P_Ω , \hat{P}_Ω) est réunion des sous-groupes U_X (resp. P_X , \hat{P}_X) pour X partie de A et $\Omega \subset X$. En particulier \hat{P}_Ω est le fixateur de Ω .

3) Décomposition d'Iwasawa [11; 7.3.1] :

Si F est une facette de A , on a : $G = U^+ \cdot N \cdot U_F$.

4) Décomposition de Bruhat (affine) [11; 7.3.4] :

Si F et F' sont deux facettes de A , on a : $G = U_F \cdot N \cdot U_{F'}$.

5) Application : Si F et F' sont deux facettes de l'immeuble I , il existe un appartement de I contenant F et F' , ([11; 7.4.18 i]).

§2 Cheminées.

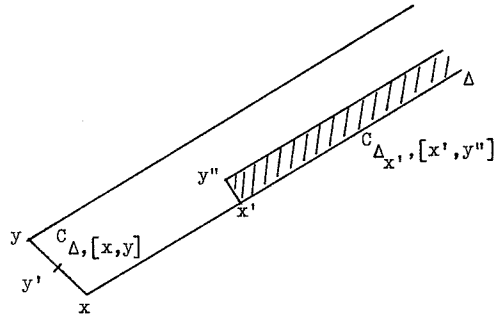
On se donne une donnée radicielle valuée génératrice $(T, (U_a, M_a, \varphi_a)_{a \in \Phi})$ dans un groupe G et on note I son immeuble.

Définitions 1.2.1 : Une demi-droite Δ de I est une partie d'un appartement qui dans cet espace affine, donc dans tout autre appartement qui le contient, se trouve être une demi-droite.

Une cheminée de I est l'enclos $C_{\Delta, S}$ de la réunion d'un segment S et d'une demi-droite Δ , de même origine et situés dans un même appartement.

Si Δ est une demi-droite d'origine x et x' un point de Δ , le raccourci $\Delta_{x'}$ de la demi-droite Δ est la demi-droite $\Delta - [x, x' [$.

Si Δ est une demi-droite d'origine x et $[x, y]$ un segment d'un appartement A , un raccourci de la cheminée $C_{\Delta, [x, y]}$ est défini par un point x' dans Δ et un point y' dans $[x, y]$, ($y'=x$ si $x=y$) : c'est la cheminée $C_{\Delta_{x'}, [x', y']}$ où $[x', y]$ est le segment de A translaté de $[x, y]$ par le vecteur $x'-x$.



Le germe d'une demi-droite Δ est le filtre des parties de I qui contiennent un raccourci de Δ .

Le germe d'une cheminée C est le filtre des parties de I qui contiennent un raccourci de C .

1.2.2 Remarques :

a) L'enclos d'une demi-droite Δ est un cas particulier de cheminée, et l'enclos du germe de Δ est le germe de son enclos.

b) L'enclos d'un "quartier" au sens de [11 ; 7.1.4 et 7.4.12] est l'enclos d'une demi-droite en position générale. C'est donc un cas particulier de cheminée et son germe est le germe de la cheminée.

c) Il résulte de la remarque 1.2.6, qu'une demi-droite Δ et un germe de segment de même origine sont toujours contenus dans un même appartement, donc définissent un germe de cheminée.

1.2.3 Groupes définis par une demi-droite : La donnée radicielle valuée détermine un appartement canonique A de I et un isomorphisme de A avec V . Soit Δ une demi-droite de A . On définit les ensembles :

$$\Phi_{\Delta}^{\ell} = \{a \in \Phi/a(\Delta) \text{ est réduit à un point de } \mathbb{R}\}$$

$$\Phi_{\Delta}^u = \{a \in \Phi/a(\Delta) \text{ est une demi-droite de } \mathbb{R} \text{ contenant } +\infty\}$$

Φ_{Δ} union disjointe de Φ_{Δ}^u et Φ_{Δ}^{ℓ} est un système parabolique de racines de Φ , et Φ_{Δ}^{ℓ} est le système de racine associé ([3 ; VI §1 n° 7 corollaire 6]).

On définit le groupe P_{Δ}^V (resp. L_{Δ}^V ; U_{Δ}^V) comme le sous-groupe de G engendré par T et les U_a pour $a \in \Phi_{\Delta}$ (resp. par T et les U_a pour $a \in \Phi_{\Delta}^{\ell}$; par les U_a pour $a \in \Phi_{\Delta}^u$).

Alors P_{Δ}^V normalise le sous-groupe U_{Δ}^V (1.1.1 et 1.1.2) et on a la décomposition de Levi : $P_{\Delta}^V = L_{\Delta}^V \cdot U_{\Delta}^V = U_{\Delta}^V \cdot L_{\Delta}^V$.

Ces sous-groupes de G ne dépendent que du germe de Δ . On peut les définir pour toute demi-droite d'un appartement.

1.2.4 Soit V_{Δ} le sous-espace de V intersection des noyaux des racines $a \in \Phi_{\Delta}^{\ell}$.

Proposition : $(T, (U_a, M_a)_{a \in \Phi_{\Delta}^{\ell}})$ est une donnée radicielle génératrice de type Φ_{Δ}^{ℓ} dans L_{Δ}^V et $\varphi_{\Delta} = (\varphi_a)_{a \in \Phi_{\Delta}^{\ell}}$ en est une valuation. La valuation φ_{Δ} identifie l'appartement canonique de cette donnée radicielle valuée à V/V_{Δ} .

Démonstration : Cela résulte de [11 ; 7.6.4 et 7.6.3].

Remarque : Soit π_{Δ} l'application de V dans V/V_{Δ} . Si Ω est un filtre de I inclus dans $A \simeq V$, on peut définir de manière évidente son image $\pi_{\Delta}(\Omega)$ dans V/V_{Δ} et alors il résulte de la proposition ci-dessus que, pour $a \in \Phi_{\Delta}^{\ell}$, on a :

$$f_{\Omega}(a) = f_{\pi_{\Delta}(\Omega)}(a).$$

En particulier $U_{\Omega} \cap L_{\Delta}^V = U_{\pi_{\Delta}(\Omega)}$.

Proposition 1.2.5 : Soient F une facette et C, C' deux germes de cheminées de l'appartement canonique A , on a alors les deux décompositions :

$$\textcircled{1} \quad G = U_F \cdot N \cdot U_C$$

$$\textcircled{2} \quad G = U_{C'} \cdot N \cdot U_C.$$

Démonstration : C (resp. C') est le germe d'une cheminée $C_{\Delta, [x, y]}$ (resp. $C_{\Delta'} [x', y']$).

$\textcircled{1}$ D'après les décompositions d'Iwasawa (1.1.12) et de Levi on a

$$G = U_F \cdot N \cdot L_{\Delta}^V \cdot U_{\Delta}^V.$$

Soit $g \in G$ il existe donc, $n \in N$, tel que $g \in U_F \cdot n \cdot L_{\Delta}^V \cdot U_{\Delta}^V$.

La décomposition de Bruhat affine (1.1.12) donne :

$L_{\Delta}^V = U_{\pi_{\Delta}(n^{-1}F)} \cdot (N \cap L_{\Delta}^V) \cdot U_{\pi_{\Delta}([x, y])}$. En effet $n^{-1}F$ est une facette et $[x, y]$ un germe de segment de $A \simeq V$, et leurs images par π_{Δ} sont donc une facette et un germe de segment.

Mais $U_{\pi_{\Delta}(n^{-1}F)} \subset U_{n^{-1}F} = n^{-1}U_F n$, on a donc : $g \in U_F \cdot N \cdot U_{\pi_{\Delta}([x, y])} \cdot U_{\Delta}^V$. Et il reste à voir que $U_C = U_{\pi_{\Delta}([x, y])} \cdot U_{\Delta}^V$. C'est évident puisque :

Le groupe U_{Δ}^V est engendré par des éléments $u \in U_a$, pour $a \in \Phi_{\Delta}^u$, si u est un tel élément $D(a + \varphi_a(u))$ contient un raccourci de $C_{\Delta, [x, y]}$;

Le groupe $U_{\pi_{\Delta}([x, y])}$ est engendré par des éléments $u \in U_a \cap U_{[x, y]}$ pour $a \in \Phi_{\Delta}^l$, si u est un tel élément il existe $z \in [x, y] \cup \{y\}$ tel que $\alpha_{a, \varphi_a(u)}$ contienne $C_{\Delta, [x, z]}$.

$\textcircled{2}$ D'après les décompositions de Bruhat sphérique (1.1.2) et de Levi on a :

$G = U_{\Delta'}^V \cdot L_{\Delta'}^V \cdot N \cdot L_{\Delta'}^V \cdot U_{\Delta'}^V$. Soit $g \in G$. Il existe donc n dans N tel que $g \in P_{\Delta'}^V \cdot n \cdot L_{\Delta'}^V \cdot U_{\Delta'}^V$.

D'après la décomposition d'Iwasawa dans $L_{\Delta'}^V$, on a

$$L_{\Delta'}^V = P_{\pi_{\Delta'}(n^{-1}\Delta')}^V \cdot (N \cap L_{\Delta'}^V) \cdot U_{\pi_{\Delta'}([x, y])}.$$

(Si $\pi_{\Delta'}(n^{-1}\Delta')$ est un point on pose $P_{\pi_{\Delta'}(n^{-1}\Delta')}^V = L_{\Delta'}^V$).

Mais $P_{\pi_{\Delta'}(n^{-1}\Delta')}^V \subset P_{n^{-1}\Delta'}^V = n^{-1}P_{\Delta'}^V n$; on a donc :

$$g \in P_{\Delta'}^V \cdot N \cdot U_{\pi_{\Delta'}([x, y])} \cdot U_{\Delta'}^V = P_{\Delta'}^V \cdot N \cdot U_C = U_{\Delta'}^V \cdot L_{\Delta'}^V \cdot N \cdot U_C,$$

il existe donc $n' \in N$ tel que $g \in U_{\Delta'}^V \cdot L_{\Delta'}^V \cdot n' \cdot U_C$.

Cependant $\pi_{\Delta'}(n.C)$ est soit un germe de cheminée, soit une facette, donc d'après la décomposition du type 1 ci-dessus ou la décomposition de Bruhat affine pour $L_{\Delta'}^V$, on a :

$$L_{\Delta'}^V = U_{\pi_{\Delta'}([x', y'])} \cdot (N \cap L_{\Delta'}^V) \cdot U_{\pi_{\Delta'}(n.C)}.$$

Mais $U_{\pi_{\Delta'}(n.C)} \subset U_{n.C} = n U_C n^{-1}$, on a donc :

$$g \in U_{\Delta'}^V \cdot U_{\pi_{\Delta'}([x', y'])} \cdot N \cdot U_C = U_C \cdot N \cdot U_C.$$

C.Q.F.D.

Corollaire 1.2.6 : Une facette (resp. un germe de cheminée) et un germe de cheminée sont contenus dans un même appartement.

Démonstration : Soit C_1 un germe de cheminée et soit F une facette (resp. C' un germe de cheminée) ; quitte à les modifier par un même élément de G on peut supposer que F (resp. C') est dans l'appartement canonique A . Alors C_1 est dans un appartement $g.A$ et $g^{-1}.C_1 = C$ est un germe de cheminée de A . On peut alors écrire $g = u'.n.u$ avec $u \in U_C$ et $u' \in U_F$ (resp. $u' \in U_{C'}$). Alors $C_1 = u'.nC$ et $F = u'.F$ (resp. $C' = u'.C'$) sont contenus dans le même

appartement $u'.A$.

Remarque : On utilisera le corollaire dans les cas particuliers suivants :

a) Etant données une facette et une demi-droite, alors quitte à raccourcir la demi-droite, il existe un appartement les contenant. Si la facette contient l'origine de la demi-droite, on voit par convexité qu'il est inutile de raccourcir la demi-droite.

b) Etant données deux demi-droites, alors quitte à les raccourcir, il existe un appartement les contenant.

Lemme 1.2.7 : Soit \mathcal{P} une famille de parties d'un appartement A , telle que pour toute facette F et tout germe de cheminée C de A , il existe des parties P et P' appartenant à \mathcal{P} contenant respectivement F et C ; alors A est recouvert par un nombre fini de parties P appartenant à \mathcal{P} .

Démonstration : Remplaçons \mathcal{P} par la famille \mathcal{Q} des parties de A contenues dans les réunions finies de parties $P \in \mathcal{P}$, et montrons que $A \in \mathcal{Q}$.

1) Pour tout $x \in A$, il existe $Q \in \mathcal{Q}$ qui est un voisinage de x :

Choisissons des vecteurs v_1, \dots, v_n non nuls, un dans chaque chambre vectorielle ouverte de V ; alors pour tout système Φ^+ de racines positives il existe un unique i tel que $v_i \in C_{\Phi^+} = \{v \in V/a(v) > 0 \ \forall a \in \Phi^+\}$.

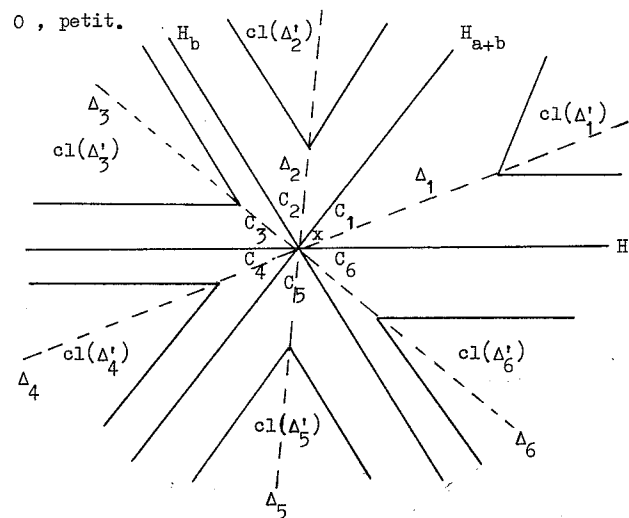
Il existe des nombres $\lambda_i > 0$ et des parties $P_i \in \mathcal{P}$ contenant $cl([x, x+\lambda_i v_i])$. Mais d'après le choix des v_i , $cl([x, x+\lambda_i v_i])$ est un voisinage de x dans $\bar{C}_{\Phi^+, x} = \{y \in A/a(y-x) \geq 0 \ \forall a \in \Phi^+\}$; or A est réunion des $\bar{C}_{\Phi^+, x}$, donc $Q = \bigcup_{i=1}^n P_i$, qui est dans \mathcal{Q} est un voisinage de x .

2) Par compacité on en déduit que toute partie bornée de A appartient à \mathcal{Q} .

3) Si Δ est une demi-droite, il existe un raccourci Δ' de Δ et un voisinage U de 0 dans V tels que $\{z+v/v \in U; z \in cl(\Delta') \cap (\Delta'+V_\Delta)\}$ appartient à \mathcal{Q} (V_Δ est défini en 1.2.4) :

Considérons des vecteurs v_i comme au 1), il existe donc un raccourci Δ' de Δ , d'origine x , et des $\lambda_i > 0$ tels que la réunion des cheminées $C_{\Delta'}, [x, x+\lambda_i v_i]$ soit dans \mathcal{Q} . Alors d'après le 1) il existe un voisinage U de 0 tel que la réunion de ces cheminées contienne $x+U$; mais chaque cheminée est une partie convexe contenant $cl(\Delta') \cap (x+V_\Delta)$, donc quitte à raccourcir Δ' , l'ensemble annoncé est dans \mathcal{Q} .

4) Montrons par récurrence sur la dimension que pour toute sous variété affine L de A et tout nombre réel d , l'ensemble $B(L, d) = \{z \in A/d(L, z) \leq d\}$ appartient à \mathcal{Q} : Si L est de dimension 0 , $B(L, d)$ est borné et on a montré le résultat au 2). Donnons-nous L ; par compacité, il suffit de montrer l'assertion pour $d > 0$, petit.



Considérons une origine x dans L , et pour toute racine $a \in \Phi$ telle que $\text{Ker}(a)$ ne contienne pas la direction de L , notons $H_a = \{z \in L/a(z-x) = 0\}$, c'est un hyperplan de L . Soient C_i les composantes connexes (en nombre fini) de $L - \bigcup_a H_a$, et Δ_i des demi-droites en position générale dans L , d'origine x et contenues (sauf x) dans C_i . Alors v_{Δ_i} contient la direction de L et d'après le 3) il existe $\epsilon > 0$ et des raccourcis Δ'_i de Δ_i tels que $\{z \in A/\exists x \in L \cap \text{cl}(\Delta'_i) d(x,z) < \epsilon\}$ soit dans \mathcal{Q} pour tout i . Mais Δ_i étant en position générale dans L , il existe des nombres d_a tels que L soit contenu dans la réunion des $B(H_a, d_a)$ et des $\text{cl}(\Delta'_i) \cap L$. D'après l'hypothèse de récurrence, les parties $B(H_a, d_a + \epsilon)$ sont dans \mathcal{Q} , ainsi $B(L, \epsilon)$ est dans \mathcal{Q} .

Proposition 1.2.8 : Soient F une facette (resp. C un germe de cheminée) et A un appartement de I . Il existe un ensemble fini d'appartements de I , qui contiennent tous F (resp. C) et dont la réunion contient A .

Remarque : Le cas particulier d'une chambre, pour une valuation discrète, est démontré dans un cadre plus général par Tits ([29]).

Démonstration : L'ensemble \mathcal{P} des intersections avec A , des appartements de I contenant F (resp. C), vérifie les hypothèses du lemme 1.2.7, d'après 1.1.12 5) et 1.2.6 ; d'où le résultat.

Corollaire 1.2.9 : L'enveloppe convexe d'une réunion finie d'appartements, est contenue dans une réunion finie d'appartements.

Démonstration : Soient A et A' deux appartements de I . D'après la proposition 1.2.8 on peut appliquer le lemme 1.2.7 à la famille \mathcal{P} des parties P de A' telles qu'il existe un ensemble fini d'appartements de I contenant

P et dont la réunion contient A . Ce lemme montre qu'il existe un ensemble fini d'appartements A_i de I , tels que pour tout $(x, x') \in A \times A'$, il existe un appartement A_i contenant x et x' et donc $[x, x']$. Le corollaire en résulte aussitôt.

1.2.10 : L'espace métrique I se plonge dans son complété \hat{I} ; si la valuation est discrète, I est complet ([11; 7.5.1]). Dans [11; 8.2.1 et 3.2.3] on prouve le résultat suivant :

Soit H un groupe agissant isométriquement sur I . S'il existe une partie bornée E de I stable par H , alors H a un point fixe appartenant à l'adhérence, dans \hat{I} , de l'enveloppe convexe de E .

Proposition 1.2.11 : Si un groupe fini H agit isométriquement sur I , il a un point fixe dans I . De plus l'ensemble de ses points fixes dans I est dense dans l'ensemble de ses points fixes dans \hat{I} .

Soit x un point de I , l'orbite $H.x$ est bornée et contenue dans la réunion d'un nombre fini d'appartements, son enveloppe convexe est donc contenue dans la réunion d'un nombre fini d'appartements, (1.2.9). Mais comme la distance induite sur chaque appartement est euclidienne cette réunion finie est complète, et d'après 1.2.10 H a un point fixe dans cette réunion, donc dans I .

Soit $y \in \hat{I}^H$ et $\epsilon > 0$, on peut choisir x dans la boule $B(y, \epsilon) = \{z \in \hat{I}/d(y, z) < \epsilon\}$, alors $H.x$ est dans $B_{y, \epsilon}$ et il suffit donc de savoir que $I \cap B_{y, \epsilon}$ est convexe. Par continuité on se ramène à montrer que si $x, x', y' \in I$ et $z \in [x, x']$, $d(y', z) < \sup(d(y', x), d(y', x'))$; par rétraction de I sur un appartement contenant $[x, x']$, de centre une chambre contenant z

([11; 7.4.20 (ii)]) , on se ramène au résultat, évident, pour x, x', y', z dans un espace euclidien.

§3 Notion d'angle.

On se donne une donnée radicielle valuée génératrice $(T, (U_a, M_a, \varphi_a)_{a \in \Phi})$ dans un groupe G et on note I son immeuble.

1.3.1 Immeuble généralisé : Supposons qu'il existe un homomorphisme v_1 du groupe G dans le groupe additif d'un R -espace vectoriel de dimension finie V_1 tel que :

- l'image de G engendre l'espace vectoriel V_1 ,
- pour $a \in \Phi$ l'image de U_a est réduite à zéro.

On définit alors l'immeuble généralisé I_1 comme le produit $I_1 = V_1 \times I$, avec l'opération de G définie par :

$$g.(v_1, x) = (v_1 + v(g), g.x) \quad \forall x \in I, g \in G, v_1 \in V_1.$$

Les appartements (resp. demi appartements, murs) de I_1 sont les produits par V_1 des appartements (resp. demi appartements, murs) de I . Si $A \approx V$ est l'appartement canonique de I toute racine est une fonction linéaire sur l'appartement $V_1 \times V$ par $a(v_1, v) = a(v)$. L'enclos d'une partie d'appartement est le produit par V_1 de l'enclos de son image dans I .

Dans la suite on choisit une métrique euclidienne sur V_1 , on définit donc une métrique sur I_1 par : $d((v_1, x), (v'_1, x'))^2 = d(v_1, v'_1)^2 + d(x, x')^2$.

Toutes les propriétés de I énoncées aux paragraphes 1 et 2 sont encore valables pour I_1 . Tout immeuble est un immeuble généralisé.

1.3.2 La notion d'angle (angle non orienté défini par son cosinus) dans un espace euclidien est une notion métrique. On peut donc, dans un immeuble généralisé, définir l'angle de deux segments ou demi-droites (munis d'une origine), dès que ces deux géodésiques sont contenues dans un même appartement ; l'angle ne dépendra pas de l'appartement choisi. En particulier ; d'après les paragraphes 1 et 2, on peut définir l'angle de :

- deux germes de segment
- un germe de segment et un germe de demi-droite
- deux germes de demi-droite
- une demi-droite et un germe de segment de même origine.

Si l'angle est 0 ou π (resp. $0; \frac{\pi}{2}$) on dit que les deux géodésiques sont parallèles (resp. ont même direction ; sont orthogonales).

Si S_1 et S_2 sont des segments (munis d'une origine), ou germe de segments, ou demi-droites ou germes de demi-droite, contenus dans un même appartement on note (S_1, S_2) leur angle.

1.3.3 Proposition : Deux germes de demi-droites de même direction font le même angle avec tout germe de segment ou de demi-droite.

Définition : L'ensemble des directions de I_1 est le quotient de l'ensemble des germes de demi-droite de I_1 par la relation d'équivalence "avoir même direction".

Démonstration : Soient Δ et Δ' deux demi-droites de même direction et S un germe de segment ou de demi-droite. On peut supposer Δ et Δ' dans un même

appartement A ; soient x et x' les origines de Δ et Δ' . Si $z \in [x, x']$, soit Δ_z la demi-droite d'origine z de même direction que Δ et Δ' ; considérons les cheminées $C_{\Delta_z}, [z, x]$ et $C_{\Delta_z}, [z, x']$. D'après 1.2.6 il existe des appartements contenant S et des raccourcis de ces deux cheminées ; par compacité du segment $[x, x']$ il existe un nombre fini de ces raccourcis dont la réunion contient la bande B , enveloppe convexe de Δ et Δ' , quitte à raccourcir ces demi-droites. Mais l'angle de S avec une demi-droite D ne change pas si on remplace la demi-droite par une demi-droite de même direction contenue dans un même appartement que S et D ; d'autre part deux des cheminées qui recouvrent la bande B ont en commun une demi-droite de même direction que Δ et Δ' , ou ont une intersection vide. Comme le segment $[x, x']$ est connexe, on en déduit aussitôt le résultat annoncé.

1.3.4 Le groupe G agit isométriquement sur I_1 , en permutant les appartements, il agit donc sur l'ensemble I^S des directions de I_1 .

Proposition : 1) Soit Δ une demi-droite de l'immeuble généralisé I_1 , le groupe P_Δ^V , défini en 1.2.3 est le fixateur de la direction de Δ .

2) Les groupes P_Δ^V pour Δ demi-droite de l'immeuble initial I , sont les groupes paraboliques différents de G du système de Tits (G, TU^+, N, R) (1.1.2 c)).

Remarque : Définissons un appartement de I^S comme l'ensemble des directions des demi-droites d'un même appartement de I ; alors, d'après la proposition, I^S muni de son système d'appartements et de son action de G est l'immeuble sphérique de la donnée radicielle $(T, (U_a, M_a)_{a \in \Phi})$, défini à partir du système de Tits

(G, TU^+, N, R) . (On entend immeuble sphérique "géométrique" c'est-à-dire simplicial au sens de [31]).

Démonstration : On peut se ramener par conjugaison, au cas où Δ est dans l'appartement canonique $V_1 \times A \simeq V_1 \times V$, et où Φ_Δ contient Φ^+ .

2) Alors P_Δ^V contient TU^+ , et P_Δ^V est donc parabolique et différent de G . Réciproquement un groupe parabolique P distinct de G correspond à une partie de $R \simeq \pi$ distincte de π , donc à un système parabolique de racines Φ_P avec $\Phi^+ \subset \Phi_P \subsetneq \Phi$. Si on choisit Δ en "position générale" dans V , et dans le cône $\{v \in V/a(v) \geq 0 \quad \forall a \in \Phi_P\}$, on aura $\Phi_\Delta = \Phi_P$ et donc $P = P_\Delta^V$.

1) Si la projection de $\Delta \subset V_1 \times V \subset I_1$ dans $V \subset I$ est un point, alors $P_\Delta^V = G$, est le fixateur de la direction de Δ ; sinon on est ramené à prouver l'assertion dans le cas $V_1 = 0$ et $I_1 = I$.

Un élément $t \in T$ transforme Δ en une demi-droite de V de même direction.

Un élément $u \in U_a$, pour $a \in \Phi_\Delta^u$, fixe un raccourci de Δ . Un élément $u \in U_a$, pour $a \in \Phi_\Delta^l$, fixe une demi-droite de V de même direction que Δ . Ainsi le groupe P_Δ^V fixe la direction de Δ . Le fixateur de cette direction contient P_Δ^V ; si ce n'est pas P_Δ^V il contient, d'après le 2), un groupe U_a pour $a \notin \Phi_\Delta$. Mais il existe $u \neq 1$ dans un tel U_a qui fixe dans Δ uniquement l'origine x (quitte à raccourcir Δ). Soit y un point de Δ différent de x , alors $([x, y], \Delta) = 0$; si Δ et $u\Delta$ ont même direction alors (1.3.3), on a $([x, y], u\Delta) = 0$; mais comme $x \in u\Delta$ cela implique $[x, y] \subset u\Delta$ contrairement à l'hypothèse.

Lemme 1.3.5 : Soient Δ une droite de I_1 , x un point de Δ et $[x,y]$ un segment. On note Δ_1 et Δ_2 les deux demi-droites d'origine x portées par Δ . On a alors :

$$([x,y),\Delta_1) + ([x,y),\Delta_2) \geq \pi = (\Delta_1,\Delta_2).$$

Et il y a égalité si et seulement s'il existe un appartement contenant Δ et $[x,y)$.

Remarque : "Si Δ et $[x,y)$ ne sont pas dans un même appartement la droite Δ apparait comme brisée vers l'extérieur, vue de $[x,y)$ ".

Démonstration : D'après la remarque 1.2.6 a), il existe un appartement A_1 (resp. A_2) contenant $[x,y)$ et Δ_1 (resp. Δ_2). Ainsi Δ_1 ou Δ_2 et $[x,y)$ déterminent des germes de cheminées. Il existe donc un appartement A contenant ces germes. Par convexité A contient Δ .

Supposons y suffisamment près de x pour que $y \in A_1 \cap A_2$ et que les demi-droites Δ_y^i de A_i d'origine y parallèles à Δ_i rencontrent chacune A pour $i = 1,2$. Choisissons alors y_i dans $A \cap (\Delta_y^i)$ et notons $x_i = y_i + (x-y) \in \Delta_i$ (le calcul est effectué dans A_i).

En calculant dans A_i on a $d(y,y_1) = d(x,x_1)$, et $d(y_1,x_1) = d(x,y)$, donc $d(y_1,y_2) \leq d(x_1,x_2)$ et $d(x_1,y_1) = d(x_2,y_2)$. Dans l'espace affine A on en déduit : $([x_1,y_1),\Delta_1) + ([x_2,y_2),\Delta_2) \geq \pi$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que si $d(y_1,y_2) = d(y,y_1) + d(y,y_2)$, ce qui équivaut à $y \in A$. Le lemme résulte donc de ce que l'on voit dans A_i que $([x_1,y_1),\Delta_1) = ([x,y),\Delta_1)$.

1.3.6 Application : Soient A un appartement de I , D un demi-appartement de A et M le mur qui est le bord de D . On dit qu'une chambre C de I est mitoyenne de M , si toute partie du filtre qui est C contient un ouvert de l'espace affine M . Dans ce cas nous allons montrer qu'il existe un appartement contenant D et C . (Si φ est discrète cela résulte de [11;2.4.12], 1.1.7.2 et 1.1.9.2)

La chambre C est déterminée par un germe de segment $[x,y)$ en position générale dans un appartement, et on peut évidemment supposer x dans M . D'après l'hypothèse, quitte à modifier y , il existe un appartement contenant $\text{cl}([x,y])$, qui lui-même contient une partie P d'intérieur non vide de M . Soit x' dans l'intérieur de P tel que le segment $[x,x']$ soit en position générale dans M . Considérons la droite Δ de M s'appuyant sur x et x' ; comme il existe un appartement contenant y et un voisinage de x' dans M , l'inégalité du lemme 1.3.5 appliqué à Δ et $[x',y)$ est une égalité; il existe donc un appartement A' contenant Δ et un point $y_1 \in [x',y]$. D'après le choix de x' , A' contient $\text{cl}(\Delta) = M$; de plus il est évident que C est également déterminée par le germe de segment $[x,y)$. Ainsi A' contient M et C . On peut supposer C non dans D .

Si M est un mur de A correspondant à la racine a , considérons le sous-groupe G_1 de G engendré par T , U_a et U_{-a} (on suppose que A est l'appartement canonique). D'après 1.1.10 b) il existe $g \in U_M \subset G_1$ tel que $A' = g.A$. Alors ([11; 7.6.4]) on a une surjection de $G_1.A$ sur l'immeuble I' de la donnée radicielle valuée $(T, U_a, U_{-a}, M_a, M_{-a}, \varphi_a, \varphi_{-a})$ de G_1 . L'image de D est une demi-droite, l'image de C est une facette engendrée par un germe

de segment de même origine que la demi-droite ; d'après la remarque 1.2.6 a), ces images sont contenues dans un même appartement de I' ; cela montre que D et C sont dans un même appartement de I .

Lemme 1.3.7 : Soient x, y, z, t 4 points 2 à 2 distincts de I_1 alors :
 $([x,y],[x,z]) + ([x,z],[x,t]) \geq ([x,y],[x,t]) = \theta$.

S'il y a égalité alors il existe un appartement contenant $[x,y], [x,z]$ et $[x,t]$. Si de plus $\theta \neq \pi$, tout appartement contenant $[x,y]$ et $[x,t]$ contient $[x,z]$.

Démonstration : Le cas $\theta = \pi$ est une conséquence du lemme 1.3.5, supposons donc $\theta < \pi$. Notons $\theta_1 = ([x,y],[x,z])$ et $\theta_2 = ([x,z],[x,t])$. On peut supposer $d(x,y) = d(x,t) = d(x,z) \neq 0$, $\theta_1 + \theta_2 < \pi$ et x,y,z (resp. x,z,t ; x,y,t) dans un même appartement A_1 (resp. A_2 ; A). Alors l'étude du cas euclidien montre qu'il existe $z' \in]x,z]$ tel que : $d(x,z')(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) = d(x,y)\sin(\theta_1 + \theta_2)$

$$\text{et } d(y,z') + d(z',t) = 2d(x,y)\sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}.$$

On a alors $2d(x,y)\sin \frac{\theta}{2} = d(y,t) \leq 2d(x,y)\sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$; donc $\theta \leq \theta_1 + \theta_2$ et s'il y a égalité on a $d(y,t) = d(y,z') + d(z',t)$, ainsi $z' \in [y,t] \subset A$.

Proposition 1.3.8 : Soient x,y,z trois points 2 à 2 distincts de I_1 ; on a alors :

$$([x,y],[x,z]) + ([y,x],[y,z]) + ([z,y],[z,x]) \leq \pi.$$

L'égalité a lieu si et seulement si les 3 points sont contenus dans un même appartement.

Remarque : On obtient ainsi une analogie supplémentaire entre immeubles et espaces riemanniens simplement connexes à courbure négative, (cf. [11 ; 3.2.5]).

Démonstration :

(1) Si les points sont dans un même appartement, la proposition est claire. Dans le cas général, d'après 1.2.8, il existe sur $[y,z]$ un nombre fini de points $y_0 = y, y_1, \dots, y_n = z$, se succédant dans cet ordre et d'appartements A_1, \dots, A_n tels que A_i contienne x et $[y_{i-1}, y_i]$. On a alors (lemme 1.3.7) :

$$\begin{aligned} n\pi &= \sum_{i=1}^n \left(([x,y_{i-1}], [x,y_i]) + ([y_{i-1}, x], [y_{i-1}, y_i]) + ([y_i, y_{i-1}], [y_i, x]) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(([x,y_{i-1}], [x,y_i]) + ([y, z], [y, x]) + ([z, y], [z, x]) \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \left(([y_i, y_{i-1}], [y_i, x]) + ([y_i, x], [y_i, y_{i+1}]) \right) \\ &\geq ([x,y], [x,z]) + ([y,z], [y,x]) + ([z,y], [z,x]) + (n-1)\pi \end{aligned}$$

d'où l'inégalité annoncée.

(2) S'il y a égalité on a en particulier

$$([y_1, y], [y_1, x]) + ([y_1, x], [y_1, y_2]) = \pi.$$

Et par induction sur n , il suffit de montrer qu'il existe un appartement contenant x, y et y_2 .

D'après le lemme 1.3.5 il existe un point $y'_1 \in]y_1, x]$ et un appartement A contenant y, y_2 et y'_1 . Soit Ω_1 le triangle y, y_1, y'_1 de A_1 . D'après 1.1.9 b) et 1.1.7 2) il existe $g \in U_{\Omega_1}$ tel que $A = g.A_1$, et g s'écrit $g = g_1.g_2$ avec $g_2 \in \hat{P}_{\Omega_1} \cup \{x\}$ et g_1 appartenant au groupe engendré par les $\hat{P}_{\Omega_1} \cap U_a$ tels que $\hat{P}_{\Omega_1} \cap U_a$ ne fixe pas x . Quitte à changer A_1 en $g_2.A_1$, on peut supposer $g_2 = 1$. Mais g_1 fixe un point t de $]y_1, y_2]$. Ainsi on peut supposer que A_1 contient un point $t \in]y_1, y_2]$.

Soit Ω_2 le triangle x, y_1, t commun à A_1 et A_2 . Il existe $g \in U_{\Omega_2}$ tel que $A_2 = gA_1$, et g s'écrit : $g = g_1 g_2$ où $g_2 \in U_{\Omega_2}$ fixe la demi-droite Δ de A_1 d'origine t contenant y_1 et y et où g_1 appartient au groupe engendré par les $U_a \cap U_{\Omega_2}$ où $U_a \cap U_{\Omega_2}$ ne fixe pas Δ . Quitte à changer A_1 en $g_2.A_1$, on peut supposer $g_2 = 1$. Mais alors g_1 fixe la demi-droite Δ' de A_1 d'origine y_1 contenant t et nécessairement $y_2 \in g.\Delta'$; donc $y_2 \in A_1$.

Proposition 1.3.9 : Si toute partie de I_1 isométrique à une droite est contenue dans un appartement de I_1 ; alors toute partie B de I_1 isométrique à un espace euclidien est un sous espace affine d'un appartement de I_1 .

Remarque : En valuation discrète, on trouvera des résultats beaucoup plus généraux dans [11; n° 2.8].

Démonstration : B est forcément convexe et fermé dans I_1 . On procède par récurrence sur la dimension de l'espace euclidien. C'est vrai en dimension 0 et 1. Soient x un point de B et B_1 un sous-espace de codimension 1 de B contenant x ; par hypothèse de récurrence il est contenu dans un appartement A_1 . Choisissons un germe de segment $[x, y)$ de B_1 en position générale. Soit z un point de B non dans B_1 , il existe un appartement A_2 contenant $[x, y)$ et $[x, z)$. Choisissons alors un germe de segment $[x, y')$ de $B \cap A_2$ en position générale dans l'enveloppe convexe de $[x, y)$ et $[x, z)$. Soit Δ la droite de B construite sur $[x, y')$; par hypothèse il existe un appartement A contenant Δ . Montrons que $B \subset A$.

Soit $z \in B$, pour tout segment $[y_1, y_2]$ de Δ il existe un appartement A' contenant z, y_1 et y_2 (proposition 1.3.8). Mais Δ est, localement en x , en position générale dans B , donc si y_1 et y_2 sont suffisamment éloignés de x (dans des directions opposées), z est dans l'enclos de y_1 et y_2 , qui est le même pour A et A' , donc z est dans A .