Sur des inégalités intégrales et applications à la stabilité de quelques systèmes distribués non dissipatifs

Aïssa Guesmia
IECL, Université de Lorraine
Bât. A, Ile du Saulcy
57045 Metz cédex 01, France
E-mail: guesmia@univ-metz.fr

Sommaire

Résumé

On montre tout d'abord quelques inégalités intégrales nouvelles permettant d'obtenir une estimation précise sur le comportement à l'infini d'une fonction positive *non nécessairement décroissante*. Ceci étend dans plusieurs directions et améliore dans certains cas des inégalités intégrales dues à A. Haraux [49, 50], V. Komornik [59, 66], P. Martinez [77], M. Eller et al. [29] et F. Alabau-Boussouira [3] concernant des fonctions *décroissantes*. Ensuite on donne des applications à la stabilisation (interne ou frontière, linéaire ou non linéaire) de certains systèmes distribués *non dissipatifs* ce qui améliore et généralise beaucoup de résultats de stabilité connus dans le cas *dissipatif*.

La variété des systèmes considérés montre que notre méthode développé dans ce papier est directe et très souple; elle peut être appliquée à différents systèmes *non dissipatifs* et permet d'obtenir des estimations générales (exponentielles, polynômiales, logarithmiques ou autres) de stabilité.

Les principaux résultats de ce papier ont constitué la première partie de ma thèse d'HDR [48] présentée en 2006 à l'université Paul verlaine - Metz, dont certains ont éte annoncés sans démonstration dans [45] et sous des conditions moins faibles dans [44], et sont présentés dans ce papier avec plus de details.

On integral inequalities and applications to the stability of some nondissipative distributed systems

Abstract

First we prove some new integral inequalities to obtain a precise estimation on behavior at infinity of a positive and *non necessarly decreasing* function. This extends in many directions and improves in certain cases some integral inequalities due to A. Haraux [49, 50], V. Komornik [59, 66], P. Martinez [77], M. Eller et al. [29] and F. Alabau-Boussouira [3] concerning *decreasing* functions. Then we give applications to (internal or boundary, lineare or nonlineare) stabilization of certain nondissipative distributed systems which imroves and generalize many stabilization results known in the *dissipative* case.

The variety of considered systems proves that our method developed in this paper is direct and very flexible; it can be applied to various *nondissipative* problems and it allows to obtain general estimates (exponential, polynomial, logarithmic or others) of stability.

The main results of this paper constituted the first part of my HDR [48] thesis presented in 2006 at Paul verlaine - Metz university, where some of them were announced without proof in [45] and under less weaker conditions in [44], and are presented in this paper with more details.

AMS Subjest Classification: 26A12, 35B40, 93D15.

Mots-clés : Stabilisation par un feedback non linéaire; EDP; Inégalités intégrales.

Keywords: Stabilizability by a nonlinear feedback; PDE; Integral inequalities.

1. Introduction

1.1. Inégalités intégrales

Les résultats de nombreux auteurs concernant l'estimation de décroissance de l'énergie de certains problèmes *dissipatifs* sont basés sur le lemme suivant, dû à A. Haraux [49, 50], V. Komornik [59, 66] et P. Martinez [77] :

LEMME 1.1. *Soient $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante et $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction strictement croissante de classe C^1 telle que*

$$\phi(0) = 0 \quad et \quad \lim_{t\to+\infty} \phi(t) = +\infty. \tag{1.1}$$

Supposons qu'il existe $r \geq 0$ et $d > 0$ tels que

$$\int_s^{+\infty} \phi'(t)E^{r+1}(t)\,dt \leq \frac{1}{d}E^r(0)E(s), \quad \forall s \geq 0. \tag{1.2}$$

Alors E vérifie les estimations de décroissance suivantes :

$$E(t) \leq E(0)e^{1-d\phi(t)} \quad si \quad r = 0, \tag{1.3}$$

$$E(t) \leq E(0)\Big(\frac{1+r}{1+rd\phi(t)}\Big)^{\frac{1}{r}} \quad si \quad r > 0. \tag{1.4}$$

Ce lemme a été démontré et utilisé par A. Haraux [49] dans le cas $r = 0$ et $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$ pour l'étude de la stabilisation de certains problèmes linéaires *dissipatifs*. A. Haraux [50] a démontré aussi le Lemme 1.1 dans le cas particulier $r = \frac{1}{2}$ et $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$ et V. Komornik [59, 66] l'a généralisé au cas $r > 0$ et $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$ pour étudier la stabilisation des problèmes *dissipatifs* non nécessairement linéaires. V. Komornik [59] a démontré aussi l'optimalité de (1.3) et (1.4) dans ce cas-là.

Quand $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$, la fonction E est forcément intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et converge vers zéro au moins polynômialement. En utilisant un changement de variables, P. Martinez [77] a démontré (1.3) et (1.4) ce qui lui a permis de considérer des fonctions *décroissantes* qui convergent vers zéro plus lentement que $t \mapsto \frac{1}{(t+1)^p}$ pour tout $p > 0$ (comme par exemple, $E(t) = \frac{1}{\ln(t+2)}$).

En combinant la méthode des multiplicateurs et les techniques d'analyse micro-locale développées par C. Bardos et al. [10], I. Lasiecka et D. Tataru [71] et I. Lasiecka et R. Triggiani [72] ont traité le cas de l'équation des ondes *dissipative* (avec des conditions de Dirichlet ou de Neumann sur le bord) sous des hypothèses géométriques plus générales avec un feedback non linéaire sans hypothèse de croissance à l'origine. Le taux de décroissance obtenu pour l'énergie dépend de celui d'une équation différentielle; plus précisément, ils ont déduit l'estimation

$$E(t) \leq h(\frac{t}{t_0} - 1), \quad \forall t \geq t_0 \tag{1.5}$$

où $t_0 > 0$ et h est la solution de l'équation différentielle

$$h'(t) + q(h(t)) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad h(0) = E(0) \tag{1.6}$$

et q est une fonction qui fait intervenir implicitement la nonlinéarité du feedback en montrant que E vérifie

$$(Id - q)^{-1}\Big(E((m+1)t_0)\Big) \leq E(mt_0), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Dans l'objectif de trouver une formule générale qui permet d'obtenir un taux de décroissance de l'énergie de certains systèmes hyperboliques *dissipatifs* en fonction du comportement au voisinage de zéro du terme de dissipation (ce qui permet d'unifier tous les cas et notamment ceux pour lesquels le feedback croît polynomialement et ceux pour lesquels il s'écrase exponentiellement en zéro lorsque t tend vers l'infini), M. Eller et al. [29] et F. Alabau-Boussouira [3] ont considéré le cas d'une fonction *décroissante* $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\int_s^{+\infty} \varphi(E(t))\, dt \leq \frac{1}{d} E(s), \quad \forall s \geq 0 \tag{1.7}$$

où d est un réel strictement positif et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction convexe et strictement croissante vérifiant $\varphi(0) = 0$ et ils ont montré les résultats suivants :

LEMME 1.2 (M. ELLER ET AL. [29]). *Soit $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante vérifiant (1.7). Alors il existe trois réels strictement positifs t_0, c_0 et c_1 tels que*

$$E(t) \leq \varphi^{-1}\Big(\frac{\psi^{-1}(c_0 t)}{c_1 t}\Big), \quad \forall t \geq t_0 \tag{1.8}$$

où $\psi : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ *est définie par :*

$$\psi(s) = \int_s^1 \frac{1}{\varphi(t)}\, dt, \quad \forall s > 0. \tag{1.9}$$

LEMME 1.3 (F. ALABAU-BOUSSOUIRA [3]). *Soit* $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue décroissante vérifiant (1.7) avec*

$$\varphi(t) = tF^{-1}(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{1.10}$$

et $F : \mathbb{R}^+ \to [0, b[$ *est une fonction strictement croissante vérifiant, pour un réel* $b > E(0)$,

$$F(0) = 0 \quad et \quad \lim_{t\to\infty} F(t) = b.$$

Alors il existe trois réels strictement positifs t_0, c_0 *et* c_1 *tels que*

$$E(t) \leq F\Big(\frac{1}{\psi^{-1}(c_0 t)}\Big), \quad \forall t \geq t_0 \tag{1.11}$$

où $\psi : [c_0 t_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *est définie par :*

$$\psi(s) = s + \int_{F(\frac{1}{s})}^{c_1} \frac{1}{\varphi(t)}\, dt, \quad \forall s \geq c_0 t_0. \tag{1.12}$$

Dans le cas polynomiale ou exponentiel ($\varphi(s) = q(s) = s^{r+1}$ et $r \geq 0$ dans (1.6)-(1.7) et $\phi(s) = s$ dans (1.2)), les estimations (1.5), (1.8) et (1.11) coïncident avec (1.3) et (1.4). L'estimation de F. Alabau-Boussouira [3] ne s'applique pas dans le cas exponentiel ($\varphi(s) = s$ dans (1.7)) mais elle est en général plus fine que celle de M. Eller et al. [29] et améliore, dans certains cas, celle de I. Lasiecka et D. Tataru [71]. L'estimation de F. Alabau-Boussouira [3] conduit, pour certains feedbacks frontières très particuliers, à des taux optimaux de stabilité pour l'équation des ondes en dimension 1.

La décroissance de E joue un rôle crucial dans la démonstration de (1.3), (1.4), (1.5), (1.8) et (1.11). Or dans l'étude de la stabilisation des divers systèmes distribués, on tombe sur une fonction positive *non nécessairement décroissante*, l'obtention d'une estimation de stabilisation dans une telle situation est l'objectif principal de ce papier.

Afin de surmonter ce preblème de non dissipativité, on considère le cas général

$$\begin{cases} \int_s^{+\infty} \varphi(E(t))\, dt \leq a(s)E(s), & \forall s \geq 0, \\ E'(t) \leq \lambda(t)E(t), & \forall t \geq 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

où $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ et $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sont deux fonctions continues et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction convexe strictement croissante vérifiant $\varphi(0) = 0$, et on montre une estimation précise sur E de type (1.5) où h est une fonction définie explicitement en fonction de φ, de a et de λ. Ceci unifie, améliore dans certains cas et généralise dans plusieurs directions tous les cas considérés auparavant dans la littérature.

1.2. Stabilisation de l'équation des ondes

En appliquant les résultats obtenus dans le paragraphe 2, on démontre dans le paragraphe 3 des estimations (exponentielles et polynômiales) de stabilisation de certains systèmes distribués non dissipatifs. On commence par considérer l'équation des ondes avec un terme perturbant d'ordre 1 soumises à un feedback interne

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + h(\nabla u) + f(u) + g(u') = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{$P1$}$$

ou frontière

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + h(\nabla u) + f(u) = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\nu u + g(u') = 0 & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{$P1'$}$$

où Ω est un ouvert borné assez régulier de $\mathbb{R}^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$ dans toute la suite) de frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ est la partition usuelle de Γ, f, $g \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $h \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ sont trois fonctions vérifiant certaines hypothèses (voir paragraphe 3.2).

Dans tous les systèmes considérés dans ce papier, $\cdot$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$; $'$ désigne la dérivée par rapport à t; ν désigne le vecteur normal unitaire extérieur à Ω; ∂_y désigne la dérivée par rapport à y; Δ et ∇ représentent respectivement le laplacien et le gradient par rapport à la variable de l'espace; $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$; et $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme de la convergence uniforme sur Ω, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$.

Quand $h \equiv 0$, la bibliographie des travaux traitant ce problème est très vaste. On peut citer entre autres les travaux de M. Nakao [85-88], S. Kawashima et al. [55], M. Nakao et K. Ono [89], S. Nicaise [90], A. Haraux et E. Zuazua [52], P. Pucci et J. Serrin [92], E. Zuazua [105-108], V. Komornik [57-60].

Dans [88], M. Nakao a considéré le système suivant :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \rho(u') + f(u) = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{1.14}$$

où $\rho(v) = |v|^\beta v$, $\beta > -1$, $f(u) = bu|u|^\alpha$, $\alpha, b > 0$ et Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ assez régulière. L'auteur de [88] a montré que (1.14) admet une solution faible globale unique si $(n-2)\alpha \leq 2$ ainsi qu'une solution forte globale unique si $(n-2)\alpha > 2$, $n = 1$ ou $n = 2$. Le problème de stabilisation a été aussi traité. Dans les deux cas, M. Nakao a montré dans [88] que l'énergie de la solution décroît polynômialement si $\beta > 0$, et exponentiellement si $\beta = 0$. Ses résultats améliorent des résultats antérieurs obtenus par le même auteur dans [86] où le problème est étudié dans un cadre abstrait et des résultats de stabilité sont obtenus uniquement dans le cas $(n-2)\alpha \leq 2$. Plus tard, et dans un travail conjoint avec K. Ono [89], ces résultats ont été généralisés au problème de Cauchy pour l'équation

$$u'' - \Delta u + \lambda^2(x)u + \rho(u') + f(u) = 0 \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$$

où $\rho(u')$ se comporte comme $|u'|^\beta u'$ au voisinage de zéro et l'infini, et $f(u)$ se comporte comme $-bu|u|^\alpha$. Dans ce cas-là, les auteurs imposent des conditions de petitesse sur la norme dans $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ des données initiales avec un support compact.

P. Pucci et J. Serrin [92] ont traité le problème de stabilisation du système suivant :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + Q(x,t,u,u') + f(x,u) = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{1.15}$$

et ont montré que l'énergie de la solution est une fonction de Liapunov. Bien qu'ils n'aient pas obtenu des estimations de stabilisation, ces derniers ont montré qu'en général l'énergie converge vers zéro à l'infini. Dans le cas spécial de (1.15) où

$$Q(x,t,u,u') = a(t)t^\alpha u' \quad \text{et} \quad f(x,u) = V(x)u,$$

les auteurs de [92] ont démontré que le comportement de l'énergie à l'infini dépend crucialement du paramètre α. Si $|\alpha| \leq 1$, (1.15) est asymptotiquement stable. D'autre part, si $\alpha < -1$ ou $\alpha > 1$, il existe des solutions qui ne convergent pas vers zéro ou qui convergent vers une fonction non nulle $\phi(x)$ quand t converge vers l'infini.

S. Messaoudi [79] a traité un système basé sur l'équation

$$u'' - \Delta u + a(1 + |u'|^{m-2})u' + bu|u|^{p-2} = 0 \quad \Omega \times \mathbb{R}^+$$

où a, $b > 0$, $m \geq 2$, $p > 2$ avec des conditions aux limites sur le bord, et a montré la stabilité exponentielle. La démonstration de ces résultats est basée sur la méthode des multiplicateurs et sur une approche que j'ai utilisée dans [36] et [37].

Concernant le cas d'un feedback frontière, le problème $(P1')$ avec $h \equiv 0$ a suscité un grand intérêt ces vingt dernières années. De nombreux travaux à ce sujet existent dans la littérature et un progrès important a été réalisé dans ce domaine. Des techniques nouvelles ont été développées qui ont permis de stabiliser des systèmes d'évolution à partir du bord ou de les contrôler de l'état initiale à l'état finale (contrôlabilité). Il existe dans la littérature une longue liste de références traitant de la stabilisation avec un feedback linéaire sur le bord. On peut citer, comme exemples, les travaux suivants : J. Lagnese [67], D. L. Russell [96], R. Triggiani [102] et Y. You [103]. Dans le cas où le feedback frontière est non linéaire, on peut citer les travaux de E. Zuazua [105], I. Lasiecka D. Tataru [71], V. Komornik [59] et moi-même dans [32] et [37], parmi beaucoup d'autres. Dans tous ces travaux, l'objectif principal était d'obtenir les mêmes résultats de stabilité quand le système est soumis à une condition au bord de la forme

$$\partial_\nu u + a(x)u + b(x)g(u') = 0 \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$$

où Γ_1 est une partie du bord Γ de Ω vérifiant certaines conditions géométriques, a, b et g sont des fonctions données. En revanche, aucun contrôle n'est appliqué sur l'autre partie, i.e. :

$$u = 0 \quad (\Gamma \setminus \Gamma_1) \times \mathbb{R}^+.$$

En utilisant un principe général de Russell [96], S. Nicaise [90] a montré, dans un cadre général, que la dissipation et la stabilité exponentielle par un feedback linéaire impliquent des estimations de stabilité (similaires à celles obtenues par M. Martinez [77]) par un feedback non linéaire, ce qui établit un lien direct entre les deux cas.

En revanche, quand $h \not\equiv 0$, très peu de travaux existent dans la littérature. A ma connaissance, les résultats les plus généraux et les plus récents dans cette direction ont été obtenus par M. M. Cavalcanti et al. [20]. Dans ce papier, les auteurs ont montré l'existence et la régularité des solutions d'une large classe d'équations hyperboliques basée sur l'équation

$$K(x,t)u'' - \Delta u + F(x,t,u,u',\nabla u) = f(x) \quad \Omega \times \mathbb{R}^+$$

avec des conditions au bord et des données initiales comme dans $(P1')$ où K, F et f sont des fonctions données satisfaisant certaines hypothèses.

De plus, pour obtenir la stabilisation exponentielle des solutions en utilisant des multiplicateurs et des inégalités intégrales classiques, M. M. Cavalcanti et al. [20] ont imposé des hypothèses supplémentaires sur F. Ces hypothèses impliquent, en particulier, que F est globalement lipschitzienne par rapport à sa dernière variable où la constante de Lipschitz est une fonction en t convergeant exponentiellement vers zéro à l'infini. Cette forte hypothèse n'est pas satisfaite si, par exemple, la fonction F ne dépend pas de t, comme dans le cas des systèmes $(P1)$ et $(P1')$.

Notons que, à cause du terme $h(\nabla u)$, les systèmes $(P1)$ et $(P1')$ ne sont pas dissipatifs puisque nous n'avons aucune information sur l'influence de l'intégrale $\int_\Omega h(\nabla u)u'\,dx$ sur la norme

$$\|(u,u')\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left(|u'(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2\right)\,dx,$$

ni sur le signe de sa dérivée; autrement dit, l'énergie E (définie dans le paragraphe 3) n'est pas nécessairement décroissante. La décroissance de l'énergie joue un rôle crucial dans l'étude de la stabilité asymptotique de la solution, comme cela a été le cas, en particulier, dans les travaux cités ci-dessus.

On introduit une énergie équivalente dans le but d'absorber la partie linéaire de h; cette énergie équivalente est décroissante si h est linéaire. En utilisant des multiplicateurs appropriés et le Lemme 2.7 (voir paragraphe 2), on démontre alors des estimations exponentielles et polynômiales de stabilité. Dans le cas où h est non linéaire, on démontre la stabilité exponentielle sous une hypothèse de petitesse sur la partie non linéaire de h. La clef principale de la démonstration est l'utilisation des résultats obtenus dans le paragraphe 2, en particulier le Lemme 2.7.

1.3. Applications

Dans [34] et [41], j'ai considéré le système de Petrovsky suivant :

$$\begin{cases} u'' + \Delta^2 u + q(x)u + g(u') = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = \partial_\nu u = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{1.16}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ assez régulière. Pour une fonction g continue, croissante, vérifiant $g(0) = 0$, et une fonction $q : \Omega \to \mathbb{R}^+$ bornée. J'ai démontré des résultats d'existence globale et de régularité. J'ai obtenu aussi, sous des hypothèses convenables d'accroissement sur g, des estimations de stabilité. Plus précisément, j'ai démontré que l'énergie de toute solution faible décroît exponentiellement (resp. polynômialement) vers zéro à l'infini si g est entre deux droites passant par l'origine (resp. si g a une croissance polynômiale au voisinage de zéro et de l'infini). J'ai démontré des résultats semblables dans [37] pour le système (1.16) couplé avec une équation des ondes semi-linéaire.

Des résultats similaires ont été obtenus par de nombreux auteurs dans le cas semi-linéaire ou avec des conditions sur le bord différentes de celles de (1.16). On peut citer les travaux de V. Komornik [59, 62] et V. Komornik et S. Kouémou-Patcheu [63].

Dans [33], j'ai considéré le problème de stabilisation du système d'élasticité suivant :

$$\begin{cases} u_i'' - \sigma_{ij,j} + g_i(u_i') = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_i = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(x,0) = u_i^0(x) \quad \text{et} \quad u_i'(x,0) = u_i^1(x) & \Omega, \\ i = 1, \cdots, n \end{cases} \tag{1.17}$$

où l'inconnue $u = (u_1, \cdots, u_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Ici, $\sigma_{ij,j} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$, $\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^n a_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$, $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $u_{j,i} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ et $a_{ijkl} \in W^{1,\infty}(\Omega)$. J'ai démontré quelques estimations de stabilité qui dépendent principalement de la croissance de g_i à l'origine et à l'infini. Dans [40], j'ai généralisé ces résultats au cas des dissipations localement distribuées où le damping est effectif uniquement sur un voisinage d'une partie bien choisie du bord.

J'ai considéré dans [31] et [42] (voir aussi [41]) le problème de contrôlabilité exacte et de stabilisation frontière des systèmes d'élasticité et de l'équation des ondes avec des coefficients variables dépendant de l'espace et du temps respectivement. Dans [36], j'ai généralisé les résultats de stabilisation que j'avais obtenus auparavant au cas d'un feedback non linéaire. Les résultats que j'ai obtenus dans [31] et [36] améliorent et généralisent dans plusieurs directions ceux obtenus par F. Alabau-Boussouira et V. Komornik [6] dans le cas où les fonctions g_i sont linéaires et $a_{ijkl} = \text{const}$.

J'ai obtenu dans [38] des résultats de stabilité exponentielle d'une classe d'équations des ondes soumises à une condition aux limites de type mémoire.

Dans tous les travaux cités ci-dessus, la dissipation du système considéré (i.e. : l'énergie est décroissante) joue un rôle crucial dans la démonstration des différentes estimations de stabilité.

La méthode introduite et développée dans les paragraphee 2 et 3 est directe et très flexible; elle peut être appliquée à des problèmes non dissipatifs variés (élasticité, thermo-élasticité, systèmes couplés, coefficients variables, $\cdots$), soumis à un feedback interne ou frontière, dans le but de généraliser et d'améliorer des estimations différentes de stabilité (connues dans le cas dissipatif).

Afin d'illustrer ça, on donne dans le paragraphe 4 quelques applications à la stabilisation de certains systèmes non dissipatifs : équation générale des ondes, système de Petrovsky, système général d'élasticité, coefficients variables, systèmes couplés.

2. Nouvelles inégalités intégrales

On montre dans ce paragraphe des inégalités intégrales nouvelles permettant d'obtenir une estimation sur le comportement à l'infini d'une fonction positive *non nécessairement décroissante.* Ces nouvelles inégalités intégrales améliorent dans certains cas et généralisent dans plusieurs directions celles citées dans le paragraphe 1.

2.1. Convergeance exponentielle ou polynômiale

Avant d'énoncer le premier résultat principal de ce paragraphe, on introduit une fonction $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dont l'intérêt est d'obtenir de meilleures estimations de stabilité en minimisant, par rapport à $h(t)$, les termes à droite de (2.14) et (2.15) ci-après.

Soient r un réel positif, α un réel strictement positif, $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ et $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues. On note : $\tilde{\lambda}(t) = \int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau$ et on trouve que

$$\int_0^{+\infty} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(t)}\,dt = +\infty. \tag{2.1}$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}^+$ fixé, on définit la fonction $I_s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par :

$$I_s(t) = (\omega(s))^{r+1} \int_s^t e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\,d\tau$$
$$-e^{(r+1)\tilde{\lambda}(s)}\Big((\alpha\omega(0))^r + r\int_0^s (\omega(\tau))^{r+1}\,d\tau\Big).$$

On a : $I_s \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $I_s'(t) = (\omega(s))^{r+1} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(t)} > 0$,

$$I_s(0) = (\omega(s))^{r+1} \int_s^0 e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\,d\tau$$

$$-e^{(r+1)\tilde{\lambda}(s)}\Big((\alpha\omega(0))^r + r\int_0^s (\omega(\tau))^{r+1}\,d\tau\Big) < 0$$

et, d'après (2.1), $\lim_{t\to+\infty} I_s(t) = +\infty$. Donc I_s admet une seule racine dans $\mathbb{R}^{+*}$ notée $g(s)$ d'où on définit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ par :

$$I_s(g(s)) = 0, \quad \forall s \geq 0. \tag{2.2}$$

D'une part, comme ω est continue, il en est de même pour la fonction g. D'autre part, on a :

$$I_s(s) = -e^{(r+1)\tilde{\lambda}(s)}\Big((\alpha\omega(0))^r + r\int_0^s (\omega(\tau))^{r+1}\,d\tau\Big) < 0,$$

d'où $g(s) > s$, et par conséquent $\lim_{s\to+\infty} g(s) = +\infty$. Donc g est surjective de $\mathbb{R}^+$ sur $[g(0), +\infty[$.

Soit maintenant $t \in]g(0), \infty[$ fixé. On définit la fonction $J_t : [0,t] \to \mathbb{R}^+$ par :

$$J_t(s) = \Big(\int_s^t e^{\tilde{\lambda}(\tau)}\,d\tau\Big) e^{\int_0^s \omega(\tau)\,d\tau} \quad \text{si } r = 0,$$

$$J_t(s) = \Big(\int_s^t e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\,d\tau\Big)\Big((\alpha\omega(0))^r + r\int_0^s (\omega(\tau))^{r+1}\,d\tau\Big)^{\frac{1}{r}} \quad \text{si } r > 0.$$

La fonction J_t est positive et dérivable sur $[0,t]$, et on a :

$$J_t'(s) = I_s(t) e^{\int_0^s \omega(\tau)\,d\tau} \quad \text{si } r = 0,$$

$$J_t'(s) = I_s(t)\Big((\alpha\omega(0))^r + r\int_0^s (\omega(\tau))^{r+1}\,d\tau\Big)^{\frac{1}{r}-1} \quad \text{si } r > 0.$$

Comme $J_t'(s)$ est de même signe que $I_s(t)$, alors $J_t' > 0$ à droite de 0 (car $t > g(0)$) et $J_t' < 0$ à gauche de t (car $g(s) > s$). Donc J_t atteint son maximum sur $[0,t]$ au moins en un point $s_0 \in]0,t[$ vérifiant $I_{s_0}(t) = 0$ d'où $s_0 \in g^{-1}(\{t\})$.

On définit maintenant la fonction $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ par :

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ t\in [0, g(0)], \\ \max g^{-1}(\{t\}) & \text{si } \ t\in]g(0), +\infty[. \end{cases} \tag{2.3}$$

On a, pour tout $t > g(0)$: $h(t) \in g^{-1}(\{t\})$ et $I_{h(t)}(t) = 0$. Pour minimiser les termes à droite de (2.14) et (2.15) ci-après par rapport à $h(t)$, il suffit de maximiser J_t (avec $\alpha = \frac{1}{E(0)}$). Donc les termes à droite de (2.14) et (2.15) atteignent leur minimum en $h(t)$ pour tout $t > g(0)$.

Si ω est une constante, alors g est strictement croissante (il suffit de dériver l'égalité (2.2)), et dans ce cas-là,

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \text{t} \in [0, D^{-1}(\frac{\alpha^r}{\omega})], \\ g^{-1}(t) = K^{-1}(D(t)) & \text{si} \quad \text{t} \in]D^{-1}(\frac{\alpha^r}{\omega}), \infty[\end{cases}$$

où K et D sont les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$K(t) = D(t) + e^{(r+1)\tilde{\lambda}(t)}(rt + \frac{\alpha^r}{\omega}), \quad D(t) = \int_0^t e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau.$$

On généralise maintenant le lemme 1.1 dans plusieurs directions en montrant le premier lemme principal suivant :

LEMME 2.1. *Soient* $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *une fonction dérivable,* $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ *et* $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *deux fonctions continues. Supposons qu'il existe* $r \geq 0$ *tels que*

$$\begin{cases} \int_s^{+\infty} E^{r+1}(t)\, dt \leq a(s)E(s), \quad \forall s \geq 0, \\ E'(t) \leq \lambda(t)E(t), \quad \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Alors E *vérifie, pour tout* $t \geq 0$*, les estimations suivantes :*

$$E(t) \leq \frac{E(0)}{\omega(0)}\omega(h(t))e^{\tilde{\lambda}(t)-\tilde{\lambda}(h(t))}e^{-\int_0^{h(t)}\omega(\tau)\, d\tau} \quad \text{si } r = 0, \tag{2.5}$$

$$E(t) \leq \omega(h(t))e^{\tilde{\lambda}(t)-\tilde{\lambda}(h(t))}\Big((\frac{\omega(0)}{E(0)})^r + r\int_0^{h(t)}(\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau\Big)^{\frac{-1}{r}} \quad \text{si } r > 0 \tag{2.6}$$

où $\tilde{\lambda}(t) = \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau$, h *est définie par (2.3) avec* $\alpha = \frac{1}{E(0)}$ *et* $\omega = \frac{1}{a}$.

REMARQUES. 1. En utilisant un changement de variables, les estimations (2.5) et (2.6) peuvent être généralisées au cas suivant :

$$\begin{cases} \int_s^{+\infty} \phi'(t)E^{r+1}(t)\, dt \leq a_1(s)E(s), \quad \forall s \geq 0, \\ E'(t) \leq \lambda_1(t)E(t), \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

où $a_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ et $\lambda_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sont deux fonctions continues et ϕ vérifie les mêmes hypothèses que dans le Lemme 1.1. En effet, on pose $E_1 = E \circ \phi^{-1}$, $a = a_1 \circ \phi^{-1}$ et $\lambda = \frac{\lambda_1 \circ \phi^{-1}}{\phi' \circ \phi^{-1}}$. D'après (2.7), on a :

$$\begin{cases} \int_s^{+\infty} E_1^{r+1}(t)\, dt \leq a(s)E_1(s), \quad \forall s \geq 0, \\ E_1'(t) \leq \lambda(t)E_1(t), \quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Donc E_1 vérifie (2.5) et (2.6), et par conséquent, E vérifie (2.5) et (2.6) avec t remplacé par $\phi(t)$.

Si, dans (2.7), $\lambda_1 = 0$ et $a_1 = \frac{1}{d}E^r(0)$ avec d une constante strictement positive (comme dans (1.2)), alors E vérifie (2.5) et (2.6) avec

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t\in [0, \frac{1}{d}], \\ \frac{1}{r+1}(t - \frac{1}{d}) & \text{si} \quad t\in]\frac{1}{d}, \infty[\end{cases}$$

et t remplacé par $\phi(t)$. Et donc (2.5) et (2.6) avec t remplacé par $\phi(t)$ coïncident avec (1.3) et (1.4) respectivement.

2. Si, dans (2.4), $\lambda = 0$ et a est une constante, alors (2.5) et (2.6) sont optimales (voir V. Komornik [59]).

Preuve du Lemme 2.1. Si $E(s) = 0$ ou si $a(s) = 0$ pour un $s \geq 0$, la première inégalité de (2.4) implique que $E(t) = 0$ pour tout $t \geq s$, et dans ce cas-là, il n'y a rien à démontrer. Donc, on peut supposer que $E(t) > 0$ et $a(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ sans perte de généralité.

On pose : $\omega = \frac{1}{a}$ et $\psi(s) = \int_s^{+\infty} E^{r+1}(t)dt$. On a :

$$\psi(s) \leq \frac{1}{\omega(s)} E(s), \quad \forall s \geq 0. \tag{2.8}$$

La fonction ψ est positive décroissante de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant, d'après (2.8) :

$$\psi'(s) = -E^{r+1}(s) \leq -(\omega(s)\psi(s))^{r+1}, \quad \forall s \geq 0,$$

alors, par intégration,

$$\psi(s) \leq \psi(0)e^{-\int_0^s \omega(\tau)\, d\tau} \leq \frac{E(0)}{\omega(0)} e^{-\int_0^s \omega(\tau)\, d\tau} \quad \text{si } r = 0, \tag{2.9}$$

$$\psi(s) \leq \Big((\frac{\omega(0)}{E(0)})^r + r \int_0^s (\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau \Big)^{\frac{-1}{r}} \quad \text{si } r > 0. \tag{2.10}$$

Maintenant, pour tout $s \geq 0$, on pose :

$$f_s(t) = e^{-(r+1)\tilde{\lambda}(t)} \int_s^t e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau, \quad \forall t \geq s. \tag{2.11}$$

La fonction f_s est de classe C^1 sur $[s, +\infty[$ et strictement positive sur $]s, +\infty[$ vérifiant :

$$f_s(s) = 0 \quad \text{et} \quad f_s'(t) + (r+1)\lambda(t)f_s(t) = 1, \quad \forall t \geq s \geq 0.$$

Donc, d'après la deuxième inégalité de (2.4),

$$E^{r+1}(t) \geq \partial_t\Big(f_s(t)E^{r+1}(t)\Big), \quad \forall t \geq s \geq 0. \tag{2.12}$$

Donc, d'après (2.12),

$$\psi(s) \geq \int_s^{g(s)} E^{r+1}(t)\,dt \geq f_s(g(s))E^{r+1}(g(s)), \quad \forall s \geq 0, \tag{2.13}$$

où g est définie par (2.2) avec $\alpha = \frac{1}{E(0)}$.

Soient maintenant $t > g(0)$ et $s = h(t)$ où h est définie par (2.3) avec $\alpha = \frac{1}{E(0)}$. On a donc $g(s) = t$ et on déduit alors de (2.13) que, pour tout $t > g(0)$,

$$\psi(h(t)) \geq f_{h(t)}(t)E^{r+1}(t) = \Big(e^{-(r+1)\tilde{\lambda}(t)}\int_{h(t)}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\,d\tau\Big)E^{r+1}(t).$$

On conclut donc de (2.9) et (2.10) que, pour tout $t > g(0)$,

$$E(t) \leq \frac{E(0)}{\omega(0)}e^{\tilde{\lambda}(t)}\Big(\int_{h(t)}^{t} e^{\tilde{\lambda}(\tau)}\,d\tau\Big)^{-1}e^{-\int_0^{h(t)}\omega(\tau)\,d\tau} \quad \text{si } r = 0, \tag{2.14}$$

$$E(t) \leq e^{\tilde{\lambda}(t)}\Big(\int_{h(t)}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\,d\tau\Big)^{\frac{-1}{r+1}}\times$$

$$\Big((\frac{\omega(0)}{E(0)})^r + r\int_0^{h(t)}(\omega(\tau))^{r+1}\,d\tau\Big)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad \text{si } r > 0. \tag{2.15}$$

En utilisant le fait que $I_{h(t)}(t) = I_s(g(s)) = 0$, c-à-d :

$$\int_{h(t)}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\,d\tau$$

$$= (\omega(h(t)))^{-(r+1)}e^{(r+1)\tilde{\lambda}(h(t))}\Big((\frac{\omega(0)}{E(0)})^r + r\int_0^{h(t)}(\omega(\tau))^{r+1}\,d\tau\Big),$$

on conclut (2.5) et (2.6) pour $t > g(0)$.

Si $t \in [0, g(0)]$, la deuxième inégalité de (2.4) implique que

$$E(t) \leq E(0)e^{\tilde{\lambda}(t)},$$

et comme $h(t) = 0$ sur $[0, g(0)]$, $E(0)e^{\tilde{\lambda}(t)}$ coïncide avec les termes à droite de (2.5) et de (2.6). Ceci achève la preuve du Lemme 2.1.

Commentaire. Le Lemme 2.1 donne des estimations précises ((2.5) et (2.6)) sur le comportement de E; ces estimations sont définies à partir d'une fonction g qui est la solution d'une équation intégrale ($I_s(g(s)) = 0$) qui n'est pas toujours facile à résoudre. Mais les estimations (2.14) et (2.15) restent vraies pour toute fonction h positive vérifiant, pour un certain $T_0 > 0$:

$$h(t) < t \quad \text{sur} \quad]T_0, +\infty[.$$

Donc pour des choix simples de h, on obtient des estimations moins fortes que (2.5) et (2.6) mais qui sont aisément calculables d'où les résultats suivants :

Lemme 2.2. *Sous les hypothèses du Lemme 2.1, E vérifie, pour tout $t > 1$, les estimations suivantes :*

$$E(t) \leq \frac{E(0)}{\omega(0)} e^{\tilde{\lambda}(t)} \Big(\int_{t-1}^{t} e^{\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau \Big)^{-1} e^{-\int_0^{t-1} \omega(\tau)\, d\tau} \quad \textit{si} \quad r = 0, \tag{2.16}$$

$$E(t) \leq e^{\tilde{\lambda}(t)} \Big(\int_{t-1}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau \Big)^{\frac{-1}{r+1}} \times$$

$$\Big((\frac{\omega(0)}{E(0)})^r + r \int_0^{t-1} (\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau \Big)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad \textit{si } r > 0. \tag{2.17}$$

Preuve. On choisit dans (2.13) :

$$g(s) = s + 1, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+$$

au lieu de la racine de I_s, on obtient (2.14) et (2.15) avec $h(t) = t - 1$ pour $t > 1$. D'où (2.16) et (2.17).

Remarque. Comme $\tilde{\lambda}$ est croissante, alors

$$\int_{t-1}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau \geq e^{(r+1)\tilde{\lambda}(t-1)}.$$

Donc, on déduit de (2.16) et (2.17) qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $t > 1$, on a :

$$E(t) \leq c e^{\tilde{\lambda}(t) - \tilde{\lambda}(t-1)} e^{-\int_0^{t-1} \omega(\tau)\, d\tau} \quad \text{si} \quad r = 0, \tag{2.18}$$

$$E(t) \leq c e^{\tilde{\lambda}(t) - \tilde{\lambda}(t-1)} \Big(1 + \int_0^{t-1} (\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau \Big)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad \text{si} \quad r > 0. \tag{2.19}$$

LEMME 2.3. *Sous les hypothèses du Lemme 2.1, E vérifie, pour tous* $\epsilon \in]0,1[$ *et* $t > 0$, *les estimations suivantes :*

$$E(t) \leq \frac{E(0)}{\omega(0)} e^{\tilde{\lambda}(t)} \Big(\int_{\epsilon t}^{t} e^{\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau \Big)^{-1} e^{-\int_0^{\epsilon t} \omega(\tau)\, d\tau} \quad si \quad r = 0, \tag{2.20}$$

$$E(t) \leq e^{\tilde{\lambda}(t)} \Big(\int_{\epsilon t}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau \Big)^{\frac{-1}{r+1}} \times$$

$$\Big((\frac{\omega(0)}{E(0)})^{r} + r \int_0^{\epsilon t} (\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau \Big)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad si\, r > 0. \tag{2.21}$$

Preuve. On choisit dans (2.13) :

$$g(s) = \frac{1}{\epsilon} s, \quad \forall s \in \mathbb{R}^{+}$$

au lieu de la racine de I_s, on obtient (2.14) et (2.15) avec $h(t) = \epsilon t$ pour $t > 0$. D'où (2.20) et (2.21).

REMARQUE. Comme $\tilde{\lambda}$ est croissante, alors

$$\int_{\epsilon t}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau \geq (1-\epsilon) t e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\epsilon t)}.$$

Donc, on déduit de (2.20) et (2.21) qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tous $\epsilon \in]0,1[$ et $t > 0$, on a :

$$E(t) \leq \frac{c}{(1-\epsilon)t} e^{\tilde{\lambda}(t) - \tilde{\lambda}(\epsilon t)} e^{-\int_0^{\epsilon t} \omega(\tau)\, d\tau} \quad \text{si} \quad r = 0, \tag{2.22}$$

$$E(t) \leq \frac{c}{((1-\epsilon)t)^{r+1}} e^{\tilde{\lambda}(t) - \tilde{\lambda}(\epsilon t)} \Big(1 + \int_0^{\epsilon t} (\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau \Big)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \text{si}\, r > 0. \tag{2.23}$$

Comme des cas particuliers, on déduit du Lemme 2.2 les estimations suivantes :

LEMME 2.4. *Sous les hypothèses du Lemme 2.1 et si* $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ *et*

$$a(s) = c_1 e^{-c_2 s} \quad avec\ c_1 > 0\ et\ c_2 \in \mathbb{R},$$

alors il existe une constante $c > 0$ *telle que E vérifie, pour tout* $t > 1$, *les estimations suivantes :*

$$E(t) \leq c e^{-\frac{1}{c_1} t} \quad si \quad r = c_2 = 0,$$

$$E(t) \leq ce^{-\frac{e^{-c_2}}{c_1 c_2} e^{c_2 t}} \quad si \quad r = 0 \ et \ c_2 \neq 0,$$
$$E(t) \leq ct^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad si \quad r > 0 \ et \ c_2 = 0,$$
$$E(t) \leq c\Big(\frac{e^{(r+1)c_2(t-1)} - 1}{c_2}\Big)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad si \quad r > 0 \ et \ c_2 \neq 0.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $\tilde{\lambda}(t) = \lambda t$ et $\omega(s) = \frac{1}{c_1} e^{c_2 s}$, et d'appliquer (2.18) et (2.19).

REMARQUE. Quand $c_2 < 0$, les estimations du Lemme 2.4 n'impliquent pas que E converge vers zéro.

LEMME 2.5. *Sous les hypothèses du Lemme 2.1 et si* $\lambda \in \mathbb{R}^+$ *et*

$$a(s) = c_1(s+1)^{-c_2} \quad avec \ c_1 > 0 \ et \ c_2 \in \mathbb{R},$$

alors il existe une constante $c > 0$ *telle que* E *vérifie, pour tout* $t > 1$, *les estimations suivantes :*

$$E(t) \leq ct^{\frac{-1}{c_1}} \quad si \quad r = 0 \ et \ c_2 = -1,$$
$$E(t) \leq ce^{\frac{-1}{c_1(c_2+1)} t^{c_2+1}} \quad si \quad r = 0 \ et \ c_2 \neq -1,$$
$$E(t) \leq c(\ln(t))^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad si \quad r > 0 \ et \ c_2 = \frac{-1}{r+1}$$
$$E(t) \leq c\Big(\frac{t^{c_2(r+1)+1} - 1}{c_2(r+1)+1}\Big)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad si \quad r > 0 \ et \ c_2 \neq \frac{-1}{r+1}.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $\tilde{\lambda}(t) = \lambda t$ et $\omega(s) = \frac{1}{c_1}(s+1)^{c_2}$, et d'appliquer (2.18) et (2.19).

REMARQUE. Quand $c_2 < \frac{-1}{r+1}$, les estimations du Lemme 2.5 n'impliquent pas que E converge vers zéro. D'autre part, quand $\frac{-1}{r+1} \leq c_2 < 0$, les lemmes 1.1, 1.2 et 1.3 ne s'appliquent pas car a n'est pas borné alors que le Lemme 2.5 montre que E converge vers zéro et donne une estimation précise sur sa convergence.

LEMME 2.6. *Sous les hypothèses du Lemme 2.1 et si* $\lambda \in \mathbb{R}^+$ *et*

$$a(s) = c_1\Big(\ln(s+2)\Big)^{-c_2} \quad avec \ c_1 > 0 \ et \ c_2 \in \mathbb{R},$$

alors il existe une constante $c > 0$ telle que E vérifie, pour tout $t > 1$, les estimations suivantes :

$$E(t) \leq c\Big(\ln(t+1)\Big)^{\frac{-2}{c_1}} \quad si \quad r = 0 \ et \ c_2 = -1,$$

$$E(t) \leq c e^{\frac{-2}{c_1(c_2+1)}\left(\ln(t+1)\right)^{c_2+1}} \quad si \quad r = 0 \ et \ c_2 \neq -1,$$

$$E(t) \leq c\Big(\ln(\ln(t+1))\Big)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad si \quad r > 0 \ et \ c_2 = \frac{-1}{r+1}$$

$$E(t) \leq c\Big(\frac{\Big(\ln(t+1)\Big)^{c_2(r+1)+1} - 1}{c_2(r+1)+1}\Big)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad si \quad r > 0 \ et \ c_2 \neq \frac{-1}{r+1}.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $\tilde{\lambda}(t) = \lambda t$ et

$$\int_0^{t-1} \omega^{r+1}(\tau)\, d\tau \geq 2c_1^{-(r+1)} \int_0^{t-1} \frac{1}{\tau+2}\Big(\ln(\tau+2)\Big)^{(r+1)c_2} d\tau,$$

et d'appliquer (2.18) et (2.19).

Remarque. Quand $c_2 < \frac{-1}{r+1}$, les estimations du Lemme 2.6 n'impliquent pas que E converge vers zéro. D'autre part, quand $\frac{-1}{r+1} \leq c_2 < 0$, les lemmes 1.1, 1.2 et 1.3 ne s'appliquent pas car a n'est pas borné alors que le Lemme 2.6 montre que E converge vers zéro et donne une estimation précise sur sa convergence.

Dans le lemme suivant, on considère des hypothèses plus générales que (2.4) en incluant le cas d'une perturbation du second membre.

Lemme 2.7. *Soient $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable, $a_3 \in \mathbb{R}^+$, $a_1, a_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ et $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ trois fonctions continues. Supposons qu'il existe $r, p \geq 0$ tels que*

$$a_3(r+1)\sup_{t\geq 0}\{\lambda(t)\} < 1$$

et, pour tout $0 \leq s \leq T < +\infty$,

$$\begin{cases} \int_s^T E^{r+1}(t)\, dt \leq a_1(s)E(s) + a_2(s)E^{p+1}(s) + a_3 E^{r+1}(T), \\ E'(t) \leq \lambda(t)E(t), \quad \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

Alors E vérifie (2.5) et (2.6) où $\tilde{\lambda}(t) = \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau$, $\omega = \frac{1}{a}$ et a est défini par (2.26).

Remarques. 1. Comme dans le Lemme 2.2 et le Lemme 2.3, on peut montrer que, sous les hypothèses du Lemme 2.7, E vérifie (2.16)-(2.19) et (2.20)-(2.23) où $\omega = \frac{1}{a}$ et a est défini par (2.26).

2. Si $r = 0$, λ est une constante et $\lambda a_3 \geq 1$, alors $E(t) = e^{\lambda t}$ satisfait (2.24). Ceci implique qu'une fonction vérifiant (2.24) ne converge pas forcément vers zéro.

Preuve du Lemme 2.7. Il suffit de montrer que E vérifie la première inégalité de (2.4) pour appliquer le Lemme 2.1.

On a :

$$
\begin{aligned}
a_3 E^{r+1}(T) &= a_3 \int_s^T (E^{r+1})'(t) dt + a_3 E^{r+1}(s) \\
&\leq a_3(r+1) \int_s^T \lambda(t) E^{r+1}(t)\, dt + a_3 E^{r+1}(s) \\
&\leq a_3(r+1) \sup_{t\geq 0}\{\lambda(t)\} \int_s^T E^{r+1}(t)\, dt + a_3 E^{r+1}(s).
\end{aligned}
$$

Donc, d'après la première inégalité de (2.24), on obtient :

$$
\int_s^{+\infty} E^{r+1}(t)\, dt \leq b(s) E(s), \quad \forall s \geq 0 \tag{2.25}
$$

où

$$
b(s) = \frac{a_1(s) + a_2(s) E^p(s) + a_3 E^r(s)}{1 - a_3(r+1)\sup_{t\geq 0}\{\lambda(t)\}}, \quad \forall s \geq 0.
$$

On considère la fonction f_0 (définie par (2.11) pour $s = 0$) et on intègre sur $[0, s]$ l'inégalité

$$
E^{r+1}(t) \geq \partial_t \Big(f_0(t) E^{r+1}(t) \Big), \quad \forall t \geq 0,
$$

on obtient, d'après (2.25) :

$$
b(0)E(0) \geq \int_0^s E^{r+1}(t)\, dt \geq f_0(s) E^{r+1}(s), \quad \forall s \geq 0
$$

d'où (on exclut $s = 0$ car $f_0(0) = 0$)

$$
E(s) \leq \Big(\frac{b(0)E(0)}{f_0(s)} \Big)^{\frac{1}{r+1}}, \quad \forall s > 0.
$$

D'autre part, la deuxième inégalité de (2.24) implique que

$$
E(s) \leq E(0) e^{\tilde{\lambda}(s)}, \quad \forall s \geq 0.
$$

Donc

$$E(s) \leq \min\{E(0)e^{\tilde{\lambda}(s)}, \Big(\frac{b(0)E(0)}{f_0(s)}\Big)^{\frac{1}{r+1}}\} = d(s), \quad \forall s \geq 0.$$

La fonction d est continue et strictement positive, et on a :

$$b(s) \leq \frac{a_1(s) + a_2(s)(d(s))^p + a_3(d(s))^r}{1 - a_3(r+1)\sup_{t\geq 0}\{\lambda(t)\}}, \quad \forall s \geq 0.$$

D'où, on conclut de (2.25) la première inégalité de (2.4) avec

$$a(s) = \frac{a_1(s) + a_2(s)(d(s))^p + a_3(d(s))^r}{1 - a_3(r+1)\sup_{t\geq 0}\{\lambda(t)\}}. \tag{2.26}$$

Ceci achève la preuve du Lemme 2.7.

Dans le cas particulier où λ et a_i sont des constantes, le Lemme 2.7 généralise et améliore une version que j'ai démontrée (sous des hypothèses plus fortes) et utilisée dans mes deux articles [43] et [44].

LEMME 2.8. *Soient* $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *une fonction dérivable,* a_1, $a_2 \in \mathbb{R}^{+*}$ *et* a_3, r, p, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. *Supposons que*

$$\begin{cases} \int_s^T E^{r+1}(t)\,dt \leq a_1 E(s) + a_2 E^{p+1}(s) + a_3 E^{r+1}(T), & \forall 0 \leq s \leq T, \\ E'(t) \leq \lambda E(t), & \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{2.27}$$

Si $a_3\lambda(r+1) < 1$, *alors il existe deux constantes strictement positives* ω *et* c *telles que, pour tout* $t \geq 0$,

$$E(t) \leq ce^{-\omega t} \quad si \quad r = 0, \tag{2.28}$$

$$E(t) \leq c(1+t)^{\frac{-1}{r}} \quad si \quad r > 0 \ et\ \lambda = 0, \tag{2.29}$$

$$E(t) \leq c(1+t)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad si \quad r > 0 \ et\ \lambda > 0. \tag{2.30}$$

Preuve. Si $\lambda = 0$, (2.27) implique (1.2). Donc, d'après le Lemme 1.1, (1.3) et (1.4) impliquent (2.28) et (2.29) respectivement.

Supposons que $\lambda > 0$. D'après la preuve du Lemme 2.7, E vérifie la première inégalité de (2.4) où a est défini par (2.26). Donc, on déduit (2.16) et (2.17) avec $\omega(s) = \frac{1}{a(s)}$. Or, sous les hypothèses du Lemme 2.8, la fonction

a est bornée. Donc $\omega(s) \geq \frac{1}{\sup_{t\geq 0}\{a(t)\}}$ (si $\sup_{t\geq 0}\{a(t)\} = 0$, alors $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, et par conséquent $E = 0$) d'où (2.16) et (2.17) impliquent, pour tout $t > 1$, (2.28) et (2.30) respectivement.

Pour $t \in [0,1]$, on a :

$$E(t) \leq E(0)e^{\lambda t} \leq E(0)e^{\lambda}.$$

Donc E vérifie (2.28)-(2.30) aussi pour $t \in [0,1]$.

2.2. Convergeance générale

On généralise maintenant les Lemmes 1.2 et 1.3 au cas non dissipatif en montrant le deuxième lemme principal de ce paragraphe. Ceci unifie, améliore dans certains cas et généralise au cas non dissipatif tous les cas cités dans le paragraphe 1.

LEMME 2.9. *Soient $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction convexe et strictement croissante vérifiant :*

$$\varphi(0) = 0. \tag{2.31}$$

Supposons que

$$\begin{cases} \int_s^{+\infty} \varphi(E(t))\,dt \leq E(s), \quad \forall s \geq 0, \\ E'(t) \leq \lambda E(t), \quad \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{2.32}$$

Alors E vérifie l'estimation suivante :

$$E(t) \leq e^{\lambda\tau_0} g^{-1}\Big(e^{\lambda(t-h(t))}\varphi\Big(\psi^{-1}(h(t)+\psi(E(0)))\Big)\Big), \ \forall t \geq 0 \tag{2.33}$$

où

$$\psi(t) = \int_t^1 \frac{1}{\varphi(s)}\,ds, \quad \forall t > 0, \tag{2.34}$$

$$g(t) = \begin{cases} \varphi(t) & si \quad \lambda = 0, \\ \int_0^t \frac{\varphi(s)}{s}\,ds & si \quad \lambda > 0, \end{cases} \quad \forall t \geq 0, \tag{2.35}$$

$$h(t) = \begin{cases} K^{-1}(D(t)) & si \quad t \in]T_0, +\infty[, \\ 0 & si \quad t \in [0, T_0], \end{cases} \tag{2.36}$$

$$\begin{cases} K(t) = D(t) + \dfrac{\psi^{-1}\Big(t+\psi(E(0))\Big)}{\varphi\Big(\psi^{-1}\Big(t+\psi(E(0))\Big)\Big)} e^{\lambda t}, \quad \forall t \geq 0, \\ D(t) = \int_0^t e^{\lambda s}\,ds, \quad \forall t \geq 0, \end{cases} \tag{2.37}$$

$$T_0 = D^{-1}\Big(\frac{E(0)}{\varphi(E(0))}\Big) \quad et \quad \tau_0 = \begin{cases} 0 & si \quad t \in]T_0, +\infty[, \\ T_0 & si \quad t \in [0, T_0]. \end{cases}$$

Remarques. 1. Si $\lambda = 0$ et $\varphi(t) = dt^{r+1}$ pour $d > 0$ et $r \geq 0$, alors l'estimation (2.33) coïncide avec (1.5), (1.8) et (1.11), et elle coïncide avec (1.3) et (1.4) si de plus $\phi(s) = s$.

2. Si $\lambda = 0$, alors l'estimation (2.33) est plus forte que (1.8) en général grâce à notre fonction h définie par (2.36) qui minimise (2.47) ci-après.

3. Notons que, comme $\frac{1}{\varphi}$ est décroissante,

$$\frac{\psi^{-1}(t)}{\varphi\Big(\psi^{-1}(t)\Big)} \leq t, \quad \forall t \geq \psi(\frac{1}{2}).$$

Et par conséquent, $h(t) \geq \frac{1}{2}t + \psi(E(0))$ pour t assez grand. Donc on déduit de (2.33) qu'il exite $C > 0$ tel que

$$E(t) \leq Cg^{-1}\Big(e^{\frac{\lambda}{2}t}\varphi(\psi^{-1}(\frac{1}{2}t))\Big), \quad \forall t \geq 0.$$

Dans le cas particulier $\lambda = 0$ (E est décroissante), cette inégalité implique que

$$E(t) \leq C\psi^{-1}(\frac{1}{2}t), \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve du Lemme 2.9. Si $E(s) = 0$ pour un $s \geq 0$, la première inégalité de (2.32) implique que $E(t) = 0$ pour tout $t \geq s$, et dans ce cas-là, il n'y a rien à démontrer. Donc, on peut supposer que $E(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ sans perte de généralité.

On pose :

$$L(s) = \int_s^{+\infty} \varphi(E(t))\, dt, \quad \forall s \geq 0. \tag{2.39}$$

D'après (2.32), on a :

$$L(s) \leq E(s), \quad \forall s \geq 0. \tag{2.40}$$

La fonction L est strictement positive décroissante de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant, d'après (2.39) et (2.40) :

$$-L'(s) = \varphi(E(s)) \geq \varphi(L(s)), \quad \forall s \geq 0.$$

La fonction ψ définie par (2.34) est strictement décroissante, donc,

$$\Big(\psi(L(s))\Big)' = \frac{-L'(s)}{\varphi(L(s))} \geq 1, \quad \forall s \geq 0.$$

Donc, par intégration sur $[0,t]$ et en utilisant (2.40) pour $s=0$,

$$\psi(L(t)) \geq t + \psi(E(0)), \quad \forall t \geq 0. \tag{2.41}$$

Comme φ est convexe et $\varphi(0)=0$, alors

$$\varphi(s) \leq \varphi(1)s,\ \forall s \in [0,1] \quad \text{et} \quad \varphi(s) \geq \varphi(1)s,\ \forall s \geq 1, \tag{2.42}$$

et par conséquent $\lim_{t\to 0}\psi(t) = +\infty$ et $[\psi(E(0)), +\infty[\subset \mathrm{Image}\,(\psi)$. On déduit donc de (2.41) que :

$$L(t) \leq \psi^{-1}\Big(t + \psi(E(0))\Big), \quad \forall t \geq 0. \tag{2.43}$$

Maintenant, pour tout $s \geq 0$, on pose :

$$f_s(t) = e^{-\lambda t}\int_s^t e^{\lambda\tau}\,d\tau, \quad \forall t \geq s. \tag{2.44}$$

La fonction f_s est strictement croissante sur $[s,+\infty[$ et strictement positive sur $]s,+\infty[$ vérifiant :

$$f_s(s) = 0 \quad \text{et} \quad f_s'(t) + \lambda f_s(t) = 1, \quad \forall t \geq s \geq 0. \tag{2.45}$$

D'après (2.42), la fonction g définie par (2.35) est bien définie, positive et strictement croissante vérifiant :

$$g(t) \leq \varphi(t) \quad \text{et} \quad \lambda t g'(t) = \lambda\varphi(t), \quad \forall t \geq 0,$$

donc, d'après (2.45) et la deuxième inégalité de (2.32),

$$\partial_\tau\Big(f_s(\tau)g(E(\tau))\Big) = f_s'(\tau)g(E(\tau)) + f_s(\tau)E'(\tau)g'(E(\tau))$$

$$\leq \Big(1-\lambda f_s(\tau)\Big)\varphi(E(\tau)) + \lambda f_s(\tau)\varphi(E(\tau)) = \varphi(E(\tau)), \quad \forall \tau \geq s \geq 0.$$

En intégrant cette inégalité sur $[s,t]$, on obtient :

$$L(s) \geq \int_s^t \varphi(E(\tau))\,d\tau \geq f_s(t)g(E(t)), \quad \forall t \geq s \geq 0. \tag{2.46}$$

D'après (2.42), $\lim_{t\to+\infty} g(s) = +\infty$. Comme $g(0) = 0$ et g est strictement croissante, on déduit alors de (2.43) et (2.46) que :

$$E(t) \leq g^{-1}\Big(\inf_{s\in[0,t[} \frac{\psi^{-1}\Big(s + \psi(E(0))\Big)}{f_s(t)}\Big), \quad \forall t > 0. \tag{2.47}$$

On fixe maintenant $t > T_0$ où T_0 est défini par (2.38) et on pose :

$$J(s) = \frac{\psi^{-1}\Big(s + \psi(E(0))\Big)}{f_s(t)}, \quad \forall s \in [0, t[. \tag{2.48}$$

La fonction J est dérivable et on a, pour tout $s \in [0, t[$:

$$J'(s) = f_s^{-2}(t)\Big[e^{-\lambda(t-s)}\psi^{-1}\Big(s + \psi(E(0))\Big) - f_s(t)\varphi\Big(\psi^{-1}\Big(s + \psi(E(0))\Big)\Big)\Big].$$

On vérifie facilement, d'après (2.44), que :

$$J'(s) = 0 \;\Leftrightarrow\; K(s) = D(t) \quad \text{et} \quad J'(s) < 0 \;\Leftrightarrow\; K(s) < D(t)$$

où K et D sont définies par (2.37). On a : $K(0) = \frac{E(0)}{\varphi(E(0))}$ et $D(0) = 0$. De plus, comme ψ^{-1} est strictement décroissante et $d(s) = \frac{s}{\varphi(s)}$, $s > 0$, est décroissante (puisque φ est convexe), alors K et D sont strictement croissantes. Donc, si $t > T_0$,

$$\inf_{s\in[0,t[} J(s) = J\Big(K^{-1}(D(t))\Big) = J(h(t)).$$

Comme h vérifie $J'(h(t)) = 0$, alors on conclut de (2.47) l'estimation (2.33) pour $t > T_0$.

Si $t \in [0, T_0]$, alors il suffit de noter que $E'(t) \leq \lambda E(t)$ et le fait que $g \leq \varphi$ impliquent que

$$E(t) \leq e^{\lambda t}E(0) \leq e^{\lambda T_0}E(0) \leq e^{\lambda T_0}\varphi^{-1}\Big(e^{\lambda t}\varphi(E(0))\Big) \leq e^{\lambda T_0}g^{-1}\Big(e^{\lambda t}\varphi(E(0))\Big).$$

Remarque. Sous les hypothèses du Lemme 2.9, on a toujours

$$\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0. \tag{2.49}$$

En effet, il suffit de choisir $s = \frac{1}{2}t$ dans (2.48) et noter que $g(0) = 0$, $\lim_{t\to 0}\psi(t) = +\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} f_{\frac{1}{2}t}(t) > 0$ d'où, d'après (2.47), le résultat (2.49).

On termine ce paragraphe par le lemme suivant qui montre que la fonction E est nulle à partir de certain t_0 si E vérifie (2.32) avec φ non convexe.

LEMME 2.10. *Soient $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue croissante vérifiant :*

$$\int_0^{E(0)} \frac{1}{\varphi(s)} ds < +\infty, \quad \varphi(0) = 0 \quad \textit{et} \quad \varphi(t) > 0,\ \forall t > 0. \tag{2.50}$$

Supposons que E vérifie (2.32). Alors E vérifie

$$E(t) = 0, \quad \forall t \geq \int_0^{E(0)} \frac{1}{\varphi(s)} ds. \tag{2.51}$$

REMARQUE. Lemme 2.10 donne une généralisation du [66, Theorem 3 - (e)] correspondant au cas particulier $\lambda = 0$ (E est décroissante) et $\varphi(s) = \frac{1}{T} s^p$, où $T > 0$ et $p \in]0, 1[$.

Preuve du Lemme 2.10. Supposons par contradiction que $E(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$. On considère la fonction L définie par (2.39) et on pose $\tilde{\varphi}(t) = \int_t^{E(0)} \frac{1}{\varphi(s)} ds$. D'après (2.40), on a :

$$\Big(\tilde{\varphi}(L(s))\Big)' = \frac{-L'(s)}{\varphi(L(s))} = \frac{\varphi(E(s))}{\varphi(L(s))} \geq 1, \quad \forall s \geq 0.$$

Donc, par intégration sur $[0, t]$,

$$\tilde{\varphi}(L(t)) \geq t + \tilde{\varphi}(L(0)), \quad \forall t \geq 0. \tag{2.52}$$

D'après (2.50), $\tilde{\varphi}(L(t)) \leq \tilde{\varphi}(0) = \int_0^{E(0)} \frac{1}{\varphi(s)} ds < +\infty$ pour tout $t \geq 0$, alors que

$$\lim_{t \to +\infty} \Big(t + \tilde{\varphi}(L(0))\Big) = +\infty.$$

Ceci contredit (2.52). Donc en déduit qu'il existe $t_0 \geq 0$ such that $E(t_0) = 0$. La première inégalité de (2.32) pour $s = t_0$ et (2.50) impliquent que

$$E(t) = 0, \quad \forall t \geq t_0. \tag{2.53}$$

On choisit $t_0 = \min\{t \geq 0 : E(t) = 0\}$. On a alors $E(t) > 0$ pour tout $t \in [0, t_0[$ et $L(s) = \int_s^{t_0} \varphi(E(t))\, dt$. Et par conséquent, (2.52) est vérifié, par continuité en t_0, pour tout $t \in [0, t_0]$. Donc

$$t_0 \leq t_0 + \tilde{\varphi}(L(0)) \leq \tilde{\varphi}(L(t_0)) \leq \tilde{\varphi}(0) = \int_0^{E(0)} \frac{1}{\varphi(s)} ds,$$

d'où, d'après (2.53), le résultat (2.51).

3. Equation des ondes

3.1. Introduction

On considère dans ce paragraphe le problème de la stabilisation (interne et frontière) de l'équation des ondes semi-linéaire avec un terme perturbant d'ordre 1

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + h(\nabla u) + f(u) + g(u') = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{$P3$}$$

dans le cas d'un feedback interne, et

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + h(\nabla u) + f(u) = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\nu u + g(u') = 0 & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{$P3'$}$$

dans le cas d'un feedback frontière, où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine ouvert borné de frontière Γ assez régulière, et f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues vérifiant certaines hypothèses (voir paragraphe 3.2). Dans $(P3')$, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ où Γ_0 et Γ_1 sont deux parties fermées et disjointes.

L'objectif principal de ce paragraphe est de montrer que toute solution de $(P3)$ et $(P3')$ converge vers zéro quand t converge vers l'infini et de donner des estimations précises de stabilité en utilisant, en particulier, les résultats du paragraphe 2.

3.2. Notations et résultats principaux

On commence ce paragraphe par considérer des hypothèses générales.

(H.1) Hypothèses sur f.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = 0$,

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq \alpha(1 + |s_1|^q + |s_2|^q)|s_1 - s_2|, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R},$$

$$F(s) \geq -as^2, \quad \forall s \in \mathbb{R} \tag{3.2.1}$$

avec α, $q \geq 0$, $(n-2)q \leq n$ et $a < \frac{1}{2c_0}$ où F est le potentiel défini par :

$$F(s) = \int_0^s f(\sigma)\, d\sigma, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

et c_0 est la plus petite constante positive (qui ne dépend que de Ω et de $\hat{\zeta}$ où $\hat{\zeta}$ est défini dans l'ypothèse (H.3)) vérifiant (inégalité de Poincaré) :

$$\int_\Omega e^{\hat{\zeta}\cdot x}|v|^2\,dx \leq c_0 \int_\Omega e^{\hat{\zeta}\cdot x}|\nabla v|^2\,dx, \quad \forall v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \tag{3.2.2}$$

où $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$. Dans le cas de $(P3)$ $(\Gamma_0 = \Gamma)$, on utilise la notation classique $H^1_0(\Omega)$.

On suppose aussi qu'il existe un réel $b > 0$ tel que

$$2bF(s) \leq sf(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.2.3}$$

(H.2) Hypothèses sur g.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1, croissante et $g(0) = 0$ telle que

$$g(s)s > 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}^*. \tag{3.2.4}$$

On suppose aussi qu'il existe trois constantes $r \geq 1$ et c_1, $c_2 > 0$ telles que

$$c_1 \min\{|s|, |s|^r\} \leq |g(s)| \leq c_2 \max\{|s|^{\frac{1}{r}}, |s|\}, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.2.5}$$

(H.3) Hypothèses sur h.

$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 telle que

$$\nabla h \quad \text{est borné}, \tag{3.2.6}$$

et il existe $\hat{\zeta} \in \mathbb{R}^n$ et $\beta \geq 0$ tels que

$$|h(\zeta) + \hat{\zeta}\cdot\zeta| \leq \beta|\zeta|, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2.7}$$

On pose maintenant $\phi(x) = \hat{\zeta}\cdot x$ et on définit l'énergie équivalente de la solution de $(P3)$ et de $(P3')$ par la formule

$$E(t) = \int_\Omega e^{\phi(x)}\Big(|u'|^2 + |\nabla u|^2 + 2F(u)\Big)\,dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.2.8}$$

Remarques. 1. Si la fonction f est croissante vérifiant $f(0) = 0$, alors les conditions (3.2.1) et (3.2.3) sont satisfaites avec $a = 0$ et $b = \frac{1}{2}$.

2. La condition (3.2.1) assure l'inégalité

$$\int_\Omega e^{\phi(x)}(|u'|^2 + |\nabla u|^2)\,dx \leq kE(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{3.2.9}$$

où $k = \frac{1}{1-2ac_0}$. En effet, (3.2.1) et (3.2.2) impliquent que

$$\begin{aligned}
E(t) &\geq \int_\Omega e^{\phi(x)} \left(|u'|^2 + |\nabla u|^2 - 2a|u|^2\right) dx \\
&\geq \int_\Omega e^{\phi(x)} \left(|u'|^2 + (1-2ac_0)|\nabla u|^2\right) dx \\
&\geq (1-2ac_0) \int_\Omega e^{\phi(x)} \left(|u'|^2 + |\nabla u|^2\right) dx
\end{aligned}$$

d'où (3.2.9). Comme ϕ est bornée, l'inégalité (3.2.9) montre que l'énergie équivalente E définit une norme pour le couple (u, u') sur $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Existence et régularité de solutions. En utilisant la méthode de Galerkin (voir M. M. Cavalcanti et al. [20]) - on omet ici les détails - on peut montrer, sous les hypothèses (H.1), (H.2) et (H.3), que le problème $(P3)$ admet, pour toute donnée initiale

$$(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega),$$

une solution unique (forte) $u :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, vérifiant :

$$u \in L^\infty(]0, +\infty[; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),\ u' \in L^\infty(]0, +\infty[; H_0^1(\Omega)), \tag{3.2.10}$$
$$u'' \in L^\infty(]0, +\infty[; L^2(\Omega)).$$

En revanche, si la donnée initiale $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, alors, en utilisant des arguments classiques de densité, on montre que $(P3)$ admet une solution unique (faible) $u : \Omega\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dans l'espace

$$C(]0, +\infty]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(]0, +\infty[; L^2(\Omega)). \tag{3.2.11}$$

On présente maintenant les résultats de stabilité concernant $(P3)$.

Théorème 3.2.1. *Supposons satisfaites les hypothèses (H.1), (H.2) et (H.3) avec $b < 1$.*

Alors l'énergie équivalente E définie par (3.2.8) vérifie, pour toute solution faible de $(P3)$, les estimations suivantes :

Cas 1 : h est linéaire ($\beta = 0$). *Il existe deux constantes positives c et ω telles que*

$$E(t) \leq cE(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad si \quad r = 1, \tag{3.2.12}$$

$$E(t) \leq c(1+t)^{\frac{-2}{r-1}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad si \quad r > 1. \tag{3.2.13}$$

Cas 2 : h est non linéaire ($\beta > 0$). *Supposons que $r = 1$ et β est assez petit. Alors E vérifie (3.2.12).*

Remarques. 1. Dans la démonstration du Théorème 3.2.1, on précise la condition de petitesse supposée sur β dans le cas où h est non linéaire.

2. Si $r = 1$, on obtient la stabilité exponentielle (3.2.12) que h soit linéaire ou non. Dans tous les cas, et grâce à l'introduction de l'énergie équivalente, aucune condition de petitesse n'est imposée sur $|\hat{\zeta}|$ (qui représente la partie linéaire de h).

3. Dans le cas particulier où g est linéaire ($g(s) = \alpha s$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$. Donc $r = 1$ dans (3.2.5)), on obtient les résultats obtenus par S. Messaoudi [78].

4. Dans le cas où $\beta = 0$ (h est linéaire), il est possible d'affaiblir les conditions (3.2.5) (voir A. Guesmia [35, 36] pour le système d'élasticité et A. Guesmia [34] pour le système de Petrovsky). Comme notre objectif principal est de traiter le terme perturbant $h(\nabla u)$, on ne considère dans ce paragraphe que les conditions (3.2.5).

On s'intéresse maintenant à la stabilisation de $(P3')$. Pour obtenir les estimations de stabilité (3.2.12) et (3.2.13) dans le cas d'un feedback frontière, on a besoin d'imposer quelques hypothèses géométriques sur Γ. Soit x^0 un point fixe dans $\mathbb{R}^n$. On pose :

$$m = m(x) = x - x^0, \quad R = \max_{x \in \bar{\Omega}} |m(x)| = \|m\|_\infty \tag{3.2.14}$$

et on suppose que les deux parties non vides Γ_0 et Γ_1 de Γ vérifient, pour un réel $\delta > 0$:

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : m \cdot \nu \leq 0\}, \quad \Gamma_1 = \{x \in \Gamma : m \cdot \nu \geq \delta\}. \tag{3.2.15}$$

Exemples. Concernant l'existence d'une telle partition de Γ, on peut prendre Ω comme suit :

1. Si $n = 1$, alors Ω est un intervalle ouvert borné: $\Omega =]x_1, x_2[\subset \mathbb{R}$. Les hypothèses géométriques (3.2.15) sont satisfaites dans les cas suivants :

i) $\Gamma_0 = \{x_1\}, \quad \Gamma_1 = \{x_2\} \quad$ et $\quad x^0 \leq x_1$,

ii) $\Gamma_0 = \{x_2\}, \quad \Gamma_1 = \{x_1\} \quad$ et $\quad x^0 \geq x_2$.

2. Si $n \geq 2$ et $\Omega = \Omega_1 \setminus \bar{\Omega}_0$ où Ω_1 et Ω_0 sont deux domaines ouverts de frontières Γ_1 et Γ_0 respectivement, $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega_1$ et Ω_1 et Ω_0 sont étoilés par rapport à un point $x^0 \in \Omega_0$ (un domaine Ω est dit *étoilé* par rapport à x^0 si $m \cdot \nu > 0$ sur $\partial\Omega$), alors les hypothèses géométriques (3.2.15) sont satisfaites.

3. Si $n \geq 2$ et Ω n'est pas de la forme mentionnée dans l'exemple précédent, alors l'existence d'un point x^0 vérifiant les hypothèses géométriques (3.2.15) n'est pas valable en général. En appliquant une méthode d'approximation, on peut affaiblir considérablement ces hypothèses géométriques, au moins en dimension $n = 2$, 3, en adaptant des arguments donnés par V. Komornik et E. Zuazua [65] pour l'équation des ondes (voir aussi les références mentionnées dans [65]). D'autre part, il est possible d'affaiblir les hypothèses (3.2.15) en considérant le cas des domaines *presque étoilés* (une notion introduite et appliquée par P. Martinez [76]).

(H.4) Hypothèse sur f.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 telle que (3.2.3),

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq \alpha(1 + |s_1|^q + |s_2|^q)|s_1 - s_2|, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R},$$

$$F(s) \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R} \tag{3.2.16}$$

avec α, $q \geq 0$ et $(n-2)q \leq n$.

L'existence et la régularité des solutions de $(P3')$ peuvent être démontrées par la méthode de Galerkin (voir M. M. Cavalcanti et al. [20] et S. Messaoudi [78]); mais ce point ne sera pas discuté ici. On utilise les notations :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : \ v = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_0\} = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \quad \text{et} \quad W = H^2(\Omega) \cap V,$$

on obtient :

1. Pour tout $(u_0, u_1) \in W \times V$ tel que $\partial_\nu u_0 + g(u_1) = 0$ sur Γ_1, le problème $(P3')$ admet une solution forte unique : $u :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

$$u \in L^\infty(]0, +\infty[; W), \ \ u' \in L^\infty(]0, +\infty[; V) \ \text{ et } \ u'' \in L^\infty(]0, +\infty[; L^2(\Omega)).$$

2. Si $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$, alors (en utilisant des arguments standard de densité) le problème $(P3')$ admet une solution faible unique : $u : \Omega \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dans l'espace

$$C(]0, +\infty]; V) \cap C^1(]0, +\infty[; L^2(\Omega)). \tag{3.2.17}$$

Voici maintenant les résultats de stabilité de $(P3')$.

Théorème 3.2.2. *Soit u une solution de $(P3')$ dans la classe (3.2.17). Supposons satisfaites les hypothèses (H.2), (H.3) et (H.4) avec $|\hat{\zeta}|$ assez petit, et b assez grand ou bien f linéaire. Alors l'énergie équivalente E de*

u, définie par (3.2.8), satisfait les estimations du théorème 3.2.1; autrement dit, E satisfait (3.2.12) si β est assez petit (ou nul) et $r = 1$, et E satisfait (3.2.13) si $\beta = 0$ et $r > 1$.

Remarques. 1. Comme exemple de fonction f satisfaisant (H.4), on peut prendre $f(s) = \alpha s\,|s|^q$ avec α, $q \geq 0$ et $(n-2)q \leq n$. Les conditions (3.2.3) et (3.2.16) sont satisfaites pour tout $b \leq 1 + \frac{q}{2}$.

2. L'exemple le plus simple d'une fonction g vérifiant (3.2.4) et (3.2.5) est le suivant : $g(s) = \gamma |s|^{r-1} s$ si $|s| \leq 1$, et $g(s) = \gamma s$ si $|s| \geq 1$ où $\gamma > 0$.

3. Grâce à (3.2.16), l'énergie équivalente (3.2.8) satisfait l'inégalité

$$\int_\Omega \left(|u'|^2 + |\nabla u|^2 \right) dx \leq e^{\|\phi\|_\infty} E(t). \tag{3.2.18}$$

La quantité $\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ définit une norme sur V équivalente à la norme usuelle de $H^1(\Omega)$; par conséquent, $V \times L^2(\Omega)$ muni de E est un espace de Hilbert.

4. Dans la démonstration du Théorème 3.2.2, on précise la condition imposée sur $|\hat{\zeta}|$ ainsi que celle imposée sur b dans le cas où f est non linéaire.

5. Comme $(P3)$ et $(P3')$ sont dissipatifs (au sens de l'énergie équivalente) si h est linéaire, alors on peut considérer des conditions sur le comportement de g au voisinage de zéro plus faibles que (3.2.5) et montrer des estimations générales de stabilité (comme, par exemple, celles démontrées par F. Alabau-Bousouira [3] et M. Eller et al. [29]).

3.3. Feedback interne

Afin de justifier tous les calculs qui vont suivre, on montre tout d'abord les estimations (3.2.12) et (3.2.13) pour les solutions fortes; et par l'utilisation d'arguments standard de densité, on déduit ces mêmes estimations pour toute solution faible. Soient donc

$$(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$$

et u la solution de $(P3)$ correspondante (vérifiant (3.2.10)).

On va montrer que l'énergie équivalente (3.2.8) vérifie les hypothèses du Lemme 2.8 (paragraphe 2) pour obtenir les estimations cherchées.

Dans toute la suite de ce paragraphe, c désigne une constante positive générique qui peut changer d'une ligne à l'autre et qui ne dépend pas de β.

On commence ce paragraphe par donner une formule explicite de la dérivée de E. En dérivant E, on obtient (noter que $\phi(x) = \hat{\zeta} \cdot x$) :

$$E'(t) = 2 \int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(u'(u'' + f(u)) + \nabla u \cdot \nabla u' \Big)\, dx.$$

En utilisant $(P3)$ pour remplacer le terme $u'' + f(u)$, et en appliquant la formule de Green, on déduit

$$E'(t) = -2 \int_\Omega e^{\phi(x)} u' g(u')\, dx - 2 \int_\Omega e^{\phi(x)} u' \left(h(\nabla u) + \hat{\zeta} \cdot \nabla u \right) dx. \quad (3.3.1)$$

En utilisant maintenant (3.2.4), (3.2.7.), (3.2.9) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$E'(t) \le 2 \int_\Omega e^{\phi(x)} |u'| |h(\nabla u) + \hat{\zeta} \cdot \nabla u|\, dx$$

$$\le \int_\Omega e^{\phi(x)} \left(\beta |u'|^2 + \frac{1}{\beta} |h(\nabla u) + \hat{\zeta} \cdot \nabla u|^2 \right) dx,$$

et par conséquent (où k est défini par (3.2.9))

$$E'(t) \le \beta k E(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.3.2)$$

d'où la deuxième inégalité de (2.27) avec $\lambda = \beta k$.

On montre maintenant que E vérifie la première inégalité de (2.27). Soient $0 \le S \le T < \infty$. Multiplions la première équation de $(P3)$ par $E^{\frac{r-1}{2}}(t) e^{\phi(x)} u$ et intégrons la formule obtenue sur $\Omega \times [S, T]$, on obtient :

$$0 = \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} u \left(u'' - \Delta u + h(\nabla u) + f(u) + g(u') \right) dx\, dt \quad (3.3.3)$$

$$= \left[E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} u u'\, dx \right]_S^T$$

$$+ \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(-\left| u' \right|^2 + |\nabla u|^2 + u f(u) \Big)\, dx\, dt$$

$$- \frac{r-1}{2} \int_S^T E^{\frac{r-3}{2}}(t) E'(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} u u'\, dx\, dt$$

$$+ \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} u g(u')\, dx\, dt$$

$$+\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}u\left(h(\nabla u)+\hat{\zeta}\cdot\nabla u\right)\,dx\,dt.$$

Or, en utilisant (3.2.2.), (3.2.3), (3.2.7), (3.2.9), (3.3.1) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\Big|\int_\Omega e^{\phi(x)}u\left(h(\nabla u)+\hat{\zeta}\cdot\nabla u\right)\,dx\Big|$$

$$\leq \frac{\beta}{2}\int_\Omega e^{\phi(x)}|u|^2\,dx+\frac{1}{2\beta}\int_\Omega e^{\phi(x)}|h(\nabla u)+\hat{\zeta}\cdot\nabla u|^2\,dx$$

$$\leq \beta c\int_\Omega e^{\phi(x)}|\nabla u|^2\,dx,$$

$$\Big|E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}uu'\,dx\Big|\leq\frac{1}{2}E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}(|u'|^2+|u|^2)\,dx\leq cE^{\frac{r+1}{2}}(t),$$

$$\Big|\frac{r-1}{2}E^{\frac{r-3}{2}}(t)E'(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}uu'\,dx\Big|\leq cE^{\frac{r-1}{2}}(t)|E'(t)|$$

$$\leq cE^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}(2u'g(u')+2|u'||h(\nabla u)+\hat{\zeta}\cdot\nabla u|)\,dx$$

$$\leq cE^{\frac{r-1}{2}}(t)(-E'(t)+\beta cE(t))$$

et

$$uf(u)\geq 2bF(u),$$

donc on déduit de (3.3.3) que

$$\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}\left(|u'|^2+(1-\beta c)|\nabla u|^2+2bF(u)\right)\,dx\,dt \tag{3.3.4}$$

$$\leq\beta c\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt+\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}\left(2|u'|^2-ug(u')\right)\,dx\,dt$$

$$+c(E^{\frac{r+1}{2}}(S)+E^{\frac{r+1}{2}}(T))-c\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)E'(t)\,dt.$$

En intégrant le dernier terme de (3.3.4) on obtient :

$$\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}\left(|u'|^2+(1-\beta c)|\nabla u|^2+2bF(u)\right)\,dx\,dt \tag{3.3.5}$$

$$\leq\beta c\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt+c\left(E^{\frac{r+1}{2}}(S)+E^{\frac{r+1}{2}}(T)\right)$$

$$+\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}\left(2\left|u'\right|^2-ug(u')\right)\,dx\,dt.$$

Comme $b<1$, on suppose que β est assez petit tel que $1-\beta c\geq b$, et on tire de (3.3.5) que

$$(b-\beta c)\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt\leq c\left(E^{\frac{r+1}{2}}(S)+E^{\frac{r+1}{2}}(T)\right) \tag{3.3.6}$$

$$+\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}\left(2\left|u'\right|^2-ug(u')\right)\,dx\,dt.$$

On majore maintenant la dernière intégrale de (3.3.6). On note :

$$\Omega^+=\{x\in\Omega:\,|u'|>1\}\quad\text{et}\quad\Omega^-=\Omega\setminus\Omega^+.$$

On applique les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Hölder, et on utilise (3.2.2), (3.2.4), (3.2.5), (3.2.9) et (3.3.1) on trouve, pour tout $\epsilon>0$:

$$-\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Omega^+} e^{\phi(x)}ug(u')\,dx\,dt$$

$$\leq c\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\Big(\int_{\Omega^+} e^{\phi(x)}|u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\Omega^+} e^{\phi(x)}\Big|g(u')\Big|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$\leq c\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\Big(\epsilon\int_{\Omega^+} e^{\phi(x)}|u|^2\,dx+\frac{c}{\epsilon}\int_{\Omega^+} e^{\phi(x)}u'g(u')\,dx\Big)dt$$

$$\leq c\epsilon\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt+\frac{c}{\epsilon}\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}u'g(u')\,dx\,dt$$

$$\leq c\epsilon\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt$$

$$+\frac{c}{\epsilon}\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\Big(-E'(t)-2\int_\Omega e^{\phi(x)}u'(h(\nabla u)+\hat{\zeta}\cdot\nabla u)\,dx\Big)\,dt.$$

Or, d'après (3.2.7) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|u'||h(\nabla u)+\hat{\zeta}\cdot\nabla u|\leq\frac{\beta}{2}(|u'|^2+|\nabla u|^2),$$

donc

$$-\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Omega^+} e^{\phi(x)}ug(u')\,dx\,dt \tag{3.3.7}$$

$$\leq c(\epsilon+\frac{\beta}{\epsilon})\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)+\frac{c}{\epsilon}E^{\frac{r+1}{2}}(S).$$

De même,

$$
\begin{aligned}
&-\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Omega^-} e^{\phi(x)} u g(u')\,dx\,dt\\
&\le \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\left(\epsilon\int_{\Omega^-} e^{\phi(x)}|u|^2\,dx+\frac{c}{\epsilon}\int_{\Omega^-} e^{\phi(x)} g^2(u')\,dx\right)\,dt\\
&\le c\epsilon\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt+\frac{c}{\epsilon}\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Omega^-}\left(e^{\phi(x)}u'g(u')\right)^{\frac{2}{r+1}}\,dx\,dt\\
&\le c\epsilon\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt\\
&+\frac{c}{\epsilon}\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\left(-E'(t)-2\int_\Omega e^{\phi(x)}u'(h(\nabla u)+\hat{\zeta}\cdot\nabla u)\,dx\right)^{\frac{2}{r+1}}\,dt.
\end{aligned}
$$

On distingue maintenant deux cas.

Si $h(\nabla u)=-\hat{\zeta}\cdot\nabla u$ ($\beta=0$), alors, d'après (3.3.1) et l'inégalité de Young,

$$
\begin{aligned}
&-\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Omega^-} e^{\phi(x)} u g(u')\,dx\,dt\\
&\le c\epsilon\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt+\frac{c}{\epsilon}\left(\epsilon^2\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt+\epsilon^{1-r}E(S)\right)\\
&\le c\epsilon\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt+c\epsilon^{-r}E(S).
\end{aligned}
$$

Si $\beta>0$ (dans ce cas-là, on a supposé que $r=1$), alors, d'après (3.3.1) et (3.2.7),

$$
\begin{aligned}
&-\int_S^T\int_{\Omega^-} e^{\phi(x)} u g(u')\,dx\,dt\\
&\le c\epsilon\int_S^T E(t)\,dt+\frac{c}{\epsilon}\int_S^T\left(-E'(t)-2\int_{\Omega^-} e^{\phi(x)}u'(h(\nabla u)+\hat{\zeta}\cdot\nabla u)\,dx\right)dt\\
&\le c\epsilon\int_S^T E(t)\,dt+\frac{c}{\epsilon}E(S)+\frac{c\beta}{\epsilon}\int_S^T E(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Donc, dans les deux cas, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&-\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Omega^-} e^{\phi(x)} u g(u')\,dx\,dt \qquad (3.3.8)\\
&\le c(\epsilon+\frac{\beta}{\epsilon})\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt+c\epsilon^{-r}E(S).
\end{aligned}
$$

Les deux inégalités (3.3.7) et (3.3.8) impliquent que

$$-\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}ug(u')\,dx\,dt \tag{3.3.9}$$

$$\leq c(\epsilon+\frac{\beta}{\epsilon})\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt + c\left(\epsilon^{-r}E(S)+\frac{1}{\epsilon}E^{\frac{r+1}{2}}(S)\right).$$

De la même manière, on majore le terme $\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}|u'|^2\,dx\,dt$. On a, d'après (3.2.5), (3.2.7) et (3.3.1) :

$$\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Omega^+} e^{\phi(x)}|u'|^2\,dx\,dt \tag{3.3.10}$$

$$\leq c\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Omega^+} e^{\phi(x)}u'g(u')\,dx\,dt$$

$$\leq c\beta\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt + cE^{\frac{r+1}{2}}(S).$$

D'autre part, d'après (3.2.5) et (3.3.1), on a :

$$\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Omega^-} e^{\phi(x)}|u'|^2\,dx\,dt \leq c\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Omega^-}\left(e^{\phi(x)}u'g(u')\right)^{\frac{2}{r+1}}\,dx\,dt$$

$$\leq c\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\Big(\int_{\Omega^-} e^{\phi(x)}u'g(u')\,dx\Big)^{\frac{2}{r+1}}\,dt$$

$$\leq c\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\Big(-E'(t)+c\beta E(t)\Big)^{\frac{2}{r+1}}\,dt.$$

En distinguant les deux cas ($\beta=0$ et $\beta>0$) et en utilisant l'inégalité de Young, on trouve : si $\beta=0$,

$$\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Omega^-} e^{\phi(x)}|u'|^2\,dx\,dt \leq c\epsilon\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt + c\epsilon^{\frac{1-r}{2}}E(S),$$

et si $\beta>0$ (dans ce cas-là, on a supposé que $r=1$),

$$\int_S^T\int_{\Omega^-} e^{\phi(x)}|u'|^2\,dx\,dt \leq c\beta\int_S^T E(t)\,dt + cE(S).$$

Donc, on déduit que

$$\int_S^T\int_{\Omega^-} e^{\phi(x)}|u'|^2\,dx\,dt \leq c(\epsilon+\beta)\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt + c\epsilon^{\frac{1-r}{2}}E(S). \tag{3.3.11}$$

Les deux inégalités (3.3.10) et (3.3.11) impliquent que

$$\int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} |u'|^2 \, dx \, dt \tag{3.3.12}$$

$$\leq c(\epsilon + \beta) \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t) \, dt + c \left(\epsilon^{\frac{1-r}{2}} E(S) + E^{\frac{r+1}{2}}(S) \right).$$

On substitue les deux inégalités (3.3.9) et (3.3.12) dans (3.3.6), on trouve :

$$(b - c(\beta + \frac{\beta}{\epsilon} + \epsilon)) \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t) \, dt \tag{3.3.13}$$

$$\leq c(1 + \frac{1}{\epsilon}) E^{\frac{r+1}{2}}(S) + c(\epsilon^{\frac{1-r}{2}} + \epsilon^{-r}) E(S) + c E^{\frac{r+1}{2}}(T).$$

Finalement, si $\beta = 0$ (donc E est décroissante), on choisit $\epsilon < \frac{b}{c}$ et on déduit de (3.3.13) que

$$\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t) \, dt \leq c \left(E(S) + E^{\frac{r+1}{2}}(S) + E^{\frac{r+1}{2}}(T) \right) \leq c \left(E(S) + E^{\frac{r+1}{2}}(S) \right)$$

d'où, d'après le Lemme 2.8, les inégalités (3.2.12) et (3.2.13).

Si $\beta > 0$ (donc, par hypothèse, $r = 1$), on prend $\epsilon = \sqrt{\beta}$ et on obtient :

$$(b - c(\beta + \sqrt{\beta})) \int_S^T E(t) \, dt \leq c_\beta E(S) + c E(S)$$

où c_β est une constante dépendant de β. On suppose que β est assez petit pour que $\beta + \sqrt{\beta} < \frac{b}{c}$ et $\frac{ck\beta}{b - c(\beta + \sqrt{\beta})} < 1$ (la constante k est définie par (3.2.9)), on obtient :

$$\int_S^T E(t) \, dt \leq c E(S) + c E(T)$$

d'où, d'après le Lemme 2.8, l'inégalité (3.2.12).

Ceci achève la démonstration du Théorème 3.2.1.

3.4. Feedback frontière : h est non linéaire

Dans ce paragraphe, on montre l'estimation (3.2.12) (stabilité exponentielle de $(P3')$).

La démonstration est très similaire à celle donnée dans le paragraphe 3.3.

En utilisant la première équation de $(P3')$ et les conditions au bord, on montre facilement que (noter que $\phi(x) = \hat{\zeta} \cdot x$)

$$E'(t) = -2 \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} u' g(u')\, dx - 2 \int_\Omega e^{\phi(x)} u' (h\,(\nabla u) + \hat{\zeta} \cdot \nabla u)\, dx. \quad (3.4.1)$$

En utilisant (H.2), (H.3) et (H.4), on déduit de (3.4.1) que

$$E'(t) \leq -2 \int_\Omega e^{\phi(x)} u' (h\,(\nabla u) + \hat{\zeta} \cdot \nabla u)\, dx$$

$$\leq \beta \int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(|u'|^2 + |\nabla u|^2 \Big)\, dx \leq \beta E(t),$$

donc E satisfait la deuxième inégalité de (2.27) (avec $\lambda = \beta$). On montre maintenant que E vérifie aussi, pour deux constantes $\bar{a}$ et $\hat{a}$, l'inégalité suivante :

$$\int_S^T E(t) dt \leq \bar{a} E(S) + \hat{a} E(T). \quad (3.4.2)$$

Soit $0 < \epsilon_0 \leq 1$ (ϵ_0 sera fixé ultérieurement). On multiplie la première équation de $(P3')$ par :

$$e^{\phi(x)} \left(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u\right)$$

où m est défini par (3.2.14) et (3.2.15), et on utilise les conditions au bord. On note :

$$I_1 = \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} u'' \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u \Big)\, dx\, dt,$$

$$I_2 = \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} (-\Delta u - \hat{\zeta} \cdot \nabla u) \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u \Big)\, dx\, dt,$$

$$I_3 = \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(h(\nabla u) + \hat{\zeta} \cdot \nabla u \Big) \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u \Big)\, dx\, dt,$$

$$I_4 = \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} f(u) \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u \Big)\, dx\, dt.$$

On commence par majorer les intégrales I_i (qui vérifient œ: $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$). On a :

$$I_1 = \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} u'' \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u \Big)\, dx\, dt$$

$$= \Big[\int_\Omega e^{\phi(x)} u' \Big(2m\cdot\nabla u + (n-\epsilon_0)u\Big)\, dx\Big]_S^T$$

$$- \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(m\cdot\nabla(u')^2 + (n-\epsilon_0)\left|u'\right|^2\Big)\, dx\, dt$$

$$= \int_S^T \int_\Omega (\epsilon_0 + \hat{\zeta}\cdot m) e^{\phi(x)} \left|u'\right|^2\, dx\, dt - \int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} (m\cdot\nu) \left|u'\right|^2\, d\Gamma\, dt$$

$$+ \Big[\int_\Omega e^{\phi(x)} u' \Big(2m\cdot\nabla u + (n-\epsilon_0)u\Big)\, dx\Big]_S^T.$$

On majore le dernier terme de cette inégalité, on a :

$$\int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(2m\cdot\nabla u + (n-\epsilon_0)u\Big)^2 dx - \int_\Omega e^{\phi(x)} (2m\cdot\nabla u)^2\, dx$$

$$= \int_\Omega e^{\phi(x)} \Big((n-\epsilon_0)^2 \left|u\right|^2 + 2(n-\epsilon_0) m\cdot\nabla(u)^2\Big)\, dx$$

$$= \int_\Omega e^{\phi(x)} \Big((n-\epsilon_0)^2 \left|u\right|^2 - 2(n-\epsilon_0) n \left|u\right|^2\Big)\, dx$$

$$+ 2(n-\epsilon_0) \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} (m\cdot\nu) \left|u\right|^2\, d\Gamma$$

$$= (\epsilon_0 + n)(\epsilon_0 - n) \int_\Omega e^{\phi(x)} \left|u\right|^2\, dx + 2(n-\epsilon_0) \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} (m\cdot\nu) \left|u\right|^2\, d\Gamma$$

$$\leq 2(n-\epsilon_0) R \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} \left|u\right|^2\, d\Gamma$$

(noter que $\epsilon_0 - n \leq 1 - n \leq 0$), alors

$$\int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(2m\cdot\nabla u + (n-\epsilon_0)u\Big)^2 dx \tag{3.4.3}$$

$$\leq \int_\Omega e^{\phi(x)} (2m\cdot\nabla u)^2\, dx + 2(n-\epsilon_0) R \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} \left|u\right|^2\, d\Gamma.$$

Et par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\Big|\int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(2m\cdot\nabla u + (n-\epsilon_0)u\Big) u'\, dx\Big|$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} \int_\Omega e^{\phi(x)} \left|u'\right|^2 dx + \frac{1}{2\epsilon} \Big(\int_\Omega e^{\phi(x)} (2m\cdot\nabla u)^2\, dx + 2(n-\epsilon_0) R \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} \left|u\right|^2\, d\Gamma\Big)$$

$$\leq \int_\Omega e^{\phi(x)} \left(\frac{\epsilon}{2} \left|u'\right|^2 + \frac{2R^2}{\epsilon} \left|\nabla u\right|^2\, dx\right) + \frac{R}{\epsilon} (n-\epsilon_0) \bar{c} \int_\Omega e^{\phi(x)} \left|\nabla u\right|^2\, dx$$

où $\bar{c}$ est la plus petite constante positive vérifiant (inégalité de Poincaré) :

$$\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}|v|^2\,d\Gamma \leq \bar{c}\int_{\Omega} e^{\phi(x)}|\nabla v|^2\,dx, \quad \forall v \in V = H^1_{\Gamma_0}(\Omega). \tag{3.4.4}$$

Choisissons $\epsilon = 2\sqrt{R(R+\frac{\bar{c}}{2}(n-\epsilon_0))}$ et posons $a_1 = \sqrt{R(R+\frac{\bar{c}}{2}(n-\epsilon_0))}$, on obtient :

$$\Big|\int_{\Omega} e^{\phi(x)}\Big(2m\cdot\nabla u + (n-\epsilon_0)u\Big)u'\,dx\Big| \leq a_1 E(t).$$

Donc, on déduit que

$$I_1 \geq -a_1(E(S)+E(T)) - R\int_S^T\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\left|u'\right|^2\,d\Gamma\,dt \tag{3.4.5}$$

$$+(\epsilon_0 - R\|\nabla\phi\|_\infty)\int_S^T\int_{\Omega} e^{\phi(x)}\left|u'\right|^2\,dx\,dt.$$

D'autre part, en utilisant la formule générale de Green et l'identité

$$2\nabla u\cdot\nabla(m\cdot\nabla u) = 2\left|\nabla u\right|^2 + m\cdot\nabla(|\nabla u|^2)$$

(noter aussi que sur Γ_0 on a : $\nabla u = \partial_\nu u\nu$), on trouve :

$$I_2 = \int_S^T\int_{\Omega} e^{\phi(x)}(-\Delta u - \hat{\zeta}\cdot\nabla u)\Big(2m\cdot\nabla u + (n-\epsilon_0)u\Big)\,dx\,dt$$

$$= \int_S^T\int_{\Omega}(2+\hat{\zeta}\cdot m - \epsilon_0)e^{\phi(x)}\left|\nabla u\right|^2\,dx\,dt - \int_S^T\int_{\Gamma_0} e^{\phi(x)}(m\cdot\nu)\left|\nabla u\right|^2\,d\Gamma\,dt$$

$$+\int_S^T\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big((m\cdot\nu)\left|\nabla u\right|^2 - (n-\epsilon_0)u\partial_\nu u - 2(m\cdot\nabla u)\partial_\nu u\Big)\,d\Gamma\,dt.$$

En utilisant la définition (3.2.15) de Γ_0 et Γ_1, on conclut que

$$I_2 \geq (2-\epsilon_0-R|\hat{\zeta}|)\int_S^T\int_{\Omega} e^{\phi(x)}\left|\nabla u\right|^2\,dx\,dt$$

$$+\int_S^T\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big(\delta\left|\nabla u\right|^2 - (n-\epsilon_0)u\partial_\nu u - \delta\left|\nabla u\right|^2 - \frac{R^2}{\delta}(\partial_\nu u)^2\Big)\,d\Gamma\,dt$$

d'où

$$I_2 \geq (2-\epsilon_0-R|\hat{\zeta}|)\int_S^T\int_{\Omega} e^{\phi(x)}\left|\nabla u\right|^2\,dx\,dt \tag{3.4.6}$$

$$-\int_S^T\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big((n-\epsilon_0)u\partial_\nu u+\frac{R^2}{\delta}(\partial_\nu u)^2\Big)\,d\Gamma\,dt.$$

De même, en utilisant (3.2.7), (3.4.3) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$I_3=\int_S^T\int_\Omega e^{\phi(x)}\Big(h(\nabla u)+\hat{\zeta}\cdot\nabla u\Big)\Big(2m\cdot\nabla u+(n-\epsilon_0)u\Big)\,dx\,dt$$

$$\geq -\frac{R}{\beta}\int_S^T\int_\Omega e^{\phi(x)}(h(\nabla u)+\hat{\zeta}\cdot\nabla u)^2\,dx\,dt$$

$$-\frac{\beta}{4R}\int_S^T\Big(4R^2\int_\Omega e^{\phi(x)}\left|\nabla u\right|^2\,dx+2(n-\epsilon_0)R\int_{\Gamma_1}e^{\phi(x)}\left|u\right|^2\,d\Gamma\Big)\,dt,$$

et par conséquent

$$I_3\geq -2\beta R\int_S^T\int_\Omega e^{\phi(x)}\left|\nabla u\right|^2\,dx\,dt \tag{3.4.7}$$

$$-\frac{\beta}{2}(n-\epsilon_0)\int_S^T\int_{\Gamma_1}e^{\phi(x)}\left|u\right|^2\,d\Gamma\,dt.$$

En utilisant (3.2.3) et le fait que $F(0)=0$ et F soit positive, on obtient :

$$I_4=\int_S^T\int_\Omega e^{\phi(x)}f(u)\Big(2m\cdot\nabla u+(n-\epsilon_0)u\Big)\,dx\,dt$$

$$\geq (n-\epsilon_0)b\int_S^T\int_\Omega e^{\phi(x)}2F(u)\,dx\,dt+\int_S^T\int_\Omega e^{\phi(x)}2m\cdot\nabla(F(u))\,dx\,dt$$

$$\geq \int_S^T\int_\Omega((n-\epsilon_0)b-n-\hat{\zeta}\cdot m)e^{\phi(x)}2F(u)\,dx\,dt+\int_S^T\int_{\Gamma_1}e^{\phi(x)}2(m\cdot\nu)F(u)\,d\Gamma\,dt.$$

On en déduit alors que

$$I_4\geq((n-\epsilon_0)b-n-R|\hat{\zeta}|)\int_S^T\int_\Omega e^{\phi(x)}2F(u)\,dx\,dt. \tag{3.4.8}$$

On distingue maintenant deux cas (qui correspondent aux hypothèses du Théorème 3.2.2 : f est linéaire ou b est assez grand).

Cas 1 : f est non linéaire. On suppose que

$$R\beta<1,\quad R|\hat{\zeta}|<\min\{1-R\beta,n\}\quad\text{et}\quad b>\frac{n+R|\hat{\zeta}|}{n-R|\hat{\zeta}|}.$$

On choisit alors

$$\epsilon_0 \in]R|\hat{\zeta}|, \min\{2(1-R\beta) - R|\hat{\zeta}|, n - \frac{n + R|\hat{\zeta}|}{b}\}[,$$

ce qui implique que $\epsilon_1 > 0$ où

$$\epsilon_1 = \min\{\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|, 2 - \epsilon_0 - 2R\beta - R|\hat{\zeta}|, (n-\epsilon_0)b - n - R|\hat{\zeta}|\}.$$

Combinons (3.4.5)-(3.4.8) et notons que $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$. On obtient :

$$\epsilon_1 \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(|u'|^2 + |\nabla u|^2 + 2F(u) \Big) \, dx \, dt \leq a_1(E(S) + E(T)) \tag{3.4.9}$$

$$+ \int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} \Big(R\, |u'|^2 + \frac{\beta}{2}(n-\epsilon_0)\, |u|^2 + (n-\epsilon_0) u \partial_\nu u + \frac{R^2}{\delta} (\partial_\nu u)^2 \Big) \, d\Gamma \, dt.$$

Cas 2 : f est linéaire. Si $f(s) = \alpha s$ pour une constante $\alpha > 0$ (donc $b = 1$ dans (3.2.3)), on déduit de (3.4.8) que

$$I_4 \geq -(\epsilon_0 + R|\hat{\zeta}|) \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} 2F(u) \, dx \, dt$$

$$= (\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|) \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} 2F(u) \, dx \, dt - 2\epsilon_0 \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} 2F(u) \, dx \, dt$$

$$= (\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|) \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} 2F(u) \, dx \, dt - 2\epsilon_0 \alpha \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} |u|^2 \, dx \, dt$$

$$\geq (\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|) \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} 2F(u) \, dx \, dt - 2\epsilon_0 \alpha c_0 \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} |\nabla u|^2 \, dx \, dt$$

où c_0 est la constante définie par (3.2.2). On suppose dans ce cas-là que

$$R\beta < 1 \quad \text{et} \quad R|\hat{\zeta}| < \frac{1 - R\beta}{1 + \alpha c_0}.$$

On choisit alors $\epsilon_0 \in]R|\hat{\zeta}|, \frac{2(1-R\beta) - R|\hat{\zeta}|}{1 + 2\alpha c_0}[$, ce qui implique que $\epsilon_1 > 0$ où

$$\epsilon_1 = \min\{\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|, 2 - \epsilon_0 - 2R\beta - R|\hat{\zeta}| - 2\epsilon_0 \alpha c_0\}. \tag{3.4.10}$$

On obtient donc la même inégalité (3.4.9).

En utilisant maintenant la condition au bord sur Γ_1, on obtient dans les deux cas précédents :

$$\epsilon_1 \int_S^T E(t) \, dt \leq a_1(E(S) + E(T)) \tag{3.4.11}$$

$$+\int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big(R\,|u'|^2 + \frac{R^2}{\delta} g^2(u') + \frac{\beta}{2}(n-\epsilon_0)\,|u|^2 - (n-\epsilon_0) u g(u')\Big)\, d\Gamma\, dt.$$

En utilisant (3.4.1), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en prenant en considération les hypothèses (3.2.4), (3.2.5) (avec $r=1$) et (3.2.7) on trouve que :

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big(R|u'|^2 + \frac{R^2}{\delta} g^2(u')\Big)\, dx\, dt \le \Big(\frac{R}{c_1} + \frac{R^2}{\delta} c_2\Big) \int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} u' g(u')\, dx\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{R}{c_1} + \frac{R^2}{\delta} c_2\Big) \int_S^T \left(-E'(t) - 2\int_\Omega e^{\phi(x)} u'(h(\nabla u) + \hat{\zeta}\cdot\nabla u)\, dx\right) dt$$

$$\le \frac{1}{2}\Big(\frac{R}{c_1} + \frac{R^2}{\delta} c_2\Big)(E(S)-E(T)) + \frac{1}{2}\Big(\frac{R}{c_1} + \frac{R^2}{\delta} c_2\Big)\beta \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} \left(|u'|^2 + |\nabla u|^2\right) dx\, dt.$$

On note : $a_2 = \frac{1}{2}(\frac{R}{c_1} + \frac{R^2}{\delta} c_2)$, on déduit que

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big(R|u'|^2 + \frac{R^2}{\delta} g^2(u')\Big)\, dx\, dt \tag{3.4.12}$$

$$\le a_2(E(S) - E(T)) + \beta a_2 \int_S^T E(t)\, dt.$$

De même, on a : pour tout $\epsilon > 0$ et $\epsilon' > 0$ (où $\bar{c}$ est défini par (3.4.4)),

$$(n-\epsilon_0) \int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big(\frac{\beta}{2}|u|^2 - u g(u')\Big)\, dx\, dt$$

$$\le \frac{1}{2}(n-\epsilon_0) \int_S^T \int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{\epsilon} g^2(u') + (\beta+\epsilon)|u|^2\right) dx\, dt$$

$$\le \frac{1}{2}(n-\epsilon_0) \int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} \left(\frac{c_2}{\epsilon} u' g(u') + (\beta+\epsilon)|u|^2\right) dx\, dt$$

$$\le \frac{c_2}{2\epsilon}(n-\epsilon_0) \int_S^T \left(-\frac{1}{2}E'(t) - \int_\Omega e^{\phi(x)} u'(h(\nabla u) + \hat{\zeta}\cdot\nabla u)\, dx\right) dt$$
$$+\frac{1}{2}(\beta+\epsilon)(n-\epsilon_0)\bar{c} \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} |\nabla u|^2\, dx\, dt$$

$$\le \frac{c_2}{4\epsilon}(n-\epsilon_0)(E(S)-E(T)) + \frac{1}{2}(\beta+\epsilon)(n-\epsilon_0)\bar{c} \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} |\nabla u|^2\, dx\, dt$$
$$+\frac{c_2}{2\epsilon}(n-\epsilon_0) \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} \left(\frac{\epsilon'\beta^2}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2\epsilon'}|u'|^2\right) dx\, dt,$$

on choisit : $\epsilon = \beta\sqrt{\frac{c_2\epsilon'}{2\bar{c}}}$, $\epsilon' = \frac{1}{\beta\sqrt{2}}$ et on note :

$$a_3 = \frac{1}{2}(n-\epsilon_0)\sqrt{\frac{\bar{c}c_2}{\sqrt{2}\beta}}, \quad a_4 = (n-\epsilon_0)(\frac{\beta\bar{c}}{2} + \sqrt{\frac{\bar{c}c_2\beta}{2\sqrt{2}}}).$$

On trouve :

$$(n-\epsilon_0)\int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big(\frac{\beta}{2}|u'|^2 - ug(u')\Big)\,dx\,dt \tag{3.4.13}$$

$$\leq a_4 \int_S^T E(t)\,dt + a_3(E(S) - E(T)).$$

En combinant (3.4.11), (3.4.12) et (3.4.13) on obtient :

$$(\epsilon_1 - \beta a_2 - a_4)\int_S^T E(t)dt \tag{3.4.14}$$

$$\leq (a_1 + a_2 + a_3)E(S) + (a_1 - a_2 - a_3)E(T).$$

On suppose β assez petit de sorte que

$$\max\{\beta a_2 + a_4, \beta(a_1 - a_3) + a_4\} < \epsilon_1$$

(noter que, quand β converge vers zéro, $\beta a_2 + a_4$ et $\beta(a_1 - a_3) + a_4$ convergent vers zéro, et ϵ_1 reste strictement positif), on note :

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{\epsilon_1 - \beta a_2 - a_4}, \quad \hat{a} = \frac{a_1 - a_2 - a_3}{\epsilon_1 - \beta a_2 - a_4}$$

et on obtient (3.4.2) avec $\beta\hat{a} < 1$ d'où on déduit, d'après le Lemme 2.8, l'estimation (3.2.12).

Ceci achève la démonstration du Théorème 3.2.2 dans le cas non dissipatif ($\beta > 0$ dans (3.2.7)).

3.5. Feedback frontière : h est linéaire

Dans ce paragraphe, on montre les estimations (3.2.12) et (3.2.13) du Théorème 3.2.2 dans le cas où $h(\nabla u) = -\hat{\zeta}\cdot\nabla u$ avec $\hat{\zeta} \in \mathbb{R}^n$ (donc $\beta = 0$ dans (3.2.7)).

Dans ce paragraphe, on note par c une constante positive générique, par ϵ une constante positive générique assez petite et c_ϵ une constante positive générique dépendant de ϵ (et qui peuvent changer d'une ligne à l'autre).

Comme $h(\nabla u) = -\hat{\zeta} \cdot \nabla u$ et g est croissante, (3.4.1) implique que

$$E'(t) = -2 \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} u' g(u')\, dx \le 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{3.5.1}$$

où $\phi(x) = \hat{\zeta} \cdot x$. Ainsi, $(P3')$ est dissipatif.

On fixe $\epsilon_0 > 0$, on multiplie la première équation de $(P3')$ par :

$$E^{\frac{r-1}{2}}(t) e^{\phi(x)} \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u\Big)$$

et on intègre la formule obtenue sur $\Omega \times [S, T]$, on obtient : $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ où

$$I_1 = \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} u'' \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u\Big)\, dx\, dt,$$

$$I_2 = \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} (-\Delta u - \hat{\zeta} \cdot \nabla u) \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u\Big)\, dx\, dt,$$

$$I_3 = \int_S^T \int_\Omega E^{\frac{r-1}{2}}(t) e^{\phi(x)} f(u) \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u\Big)\, dx\, dt.$$

On estime maintenant les intégrales I_i. On a :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} u'' \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u\Big)\, dx\, dt \\
&= \Big[E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} u' \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u\Big)\, dx\Big]_S^T \\
-&\frac{r-1}{2} \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) E'(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u\Big)\, dx\, dt \\
-&\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} \int_\Omega \Big(m \cdot \nabla (u')^2 + (n - \epsilon_0) \left|u'\right|^2\Big)\, dx\, dt \\
&= \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} (\epsilon_0 + \hat{\zeta} \cdot m) \left|u'\right|^2\, dx\, dt \\
&- \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} (m \cdot \nu) \left|u'\right|^2\, d\Gamma\, dt \\
&+ \Big[E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} u' \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u\Big)\, dx\Big]_S^T \\
-&\frac{r-1}{2} \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) E'(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u\Big)\, dx\, dt.
\end{aligned}$$

Les deux derniers termes de cette égalité peuvent être majorés par $cE^{\frac{r+1}{2}}(S)$, on déduit donc (d'après (3.2.14)) :

$$I_1 \geq -cE^{\frac{r+1}{2}}(S) - R\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\left|u'\right|^2\, d\Gamma\, dt \tag{3.5.2}$$

$$+(\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|)\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}\left|u'\right|^2\, dx\, dt.$$

D'autre part, en utilisant la formule de Green (voir le paragraphe 3.4), on trouve :

$$I_2 = \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}(-\Delta u - \hat{\zeta}\cdot\nabla u)\Big(2m\cdot\nabla u + (n-\epsilon_0)u\Big)\, dx\, dt$$

$$= \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega (2 + \hat{\zeta}\cdot m - \epsilon_0)e^{\phi(x)}\left|\nabla u\right|^2\, dx\, dt$$

$$-\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_0} e^{\phi(x)}(m\cdot\nu)\left|\nabla u\right|^2\, d\Gamma\, dt$$

$$+\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big((m\cdot\nu)\left|\nabla u\right|^2 - (n-\epsilon_0)u\partial_\nu u - 2(m\cdot\nabla u)\partial_\nu u\Big)\, d\Gamma\, dt.$$

D'après la définition (3.2.15) de Γ_0 et Γ_1, on conclut que

$$I_2 \geq (2 - \epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|)\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}\left|\nabla u\right|^2\, dx\, dt \tag{3.5.3}$$

$$-\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big((n-\epsilon_0)u\partial_\nu u + \frac{R^2}{\delta}(\partial_\nu u)^2\Big)\, d\Gamma\, dt.$$

En utilisant maintenant (3.2.3) et le fait que F soit positive, on obtient :

$$I_3 = \int_S^T\int_\Omega E^{\frac{r-1}{2}}(t)e^{\phi(x)}f(u)\Big(2m\cdot\nabla u + (n-\epsilon_0)u\Big)\, dx\, dt$$

$$\geq (n-\epsilon_0)b\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}F(u)\, dx\, dt$$

$$+\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega 2e^{\phi(x)}m\cdot\nabla(F(u))\, dx\, dt$$

$$\geq \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega ((n-\epsilon_0)b - n - \hat{\zeta}\cdot m)2e^{\phi(x)}F(u)\, dx\, dt$$

$$+\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_1} 2e^{\phi(x)}(m\cdot\nu)F(u)\,d\Gamma\,dt,$$

on déduit donc, d'après (3.2.15),

$$I_3 \geq ((n-\epsilon_0)b - n - R|\hat{\zeta}|)\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega 2e^{\phi(x)}F(u)\,dx\,dt. \tag{3.5.4}$$

On distingue maintenant deux cas correspondant à la linéarité de f.

Cas 1 : f est non linéaire. On suppose que $R|\hat{\zeta}| < 1$ et $b > \frac{n+R|\hat{\zeta}|}{n-R|\hat{\zeta}|}$ et on choisit :

$$R|\hat{\zeta}| < \epsilon_0 < \min\{2 - R|\hat{\zeta}|, n - \frac{n+R|\hat{\zeta}|}{b}\},$$

ce qui implique que

$$\min\{\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|, 2-\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|, (n-\epsilon_0)b - n - R|\hat{\zeta}|\} > 0.$$

Cas 2 : f est linéaire. Si $f(s) = \alpha s$ pour une constante positive α (donc $b = 1$ dans (3.2.3)), on trouve, d'après (3.5.4) :

$$\begin{aligned}
I_3 &\geq (-\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|)\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega 2e^{\phi(x)}F(u)\,dx\,dt \\
&= (\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|)\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega 2e^{\phi(x)}F(u)\,dx\,dt \\
&\quad -2\epsilon_0\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega 2e^{\phi(x)}F(u)\,dx\,dt \\
&= (\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|)\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega 2e^{\phi(x)}F(u)\,dx\,dt \\
&\quad -2\epsilon_0\alpha\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}\,|u|^2\,dx\,dt \\
&\geq (\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|)\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega 2e^{\phi(x)}F(u)\,dx\,dt \\
&\quad -2\epsilon_0\alpha c_0\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}\,|\nabla u|^2\,dx\,dt
\end{aligned}$$

où c_0 est la constante définie par (3.2.2). On suppose dans ce cas-là que $R|\hat{\zeta}| < \frac{1}{1+\alpha c_0}$ et on prend $\epsilon_0 \in]R|\hat{\zeta}|, \frac{2-R|\hat{\zeta}|}{1+2\alpha c_0}[$. Ceci implique que

$$\min\{\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|, 2 - R|\hat{\zeta}| - (1+2\alpha c_0)\epsilon_0\} > 0.$$

En combinant (3.5.2)-(3.5.4) et en prenant en considération la condition au bord sur Γ_1, on déduit de l'égalité $I_1+I_2+I_3=0$ que

$$\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt \leq cE^{\frac{r+1}{2}}(S) \tag{3.5.5}$$

$$+c\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big(|u'|^2+g^2(u')+|ug(u')|\Big)\,d\Gamma\,dt.$$

On majore maintenant le dernier terme de (3.5.5). On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (3.4.4) on trouve :

$$\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}|ug(u')|\,d\Gamma \leq \epsilon\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}|u|^2\,d\Gamma + c_\epsilon\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}g^2(u')\,d\Gamma$$

$$\leq \epsilon E(t) + c_\epsilon\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}g^2(u')\,d\Gamma.$$

En substituant cette inégalité dans (3.5.5) et en choisissant $\epsilon>0$ assez petit, on obtient :

$$\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt \leq cE^{\frac{r+1}{2}}(S) \tag{3.5.6}$$

$$+c\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big(|u'|^2+g^2(u')\Big)\,d\Gamma\,dt.$$

On suit maintenant la méthode utilisée dans le paragraphe 3.4. On note :

$$\Gamma^+ = \{x\in\Gamma_1 : |u'|>1\} \quad \text{et} \quad \Gamma^- = \Gamma_1\setminus\Gamma^+.$$

D'après (3.2.5) et (3.5.1), on a :

$$\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Gamma^+} e^{\phi(x)}(|u'|^2+g^2(u'))\,dx\,dt$$

$$\leq cE^{\frac{r-1}{2}}(S)\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Gamma^+} e^{\phi(x)}u'g(u')\,dx\,dt$$

$$\leq c\left(E^{\frac{r+1}{2}}(S)-E^{\frac{r+1}{2}}(T)\right) \leq cE^{\frac{r+1}{2}}(S).$$

De la même manière (en utilisant l'inégalité de Young), on trouve :

$$\int_S^T\int_{\Gamma^-} E^{\frac{r-1}{2}}(t)e^{\phi(x)}(|u'|^2+g^2(u'))\,dx\,dt$$

$$\begin{aligned}
&\le c\int_S^T \int_{\Gamma^-} E^{\frac{r-1}{2}}(t)\Big(e^{\phi(x)}u'g(u')\Big)^{\frac{2}{r+1}}\,dx\,dt \\
&\le \epsilon\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt + c_\epsilon\int_S^T\int_{\Gamma^-} e^{\phi(x)}u'g(u')\,dx\,dt \\
&\le \epsilon\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt + c_\epsilon\left(E(S)-E(T)\right) \le \epsilon\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt + c_\epsilon E(S).
\end{aligned}$$

En substituant la somme de ces deux dernière inégalités dans (3.5.6) et en choisissant ϵ assez petit, on déduit que, pour tout $0 \le S \le T < \infty$,

$$\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t) \le c(E(S) + E^{\frac{r+1}{2}}(S)).$$

On en déduit, grâce à (3.5.1) et au Lemme 2.8, la stabilité exponentielle et la stabilité polynômiale de $(P3')$ (estimations (3.2.12) et (3.2.13)). Ceci achève la démonstration du Théorème 3.2.2.

4. Applications

4.1. Introduction

La méthode introduite et développée dans les paragraphes 2 et 3 est directe et très flexible; elle peut être appliquée à des problèmes non dissipatifs variés (élasticité, thermo-élasticité, systèmes couplés, coefficients variables, $\cdots$), soumis à un feedback interne ou frontière, dans le but de généraliser et d'améliorer des estimations différentes de stabilité (connues dans le cas dissipatif).

On donne ici quelques applications.

4.2. Equation générale des ondes

On considère dans ce paragraphe l'équation des ondes semi-linéaire avec des coefficients variables (dépendant de l'espace) soumises à un feedback interne

$$\begin{cases} u'' + Au + q_1(x)h(Du) + q_2(x)f(u) + q_3(x)g(u') = 0 & \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma\times\mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{4.2.1}$$

où $Au = -\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j}u)$, $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ vérifiant, pour $a_0 > 0$:

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j \ge a_0|\zeta|^2, \quad \forall x\in\Omega,\ \forall\zeta\in\mathbb{R}^n, \tag{4.2.2}$$

$q_i \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant, pour $\epsilon_0 > 0$:

$$q_2(x) \geq 0, \quad q_3(x) \geq \epsilon_0 > 0, \quad \forall x \in \Omega \tag{4.2.3}$$

et g et f vérifient respectivement les hypothèses $(H.2)$ et $(H.4)$ du paragraphe 3. La fonction $h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vérifie, pour $\beta \geq 0$ et $\phi \in W^{1,\infty}(\Omega)$:

$$\|\nabla h\|_\infty < +\infty, \quad |q_1(x)h(\zeta)+\nabla\phi(x)\cdot\zeta| \leq \beta|\zeta|, \quad \forall x \in \Omega,\ \forall \zeta \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2.4}$$

On utilise ici la notation :

$$Du = \Big(\sum_{j=1}^n a_{1j}(x)\partial_{x_j}u, \cdots, \sum_{j=1}^n a_{nj}(x)\partial_{x_j}u\Big).$$

On définit l'énergie équivalente par :

$$E(t) = \int_\Omega e^{\phi(x)}\Big(|u'|^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{x_i}u\partial_{x_j}u + 2q_2(x)F(u)\Big)\,dx \tag{4.2.5}$$

et on trouve :

$$E'(t) = -2\int_\Omega e^{\phi(x)}u'\Big(q_3(x)g(u') + q_1(x)h(Du) + \nabla\phi(x)\cdot Du\Big)\,dx.$$

En utilisant (4.2.4) et (4.2.5), on obtient :

$$E(t) \leq \lambda E(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{4.2.6}$$

où $\lambda = c\beta$ et $c > 0$ ne dépendant pas de β.

On obtient alors les résultats suivants :

1. Si $\beta = 0$, E vérifie (3.2.12) et (3.2.13).
2. Si $r = 1$ et β est assez petit, E verifie (3.2.12).

Preuve. La démonstration de ces résultats est identique à celle du Théorème 3.2.1 (paragraphe 3).

Remarque. Des résultats similaires à ceux du Théorème 3.2.2 (paragraphe 3) peuvent être aussi démontrés dans le cas d'un feedback frontière

$$\begin{cases} u'' + Au + q_1(x)h(Du) + q_2(x)f(u) = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\nu u + q_4(x)u + q_3(x)g(u') = 0 & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{4.2.7}$$

où $q_4 \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^+)$ vérifiant, pour $\epsilon_1 > 0$:

$$q_4(x) \geq \epsilon_1, \quad \forall x \in \Omega \quad \text{ou} \quad \Gamma_0 \neq \emptyset. \tag{4.2.8}$$

4.3. Equation des ondes avec un coefficient variable

Un autre exemple intéressant des systèmes distribués non dissipatifs est l'équation des ondes avec des coefficients variables (dépendant du temps). On considère ici l'exemple le plus simple suivant :

$$\begin{cases} u'' - A(t)u + bu' = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{4.3.1}$$

où $b > 0$, $A(t) = a(t)\Delta$ et $a \in C^2(\mathbb{R}^+) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)$ vérifiant, pour $a_0 > 0$ et $\lambda \geq 0$:

$$a(t) \geq a_0, \quad \forall t \geq 0, \tag{4.3.2}$$

$$a'(t) \leq \lambda a(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{4.3.3}$$

Dans un cadre plus général ($A(t)u = \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}(a_{i,j}(x,t)\partial_{x_j}u)$), j'ai démontré dans [42], sous certaines hypothèses de régularité et de petitesse sur les coefficients $a_{i,j}$, que le système (4.3.1) avec $b = 0$ est bien posé au sens des semi-groupes linéaires et qu'il est exactement contrôlable.

En appliquant les résultats du paragraphe 2, on montre dans ce paragraphe que le feedback bu' stabilise exponentiellement le système (4.3.1).

On définit l'énergie de (4.3.1) par :

$$E(t) = \int_\Omega \left(|u'|^2 + a(t)|\nabla u|^2\right) dx.$$

Grâce à (4.3.2) et (4.3.3), E vérifie :

$$E(t) \geq \min\{a_0, 1\} \int_\Omega \left(|u'|^2 + |\nabla u|^2\right) dx, \tag{4.3.4}$$

$$E'(t) = \int_\Omega \left(a'(t)|\nabla u|^2 - 2b|u'|^2\right) dx \leq \lambda E(t). \tag{4.3.5}$$

Alors on a le résultat de stabilité exponentielle suivant : soit c_0 la plus petite constante vérifiant :

$$\int_\Omega |v|^2\, dx \leq c_0 \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.3.6}$$

Si

$$\lambda < \min\{b, \frac{2\min\{a_0, 1\}}{\sqrt{c_0}}\}, \tag{4.3.7}$$

le système (4.3.1) est exponentiellement stable, c-à-d : il existe c, $\omega > 0$ tels que

$$E(t) \le ce^{-\omega t}, \quad \forall t \ge 0. \tag{4.3.8}$$

Preuve. On a, pour $0 \le S \le T < \infty$:

$$0 = \int_S^T \int_\Omega u\Big(u'' - a(t)\Delta u + bu'\Big)\,dx\,dt$$

$$= \Big[\int_\Omega (uu' + \frac{b}{2}|u|^2)\,dx\Big]_S^T + \int_S^T \int_\Omega \Big(-|u'|^2 + a(t)|\nabla u|^2\Big)\,dx\,dt$$

$$= \Big[\int_\Omega (uu' + \frac{b}{2}|u|^2)\,dx\Big]_S^T + \int_S^T E(t)\,dt - 2\int_S^T \int_\Omega |u'|^2\,dx\,dt.$$

En utilisant l'égalité de (4.3.5), on trouve :

$$\int_S^T E(t)\,dt = -\Big[\int_\Omega (uu' + \frac{b}{2}|u|^2)\,dx\Big]_S^T + \frac{1}{b}\int_S^T \Big(-E'(t) + \int_\Omega a'(t)|\nabla u|^2\,dx\Big)\,dt.$$

En utilisant (4.3.3), on trouve :

$$(1 - \frac{\lambda}{b})\int_S^T E(t)\,dt \le \frac{1}{b}(E(S) - E(T)) - \Big[\int_\Omega (uu' + \frac{b}{2}|u|^2)\,dx\Big]_S^T.$$

En utilisant maintenant (4.3.4) et (4.3.6), on obtient :

$$-\Big[\int_\Omega (uu' + \frac{b}{2}|u|^2)\,dx\Big]_S^T \le \frac{\sqrt{c_0}}{2\min\{a_0, 1\}}(E(S) + E(T)) + \frac{bc_0}{2\min\{a_0, 1\}}E(S).$$

En combinant ces deux inégalités et en utilisant (4.3.7), on trouve :

$$\int_S^T E(t)\,dt \le c_1 E(S) + c_2 E(T)$$

où $c_1 > 0$ et $c_2 = \frac{b}{b-\lambda}(\frac{\sqrt{c_0}}{2\min\{a_0,1\}} - \frac{1}{b})$. D'après (4.3.7), on a : $\lambda c_2 < 1$. Donc, en appliquant le Lemme 2.8 (pour $r = 0$), on déduit (4.3.8).

Remarque. L'estimation (4.3.8) peut être démontrée d'une façon tout à fait analogue si on rajoute à la première équation de (4.3.1) un potentiel (variable) $d(t)u$ où la fonction d vérifie certaines hypothèses de régularité et de petitesse, mais sans être forcément positive. L'estimation (4.3.8) reste aussi valable si on considère un feedback non linéaire $g(u')$ où g est une fonction donnée vérifiant l'hypothèse $(H.2)$ avec $r = 1$ (paragraphe 3). Dans les deux cas, la condition de petitesse à imposer sur λ dépendra de d et de g.

4.4. Système de Petrovsky

On considère ici le problème de stabilisation interne du système de Petrovsky semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} u'' + \Delta^2 u + q_1(x)h(\Delta u) & \\ \qquad + q_2(x)f(u) + q_3(x)g(u') = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = \partial_\nu u = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{4.4.1}$$

où g et f sont des fonctions données vérifiant respectivement $(H.2)$ et $(H.4)$ (paragraphe 3) et q_i sont des fonctions bornées vérifiant (4.2.3). On suppose ici que $h \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ vérifiant, pour un réel $\beta \geq 0$:

$$\|h'\|_\infty < +\infty, \quad |h(\zeta)| \leq \beta|\zeta|, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}. \tag{4.4.2}$$

On définit l'énergie classique E par :

$$E(t) = \int_\Omega \Big(|u'|^2 + |\Delta u|^2 + 2q_2(x)F(u) \Big)\, dx \tag{4.4.3}$$

et on trouve :

$$E'(t) = -2\int_\Omega q_3(x)u'g(u')\, dx - 2\int_\Omega q_1(x)u'h(\Delta u)\, dx. \tag{4.4.4}$$

D'après (4.2.3), (4.4.2) et (4.4.3), on a :

$$E'(t) \leq \lambda E(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{4.4.5}$$

où $\lambda = \beta\|q_1\|_\infty$.

Alors on obtient :

Si $\beta = 0$ (c-à-d : $h = 0$), E vérifie (3.2.12) et (3.2.13).

Si $r = 1$ et $\beta\|q_1\|_\infty$ est assez petit, E vérifie (3.2.12).

Preuve. La démonstration est tout à fait analogue à celle du Théorème 3.2.1 (paragraphe 3) en utilisant le multiplicateur $E^{\frac{r-1}{2}}u$ (ici $\phi = 0$).

Remarque. Il semble que l'introduction d'une énergie équivalente n'est pas possible dans le cas de (4.4.1). Pour cette raison, on a considéré l'énergie classique et imposé la condition de petitesse sur tout h (dans le cas des équations d'ordre 2 par rapport à l'espace considérées dans ce paragraphe et grâce à l'énergie équivalente, cette condition de petitesse n'est imposée que sur la partie non linéaire de h).

4.5. Système de deux équations couplées

On considère ici le système couplé de l'équation des ondes et le système de Petrovsky suivant :

$$\begin{cases} u_1'' + \Delta^2 u_1 + l_1(x)h_1(\Delta u_1) + l_2(x)f_1(u_1) & \\ +l_3(x)g_1(u_1') + a_2(x)u_2 = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_2'' - \Delta u_2 + q_1(x)h_2(\nabla u_2) + q_2(x)f_2(u_2) & \\ +q_3(x)g_2(u_2') + a_1(x)u_1 = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_2 = u_1 = \partial_\nu u_1 = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(x,0) = u_i^0(x) \quad \text{et} \quad u_i'(x,0) = u_i^1(x), & \Omega \end{cases} \tag{4.5.1}$$

où f_i, g_i et l_i sont définies respectivement comme f, g et q_i dans le paragraphe 4.2, $h_1 \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $h_2 \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ vérifiant, pour $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ et $\phi_2 \in W^{1,\infty}(\Omega)$:

$$\|h_1'\|_\infty < +\infty, \quad |h_1(\zeta)| \leq \beta_1|\zeta|, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R},$$

$$\|\nabla h_2\|_\infty < +\infty, \quad |q_1(x)h_2(\zeta) + \nabla\phi_2(x)\cdot\zeta| \leq \beta_2|\zeta|, \quad \forall x \in \Omega, \ \forall \zeta \in \mathbb{R}^n$$

et a_1 et a_2 sont deux fonctions bornées telle que

$$\sqrt{c_0 c_1}\, e^{2\|\phi_2\|_\infty}\|a_1\|_\infty < 1 \tag{4.5.2}$$

où c_0 est défini par (4.3.6) et c_1 est la plus petite constante vérifiant :

$$\int_\Omega |v|^2\,dx \leq c_1 \int_\Omega |\Delta v|^2\,dx, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

On définit maintenant l'énergie équivalente de (4.5.1) par :

$$E(t) = \int_\Omega \Big(|u_1'|^2 + |\Delta u_1|^2 + 2l_2(x)F_1(u_1)\Big)\,dx \tag{4.5.3}$$

$$+\int_\Omega e^{\phi_2(x)}\Big(|u_2'|^2 + |\nabla u_2|^2 + 2q_2(x)F_2(u_2)\Big)\,dx + 2\int_\Omega e^{\phi_2(x)}a_1(x)u_1u_2\,dx.$$

L'hypothèse (4.5.2) garantit le fait que E soit une norme pour (u_1, u_2, u_1', u_2') équivalente à la norme usuelle de

$$H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

D'autre part, l'énergie E vérifie :

$$E'(t) = -2 \int_\Omega \Big(l_3(x) u_1' g_1(u_1') + e^{\phi_2(x)} q_3(x) u_2' g_2(u_2') \Big)\, dx \tag{4.5.4}$$

$$-2 \int_\Omega \Big(l_1(x) u_1' h_1(\Delta u_1) + e^{\phi_2(x)} u_2' \Big(q_1(x) h_2(\nabla u_2) + \nabla \phi_2(x) \cdot \nabla u_2 \Big) \Big)\, dx$$

$$+2 \int_\Omega \Big(e^{\phi_2(x)} a_1(x) - a_2(x) \Big) u_1' u_2 \, dx$$

d'où, grâce aux hypothèses imposées sur les différentes fonctions,

$$E'(t) \leq \lambda E(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{4.5.5}$$

où $\lambda = c \max\{\beta_2, \beta_1 \|l_1\|_\infty, \|e^{\phi_2(x)} a_1(x) - a_2(x)\|_\infty\}$ et $c > 0$ ne dépendant pas de $\max\{\beta_2, \beta_1 \|l_1\|_\infty, \|e^{\phi_2(x)} a_1(x) - a_2(x)\|_\infty\}$.

On obtient alors les résultats de stabilité suivants :

1. Si $\beta_1 = \beta_2 = 0$ et $a_2 = a_1 e^{\phi_2}$, E satisfait (3.2.12) et (3.2.13).

2. Si $r = 1$ et $\max\{\beta_2, \beta_1 \|l_1\|_\infty, \|e^{\phi_2(x)} a_1(x) - a_2(x)\|_\infty\}$ est assez petit, E satisfait (3.2.12).

Preuve. Il suffit de multiplier la première et la deuxième équation de (4.5.1) par $E^{\frac{r-1}{2}} u_1$ et $E^{\frac{r-1}{2}} e^{\phi_2} u_2$ respectivement, d'intégrer la somme sur $[S, T] \times \Omega$ et d'utiliser les mêmes arguments que dans le paragraphe 3.3 (paragraphe 3).

Remarque. Sous des hypothèses supplémentaires similaires à celles du Théorème 3.2.2, on peut généraliser ces résultats au cas d'un feedback frontière pour l'équation des ondes, i.e. :

$$\begin{cases} u_2 = 0 & \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\nu u_2 + q_4(x) u_2 + q_3(x) g_2(u_2') & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

où q_4 est une fonction positive et bornée vérifiant (4.2.8).

On peut aussi considérer un système couplé de deux équations des ondes ou de deux équations de Petrovsky (avec même un couplage d'ordre ≤ 1 pour les ondes, et d'ordre ≤ 2 pour Petrovsky ou un couplage non linéaire comme par exemple celui que j'ai considéré dans [47]).

4.6. Système général d'élasticité

On considère l'exemple du système d'élasticité avec des coefficients $a_{ijkl}(x)$ (dépendant uniquement de l'espace) suivant :

$$\begin{cases} u_i'' - \sigma_{ij,j} + q_{1,i}(x)h_i(Du_i) & \\ \quad +q_{2,i}(x)f_i(u_i) + q_{3,i}(x)g_i(u_i') = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_i = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(x,0) = u_i^0(x) \quad \text{et} \quad u_i'(x,0) = u_i^1(x) & \Omega, \\ i = 1, \cdots, n & \end{cases} \tag{4.6.1}$$

où on utilise les mêmes notations qu'auparavant (paragraphe 4.1) avec

$$Du_i = (\sigma_{i1}, \cdots, \sigma_{in}). \tag{4.6.2}$$

Ici, pour $i = 1, \cdots, n$, f_i, g_i, $q_{1,i}$, $q_{2,i}$ et $q_{3,i}$ vérifient respectivement les mêmes hypothèses que f, g, q_1, q_2 et q_3 dans le paragraphe 4.2. On suppose que $h_i \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vérifiant, pour $\beta_i \geq 0$ et $\phi_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $i = 1, \cdots, n$:

$$\|\nabla h_i\|_\infty < +\infty, \quad |q_{1,i}(x)h_i(\zeta) + \nabla\phi_i(x) \cdot \zeta| \leq \beta_i|\zeta|, \ \forall x \in \Omega, \ \forall \zeta \in \mathbb{R}^n.$$

L'énergie équivalente définie par :

$$E(t) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n e^{\phi_i(x)} \Big(|u_i'|^2 + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + 2q_{2,i}(x)F_i(u_i)\Big)\, dx \tag{4.6.3}$$

vérifie, d'après (4.6.1) et (4.6.2) :

$$E'(t) = -2\int_\Omega \sum_{i=1}^n e^{\phi_i(x)} u_i' \Big(q_{3,i}(x)g_i(u_i') + q_{1,i}(x)h_i(Du_i) + \nabla\phi_i(x) \cdot Du_i\Big)\, dx$$

$$\leq c \max\{\beta_i\} E(t)$$

où $c > 0$ ne dépendant pas de $\max\{\beta_i\}$.

Et on trouve les résultats de stabilité suivants :

Si $\beta_i = 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$, E vérifie (3.2.12) et (3.2.13).

Si $r = 1$ et $\max\{\beta_i\}$ est assez petit, E vérifie (3.2.12).

Preuve. La démonstration est analogue à celle du Théorème 3.2.1 (paragraphe 3) en multipliant la première équation de (4.6.1) par $E^{\frac{r-1}{2}} e^{\phi_i} u_i$ et en intégrant la somme sur $[S, T] \times \Omega$.

REMARQUE. Sous certaines hypothèses géométriques sur le domaine Ω (voir [36] et ses références), ces résultats peuvent être généralisés au cas d'un feedback défini sur une partie du bord, i. e. :

$$\begin{cases} u_i = 0 & \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}\nu_j + q_{4,i}(x)u_i + q_{3,i}(x)g_i(u_i') = 0 & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{4.6.4}$$

où $q_{4,i}$ sont des fonctions positives et bornées vérifiant (4.2.8).

5. Commentaires et questions ouvertes

La méthode présentée dans dans ce papier est directe et très souple; elle peut être appliquée à différents systèmes non dissipatifs et permet d'obtenir des estimations (exponentielle et polynômiale par exemple) de stabilité à condition que les termes perturbants soient d'ordres inférieurs de sorte que la deuxième inégalité de (1.13) soit satisfaite.

Les questions ouvertes générées par les résultats de ce papier sont nombreuses et diverses. Les plus importantes sont, de notre point de vue, celles qui concernent des systèmes beaucoup plus généraux et l'optimalité de nos estimations de stabilité. On précise ici quelques unes de ces questions.

L'hypothèse la plus restrictive sous laquelle nos applications sont valables est la condition de petitesse supposée sur certains paramètres (dans l'objectif d'absorber certains termes d'ordres inférieurs gênants) ainsi que la croissance linéaire ($r = 1$) imposée sur le feedback dans le cas où l'énergie équivalente n'est pas décroissante. D'où la question ouverte : jusqu'au où peut-on affaiblir ces hypothèses et quel type d'estimations peut-on obtenir dans ce cas-là? D'autre part, nos estimations de stabilité sont, dans certains cas très particuliers, optimales. La question reste posée dans le cas général.

Il est intéressant (en particulier du point de vue des applications) de traiter un système hyperbolique plus général basé sur l'équation

$$K(x,t)u'' + A(t)u + F(x,t,u,u',A^{\frac{1}{2}}(t)u) = 0 \quad \Omega \times \mathbb{R}^+$$

où K et F sont des fonctions données et $A(t)$ est un opérateur linéaire, coercif et auto-adjoint.

D'autre part, dans le second membre de la première inégalité de (2.24) on exclut la présence du terme $E^{q+1}(T)$ avec $q \neq r$, l'obtention d'une estimation de type (3.2.12) et (3.2.13) dans une telle situation reste posée. Pour cela, il est utile de déterminer le comportement à l'infini d'une fonction positive E vérifiant, pour trois fonctions données $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et ψ, $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to$

$\mathbb{R}^+$, les inégalités suivantes (plus générales que celles de (2.24)) :

$$\begin{cases} \int_s^T \varphi(t, E(t))\, dt \leq \psi(E(s), E(T)), & \forall 0 \leq s \leq T < +\infty, \\ E'(t) \leq \lambda(t) E(t), & \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Un tel résultat permettra d'affaiblir considérablement les hypothèses imposées sur le feedback.

Dans le cas dissipatif, S. Nicaise [90] a démontré, dans un cadre général, un lien direct entre la stabilité exponentielle par un feedback linéaire et la stabilité non exponentielle par un feedback non linéaire. Un tel lien reste à démontrer dans le cas non dissipatif.

Références

[1] M. Aassila et A. Guesmia, *Strong asymptotic stability of a nonlinear non-isotropic elastodynamic system*, PanAmer Math. J., 8 (1998), 103-110.

[2] M. Aassila et A. Guesmia, *Energy decay for a damped nonlinear hyperbolic equation*, Appl. Math. Lett., 12 (1999), 49-52.

[3] F. Alabau-Boussouira, *On convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems*, Appl. Math. Optim., 51 (2005), 61-105.

[4] F. Alabau-Boussouira, *Indirect boundary stabilization of weakly coupled hyperbolic systems*, SIAM J. Cont. Optim, 41 (2002), 511-541.

[5] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik, *Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations*, J. Evol. Equa., 2 (2002), 127-150.

[6] F. Alabau-Boussouira et V. Komornik, *Boundary observability, controllability and stabilization of linear elastodynamic systems*, SIAM J. Control Optim., 37 (1999), 521-542.

[7] D. Andrade et J. E. Muñoz Rivera, *Exponential decay of non-linear wave equation with viscoelastic boundary condition*, Math. Meth. Appl. Sci., 23 (2000), 41-61.

[8] J. M. Ball, *On the asymptotic behavior of generalized process with applications to nonlinear evolution equations*, J. Diff. Equa., 27 (1978), 224-265.

[9] V. Barbu, *Analysis and control on nonlinear infinite dimensional systems*, Academic Press, New York, 1993.

[10] C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Control Optim., 30 (1992), 1024-1065.

[11] A. Beyrath, S *tabilisation indirecte interne par un feedback localement distribué de systèmes d'équations couplées*, C. R. Acad. Sci. Paris, 333 (2001), 451-456.

[12] A. Beyrath, *Indirect linear locally distributed damping of coupled systems*, Bol. Soc. Parana. Math., 22 (2004), 17-34.

[13] J. Bochenek, *An abstract semilinear first order differential equation in the hyperbolic case*, Annal. Polonici Math., 61 (1995), 13-23.

[14] J. Bochenek et T. Winiarska, *Evolution equations with parameter in the hyperbolic case*, Annal. Polonici Math., 64 (1996), 47-60.

[15] H. Brezis, *Problèmes unilatéraux*, J. Math. Pures et Appl., 51 (1972), 1-168.

[16] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North Holland, Amsterdam, 1973.

[17] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti et J. A. Soriano, *Existence and boundary stabilization of a nonlinear hyperbolic equation with time-dependent coefficients*, E. J. Diff. Equa., 08 (1998), 1-21.

[18] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti et M. L. Santos, *Uniform decay rates of solutions to a nonlinear wave equation with boundary condition of memory type*, Proceedings of 21st IFIP TC 7 Conference on System Modeling and Optimization, 2003.

[19] M. M. Cavalcanti et A. Guesmia, *General decay rates of solutions to a nonlinear wave equation with boundary condition of memoty type*, Diff. Inte. Equa., 18 (2005), 583-600.

[20] M. M. Cavalcanti, N. A. Lar'kin et J. A. Soriano, *On solvability and stability of solutions of nonlinear degenerate hyperbolic equations with boundary damping*, Funkcialaj Ekvacioj, 41 (1998), 271-289.

[21] P. G. Ciarlet, *Mathematical elasticity*, vol. 1: three dimensional elasticity, North Holland, Amsterdam, 1988.

[22] M. Ciarletta, *A differential problem for the heat equation with a boundary condition with memory*, Appl.

[23] G. Chen et H. K. Wang, *Asymptotic behavior of solutions of the one-dimensional wave equation with a nonlinear boundary stabilizier*, SIAM J. Control Optim., 27 (4) (1989), 758-775.

[24] F. Conrad et M. Pierre, *Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedback*, Ann. Inst. Henri Poincaré, 11 (1994), 485-515.

[25] F. Conrad et B. Rao, *Decay of solutions of wave equations in a starshaped domain with nonlinear boundary feedback*, Asymptotic Anal., 7 (1993), 159-177.

[26] C. M. Dafermos, *Asymptotic behavior of solutions of evolution equations, in Nonlinear Evolution Equations*, M. G. Crandall Ed., Academic Press, New York, 1978, 103-123.

[27] C. M. Dafermos et J. A. Nohel, *A nonlinear hyperbolic Volterra equation in viscoelasticity*, Amer. J. Math., Supplement (1981), 87-116.

[28] G. Duvaut et J.-L. Lions, *Les inégalités en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.

[29] M. Eller, J. E. Lagnese et S. Nicaise, *Decay rates for solutions of a Maxwell system with nonlinear boundary damping*, Computational. Appl. Math., 21 (2002), 135-165.

[30] A. Guesmia, *Stabilisation frontière d'un système d'élasticité*, C. R. Acad. Sci. Sér I. Math. Paris, 324 (1997), 1355-1360.

[31] A. Guesmia, *On linear elasticity systems with variable coefficients*, Kyushu J. Math., 52 (1998), 227-248.

[32] A. Guesmia, *On the nonlinear stabilization of the wave equation*, Annales Polonici Mathematici, 68 (1998), 191-198.

[33] A. Guesmia, *Existence globale et stabilisation interne non linéaire d'un système d'élasticité*, Portugal. Math., 55 (1998), 333-347.

[34] A. Guesmia, *Existence globale et stabilisation interne non linéaire d'un système de Petrovsky*, Bull. Belg. Math. Soc., 5 (1998), 583-594.

[35] A. Guesmia, *Observability, controllability and stabilization of some linear elasticity systems*, Acta. Sci. Math. (Szeged), 64 (1998), 109-119.

[36] A. Guesmia, *Existence globale et stabilisation frontière non linéaire d'un système d'élasticité*, Portugal. Math., 56 (1999), 361-379.

[37] A. Guesmia, *Energy decay for a damped nonlinear coupled system*, J. Math. Anal. Appl., 239 (1999), 38-48.

[38] A. Guesmia, *Stabilisation de l'équation des ondes avec conditions aux limites de type mémoire*, Afrik. Math., 10 (1999), 14-25.

[39] A. Guesmia, *Sur la stabilisation non linéaire d'un système isotropique d'élasticité*, Anna. Math. Univ. Sidi Bel Abbès, 7 (2000), 15-26.

[40] A. Guesmia, *On the decay estimates for elasticity systems with some localized dissipations*, Asymptotic Analysis, 22 (2000), 1-13.

[41] A. Guesmia, *Contributions à la contrôlabilité exacte et la stabilisation des systèmes d'évolution*, Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur (Strasbourg I), 2000.

[42] A. Guesmia, *Exact controllability for the wave equation with variable coefficients*, Israel. J. Math., 125 (2001), 83-92.

[43] A. Guesmia, *Une nouvelle approche pour la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs*, C. R. Acad. Sci. Sér I. Math. Paris, 332 (2001),

633-636.

[44] A. Guesmia, *A new approach of stabilization of nondissipative distributed systems*, SIAM J. Cont. Optim, 42 (2003), 24-52.

[45] A. Guesmia, *Nouvelles inégalités intégrales et applications à la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs*, C. R. Acad. Sci. Sér I. Math. Paris, 336 (2003), 801-804.

[46] A. Guesmia et S. Messaoudi, *Decay estimates of solutions of a nonlinearly damped semilinear wave equation*, Annal. Polonici. Math., 85.1 (2005), 25-36.

[47] A. Guesmia et S. Messaoudi, *On the boundary stabilization of a compactly coupled system of nonlinear wave equations*, Intern. J. Evolut. Equa., 1 (2005), 211-224.

[48] A. Guesmia, *Inégalités intégrales et applications à la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs*, Habilitation thesis, University of Lorraine, France, 2006.

[49] A. Haraux, *Semi-groupes linéaires et équations d'évolution linéaire périodiques*, Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique No. 78011 (1978), Université Pierre et Marie Curie, Paris.

[50] A. Haraux, *Oscillations forcées pour certains systèmes dissipatifs non linéaires*, Laboratoire d'Analyse Numérique, Prépublication No. 78010 (1978), Université Paris 7, Paris.

[51] A. Haraux, *Two remarks on dissipative hyperbolic problems*, Research Notes in Mathematics, Pitman, (1985), 161-179.

[52] A. Haraux et E. Zuazua, *Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems*, Arch. for Rational Mechanics and Analysis, 100 (1988), 191-206.

[53] M. A. Horn, *Implications of sharp trace regularity results on boundary stabilization of the system of linear elasticity*, J. Math. Anal. Appl., 223 (1998), 126-150.

[54] M. A. Horn, *Stabilization of the dynamic system of elasticity by nonlinear boundary feedback*, Internat. Ser. Numer. Math., 133 (1999), 201-210.

[55] S. Kawashima, M. Nakao et K. Ono, *On decay property of solutions to the cauchy problem of the semilinear wave equation with a dissipative term*, J. Math. Soc. Japan, 47 (1995), 617-653.

[56] M. Kirane et N. Tatar, *Non-existence results for a semilinear hyperbolic problem with boundary condition of memory type*, Journal for Analysis and Its Applications, 19 (2) (2000), 453-468.

[57] V. Komornik, *Rapid boundary stabilization of the wave equation*, SIAM J. Control and Optim., 29 (1991), 197-208.

[58] V. Komornik, *On the nonlinear boundary stabilization of the wave equation*, Chin. Annal. of Math., 14B:2 (1993), 153-164.

[59] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization. The multiplier method*, Masson-John Wiley, Paris, 1994.

[60] V. Komornik, *Decay estimates for the wave equation with internal damping*, Proc. of the conf. on Control Theory, Vorau 1993, Inter. Series Num. Anal., vol. 118, Birkhauser Verlag, Basel, 1994, 253-266.

[61] V. Komornik, *Boundary stabilization of linear elasticity systems*, Lectute Notes in Pure ans Appl. Math., 174 (1995), 135-146.

[62] V. Komornik, *Well-posedness and decay estimates for a Petrovsky system by a semi-group approach*, Acta Sci. Math. (Szeged), 60 (1995), 451-466.

[63] V. Komornik et S. Kouémou-Patcheu, *Estimations d'énergie pour un système de Petrovsky avec amortissement interne*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 319 (1994), 1185-1189.

[64] V. Komornik et B. Rao, *Boundary stabilization of compactly coupled wave eqautions*, Asymptotic Anal., 14 (1997), 339-359.

[65] V. Komornik et E. Zuazua, *A direct method for boundary stabilization of the wave equation*, J. Math. Pure. Appl., 69 (1990), 33-54.

[66] V. Komornik, *Differential and integral inequalities*, Univ. Beograd Publ. Elektrotehn Fak., Ser. Mat. 7 (1996), 55-67.

[67] J. E. Lagnese, *Note on boundary stabilization of wave equations*, SIAM J. Control Optim., 26 (1988), 1250-1257.

[68] J. E. Lagnese, *Boundary stabilization of thin plates*, SIAM Studies in Applied Math., Vol 10, SIAM 1989.

[69] J. E. Lagnese, *Uniform asymptotic energy estimates for solution of the equation of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary*, Nonlinear Anal. T.M.A., 16 (1991), 35-54.

[70] I. Lasiecka, *Stabilization of wave and plate-like equations with nonlinear dissipation on the boundary*, J. Diff. Equa., 79 (1989), 340-381.

[71] I. Lasiecka et D. Tataru, *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping*, J. Diff. Inte. Equa., 6 (1993), 507-533.

[72] I. Lasiecka et R. Triggiani, *Uniform stabilization of the wave equation with Dirichlet or Neumann feedback control without geometrical conditions*, Appl. Math. Optim., 25 (1992), 189-224.

[73] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, collection RMA, Masson, Paris, 1988.

[74] J. L. Lions, *Exact contollability, stabilizations and perturbations of distributed systems*, SIAM Rev., 30 (1988), 1-68.

[75] W. J. Liu, *Partial exact controllability and exponential stability of the higher dimensional linear thermoelasticity*, ESAIM COCV, 3 (1998), 23-48.

[76] P. Martinez, *Stabilisation de systèmes distribués semi linéaires: domaines presque étoilés et inégalités intégrales généralisées*, Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, France, 1998.

[77] P. Martinez, *A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems*, ESAIM: Control. Optim. Calcul. Varia., 4 (1999), 419-444.

[78] S. Messaoudi, *Energy decay of solutions of a semilinear wave equation*, Inter. J. Appl. Math., 9 (2000), 1037-1048.

[79] S. Messaoudi, *Decay of the solution energy for a nonlinearly damped wave equation*, Arabian. J. Sci. Eng. Sect. A Sci., 26 (2001), 63-68.

[80] M. Moussaoui, *Singularités des solutions du problème mélé, controlabilité exacte et stabilisation frontière*, ESAIM Proceedings, 1 (1996), 157-168.

[81] J. E. Muñoz Rivera, *Global solution on a quasilinear wave equation with memory*, Bolletino U.M.I., 7 (1994), 289-303.

[82] J. E. Muñoz Rivera et R. Racke, *Polynomial stability in two-dimensional magneto-elasticity*, IMA J. Appl. Math., 66 (2001), 269-283.

[83] J. E. Muñoz Rivera et R. Racke, *Global stability for damped Timoshenko systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 9 (2003), 1625-1639.

[84] J. E. Muñoz Rivera et R. Racke, *Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems, global existence and erxponential stability*, J. Math. Anal. Appl., 276 (2002), 248-278.

[85] M. Nakao, *Convergence of solutions of the wave equation with a nonlinear dissipative term to the steady state*, Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University, 30 (1976), 257-265.

[86] M. Nakao, *Decay of solutions of some nonlinear evolution equations*, J. Math. Anal. Appl., 60 (1977), 542-549.

[87] M. Nakao, *On the decay of solutions of some nonlinear dissipative wave equations in higher dimensions*, Math. Z., 193 (1986), 227-234.

[88] M. Nakao, *Remarks on the existence and uniqueness of global decaying solutions of the nonlinear dissipative wave equations*, Math Z., 206 (1991), 265-275.

[89] M. Nakao et K. Ono, *Global existence to the cauchy problem of the semilinear wave equation with a nonlinear dissipation*, Funkcialaj Ekvacioj,

38 (1995), 417-431.

[90] S. Nicaise, *Stability and controllability of an abstract evolution equation of hyperbolic type and concrete applications*, Rendiconti di Matematica, 23 (2003), 1-34.

[91] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer, New York, 1983.

[92] P. Pucci et J. Serrin, *Asymptotic stability for nonautonomous dissipative wave systems*, Comm. Pure. Appl. Math., 49 (1996), 177-216.

[93] T. Qin, *Global solvability of nonlinear wave equation with a viscoelastic boundary condition*, Chin. Ann. Math., 14B (3) (1993), 335-346.

[94] T. Qin, *Breakdown of solutions to nonlinear wave equations with a viscoelastic boundary condition*, Arab. J. Sci. Engng., 19 (2A) (1994), 195-201.

[95] R. Racke, *Lectures on nonlinear evolution equations. Initial value problems*, Aspect of Mathematics E19. Friedr. Vieweg Sohn, Braunschweig/Wiesbaden (1992).

[96] D. L. Russell, *Decay rates for weakly damped systems in Hilbert space obtained with control - theoretic methods*, J. Diff. Equa., 19 (1975), 344-370.

[97] D. L. Russell, *Controllability and stabilization theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions*, SIAM Rev., 20 (1978), 639-739.

[98] M. L. Santos, *Asymptotic behavior of solutions to wave equations with a memory condition at the boundary*, E. J. Diff. Equa., 73 (2001), 1-11.

[99] M. L. Santos, *Decay rates for solutions of a system of wave equations with memory*, E. J. Diff. Equa., 38 (2002), 1-17.

[100] L. R. Tcheugoué Tébou, *Sur la stabilisation de l'équation des ondes en dimension 2*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 319 (1994), 585-588.

[101] L. R. Tcheugoué Tébou, *On the decay estimates for the wave equation with a local degenerate or nondegenerate dissipation*, Portug. Math., 55 (1998), 293-306.

[102] R. Triggiani, *Wave equation on a bounded domain with boundary dissipation: an operator approach*, J. Math. Anal. Appl., 137 (1989), 438-461.

[103] Y. You, *Energy decay and exact controllability for the Petrovsky equation in a bounded domain*, Advances in Appl. Math., 11 (1990), 372-388.

[104] E. Zuazua, *Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems*, Asymptotic Analysis, 1 (1988), 161-185.

[105] E. Zuazua, *Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback*, SIAM J. Control Optim., 28 (1990), 466-477.

[106] E. Zuazua, *Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping*, Comm. Partial Diff. Equa., 15 (1990), 205-235.

[107] E. Zuazua, *Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping in unbounded domains*, J. Math. Pures et Appl., 70 (1991), 513-529.

[108] E. Zuazua et W. J. Liu, *Decay rates for dissipative wave equations*, Ricerche di Matematica, XLVIII (1999), 61-75.