ÉNS de Lyon
M2 FEADEP

Cours d'algèbre
2019-2020

Représentations linéaires complexes des groupes finis

Leçon directement concernée (2020)

(107)* Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Exemples.

Leçons liées, dans lesquelles on peut parler de représentations (2020)

(101) Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
(102)* Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
(103)* Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
(104) Groupes finis. Exemples et applications.
(105) Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
(151) Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension nie). Rang. Exemples et applications.
(154) Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
(155) Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
(191) : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

Ce qui est dans le programme

— Représentations d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
— Cas d'un groupe abélien.
— Orthogonalité des caractères irréductibles.
— Groupe dual.
— Transformée de Fourier. Convolution. Cas général.
— Théorème de Maschke.
— Caractères d'une représentation de dimension finie.
— Fonctions centrales sur le groupe, base orthonormée des caractères irréductibles.
— Exemples de représentations de groupes de petit cardinal.

Bibliographie

- P. Caldero et J. Germoni, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries*
- W. Fulton et J. Harris, *Representation Theory : A First Course.* Springer Science & Business Media, 1991.
  Assez complet, mais en anglais.
- G. Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier.*
  Très riche pour travailler les représentations et caractères.
- J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis.*
  Une référence très complète sur les représentations de groupes.
- F. Ulmer *Théorie des groupes.*

Dans ce polycopié, le corps de base est noté k. Pour tous les grands théorèmes, on supposera $k = \mathbb{C}$ par défaut, mais dans certains exercices, il s'agira de discuter le cas des autres corps.

Les espaces vectoriels considérés seront toujours supposés de dimension finie, et les groupes représentés sont supposés finis. On fixe un groupe fini G.

1 Représentations linéaires et résultats fondamentaux

1.1 Définitions et constructions de base

Définition 1.1.

— Une **représentation linéaire** du groupe G sur un k-espace vectoriel V est, de manière équivalente :
  (i) une action à gauche de G sur V par applications linéaires ;
  (ii) un morphisme $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$.

  On note ainsi (V, ρ) une représentation de G, très souvent notée V lorsqu'on souhaite rendre implicite le morphisme ρ. Sa **dimension** est la dimension de V.

— Si V est une représentation de G et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V, on dit que W est une **sous-représentation** de V si l'action de G laisse stable W. On définit alors l'action de G sur W par restriction.

— Une représentation V de G est **irréductible** si $V \neq \{0\}$ et il n'existe pas de sous-représentation $W \subset V$ différente de $\{0\}$ et V.

— Une représentation **complexe** de G est une représentation $\mathbb{C}$-linéaire de G.

— La **représentation triviale** de G est la représentation sur $V = k$ pour laquelle tout élément de G agit comme l'identité.

Exemple 1.2. (exercice) Soit $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes. Alors χ induit une représentation $D_\chi = (\mathbb{C}, \rho_\chi)$ de G de dimension 1, où $\rho_\chi(g)(x) = \chi(g).x$ pour tous $g \in G$, $x \in \mathbb{C}$. Réciproquement, si $(\mathbb{C}, \rho)$ est une représentation de dimension 1 de G, il existe un morphisme $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ tel que $\rho = \rho_\chi$.

Exemple 1.3. Le groupe fini $G = \mathfrak{S}_3$ admet, entre autres, les représentations complexes suivantes :

(1) la représentation triviale : $\rho_{\mathrm{triv}} : \mathfrak{S}_3 \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ donnée par $\sigma \mapsto \mathrm{id}_{\mathbb{C}} = 1$;

(2) la signature : $\sigma \in \mathfrak{S}_3 \mapsto \varepsilon(\sigma) \in \mathbb{C}^*$;

(3) les isométries du triangle équilatéral : si $\mathcal{T}$ est un triangle équilatéral de $\mathbb{C}^2$ dont le centre est $0 \in \mathbb{C}^2$, on fait agir $\mathfrak{S}_3$ sur les sommets de $\mathcal{T}$. L'action est fidèle et transitive, et chaque permutation des sommets de $\mathcal{T}$ s'étend en une isométrie linéaire de $\mathbb{C}^2$ qui est, en particulier, un élément de $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^2)$. Ceci définit donc une représentation linéaire complexe, qui est fidèle et de dimension 2. Elle est, de plus, irréductible car aucune droite de $\mathbb{C}^2$ n'est globalement stabilisée par les isométries de $\mathcal{T}$.

À isomorphisme près (voir plus loin pour la définition d'isomorphisme de représentations), ce sont les seules représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_3$ (on peut le montrer de façon très élémentaire ou alors en utilisant la théorie des caractères).

Définition 1.4.

— Une **application G-linéaire** (ou **G-équivariante**) entre deux représentations (ρ_V, V) et (ρ_W, W) de G est une application k-linéaire φ telle que :

$$\forall g \in G,\ \forall v \in V,\ \varphi(g \cdot v) = g \cdot \varphi(v) \qquad \text{ou encore} \qquad \forall g \in G,\ \varphi \circ \rho_V(g) = \rho_W(g) \circ \varphi.$$

— On note $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ le k-espace vectoriel des applications G-linéaires de V dans W.

— Deux représentations V et W de G sont dites **isomorphes** s'il existe un isomorphisme G-équivariant entre V et W. Ceci définit une relation d'équivalence sur les représentations de G.

— On note $\mathrm{Irr}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations complexes irréductibles de G. Par abus de notation, on verra parfois les éléments $\mathrm{Irr}(G)$ comme des représentations de G (et non comme des classes d'isomorphismes de représentation).

Exercice 1. —

1. Trouver des représentations des groupes cycliques (voire abéliens) et diédraux.
2. Trouver certaines d'entre elles qui sont irréductibles. Que penser du cas des groupes abéliens ?

3. Si G agit sur un ensemble fini X, considérons formellement une famille $(e_x)_{x\in X}$ et l'espace vectoriel $V = \oplus_{x\in X} k \cdot e_x$. Donner une structure de représentation de G sur V. Quelle forme ont les matrices des éléments de G dans la base canonique ?

La définition suivante établit toutes les constructions de base pour les représentations.

Proposition-définition 1.5 (Construction de (sous-)représentations à partir de représentations données)**.** Soient V, W des représentations d'un groupe fini G.

1. On note $V^G = \{x \in V,\ \forall g \in G\ g \cdot v = v\}$ l'ensemble des éléments de V invariants sous l'action de G. C'est une sous-représentation de V sur laquelle G agit trivialement.
2. Soit $X \subset V$. Alors $\mathrm{vect}(G.X)$ est une sous-représentation de V. Lorsque V est irréductible, $\mathrm{vect}(G.v) = V$, pour tout $v \in V \setminus \{0\}$.
3. Si $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$, alors le noyau de φ est alors naturellement une sous-représentation de V.
4. Si $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$, alors l'image de φ est alors naturellement une sous-représentation de W.
5. On définit la **représentation duale** V^* par :
$$\forall g \in G,\ \forall \lambda \in V^*,\ \forall v \in V,\ \rho_{V^*}(g)(\lambda) = \left(v \mapsto \lambda\left(g^{-1} \cdot v\right)\right) = \lambda \circ \rho_V\left(g^{-1}\right)$$
6. On définit la **représentation somme** $V \oplus W$ par :
$$\forall g \in G,\ \forall (v, w) \in V \times W,\ \rho_{V\oplus W}(g)(v, w) = (\rho_V(g)(v), \rho_W(g)(w)) .$$
7. On définit la **représentation produit** $V \otimes W$ par :
$$\forall g \in G,\ \forall (v, w) \in V \times W,\ \rho_{V\otimes W}(g)(v \otimes w) = \rho_V(g)(v) \otimes \rho_W(g)(w) = (g \cdot v) \otimes (g \cdot w)$$
sur les tenseurs simples, que l'on étend par bilinéarité.
8. On définit la **représentation des morphismes** $\mathcal{L}(V, W)$ par :
$$\forall g \in G,\ \forall f \in \mathcal{L}(V, W),\ \rho_{\mathcal{L}(V,W)}(g)(f) = \left(v \in V \mapsto g \cdot f\left(g^{-1} \cdot v\right) \in W\right) = \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1}).$$

Remarque 1.6. On a $\mathcal{L}(V, W)^G = \mathrm{Hom}_G(V, W)$.

Exercice 2. — Vérifier que les formules ci-dessus définissent bien des représentations de G.

L'exemple suivant est fondamental pour la suite.

Définition 1.7 (Représentation régulière)**.**
Soit G un groupe fini. La **représentation régulière** de G, notée $(\rho_{\text{rég}}, R_G)$, est, de manière équivalente (exercice) :
- La représentation associée à l'action par translation à gauche de G sur lui-même (voir exercice 1).
- L'espace vectoriel $R_G = k^G$ muni de l'action de G définie par :
$$\forall f \in k^G,\ \forall g, h \in G,\ (g \cdot f)(h) = f(g^{-1}h).$$

1.2 Théorèmes fondamentaux

Lemme 1.8. *Soit V une représentation de G. Alors il existe un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur V invariant sous l'action de G.*

Démonstration. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ un produit scalaire (quelconque) sur V. On définit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur V par :
$$\langle v, v'\rangle = \sum_{g\in G} \langle g.v, g.v'\rangle_0, \forall v, v' \in V.$$
Alors $\langle\cdot,\cdot\rangle$ convient. $\square$

Lemme 1.9. *(exercice) Soit V une représentation de G. On munit V d'un produit scalaire G-invariant. Si $V' \subset V$ est une sous-representation de V, alors $V'^{\perp}$ est une sous-representation de V.*

Théorème 1.10 (Théorème de Maschke)**.**
Soit G un groupe fini. Toute représentation complexe de G se décompose en somme directe de sous-représentations irréductibles.

Démonstration. C'est une conséquence des lemmes 1.8 et 1.9. □

Exercice 3. — Montrer que ce théorème n'est pas vrai pour le corps de base $k = \mathbb{F}_p$ et le groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_p)$ agissant naturellement sur $\mathbb{F}_p^2$.

Une question importante se pose maintenant, comme d'habitude : cette décomposition en irréductibles est-elle unique ?

Remarque 1.11. Considérons $V = k^n$ sur lequel G agit trivialement. Toutes les droites de V sont des sous-représentations irréductibles de G, et on peut écrire V comme somme directe de droites de plusieurs manières différente. On montrera à l'aide de la théorie des caractères, (voir proposition 2.9) qu'en considérant les sous-représentations qui apparaissent à isomorphisme près, il y a unicité . On pourrait en fait (exercice) montrer cette unicité en utilisant le lemme de Schur ci-dessous.

Théorème 1.12 (Lemme de Schur)**.**
Soient V et W des représentations complexes irréductibles et $\varphi : V \to W$ une application G-linéaire.
(1) Soit φ est un isomorphisme, soit $\varphi = 0$.
(2) De plus, si $V = W$, alors $\varphi = \lambda \,\mathrm{id}_V$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.

Démonstration. (1) Soit $\varphi : V \to W$ une application G-linéaire. Alors, comme dit plus haut, $\ker\varphi$ et $\mathrm{im}\,\varphi$ sont des sous-représentations, donc par irréductibilité $\ker\varphi = 0$ ou V et $\mathrm{im}\,\varphi = 0$ ou W. Les deux seuls cas compatibles sont $\varphi = 0$ ou $\ker\varphi = 0$ et $\mathrm{im}\,\varphi = W$, c'est-à-dire que φ est un isomorphisme.

(2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de φ. Alors, $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V$ a un noyau non trivial, donc $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V = 0$. □

Exercice 4. — Pour quels corps k, le point (1) est-il valable ? Donner une condition suffisante sur le corps k pour que le point (2) soit valable.

Exercice 5. — Soient (V, ρ) une représentation irréductible de G et $g \in \mathcal{Z}(G)$, où $\mathcal{Z}(G)$ est le centre de G.

1. Soit $g \in \mathcal{Z}(G)$. Montrer que $\rho(g)$ est une homothétie.

2. Montrer que si V est fidèle (i.e si ρ est injective), alors $\mathcal{Z}(G)$ est cyclique.

Corollaire 1.13. *(exercice) Soit V une représentation de G. On écrit $V = \bigoplus_{i=1}^r W_i^{n_i}$, où pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, W_i est une représentation irréductible de G et pour tous $i \neq j$, $W_i \not\simeq W_j$. Montrer que* $\mathrm{End}_G(V) \simeq \displaystyle\prod_{i=1}^r \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$.

Exercice 6. —[Représentation standard de $\mathfrak{S}_n$]

Considérons le groupe de permutations $\mathfrak{S}_n$ et $V = \mathbb{C}^n$ muni de l'action de $\mathfrak{S}_n$ définie par permutation des coordonnées, c'est-à-dire $\sigma \cdot (x_1, \cdots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$.

1. Montrer que ceci définit bien une représentation linéaire de $\mathfrak{S}_n$.
2. Trouver une droite D et un hyperplan H qui sont des sous-représentations de V telles que $V = D \oplus H$.
3. Montrer que H est irréductible (on peut le faire directement ou en utilisant l'exercice 23).

On appelle H muni de cette action la **représentation standard de** $\mathfrak{S}_n$.

1.3 Représentations complexes des groupes abéliens finis

Tout d'abord, observons le fait suivant pour un groupe fini, non nécessairement abélien.

Lemme 1.14. *Soit (ρ, V) une représentation d'un groupe fini G d'ordre n. Alors, pour tout $g \in G$, l'endomorphisme $\rho(g)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines n-èmes de l'unité.*

Démonstration. Par le théorème de Lagrange, l'ordre de g divise n. L'endomorphisme $\rho(g)$ est donc annulé par le polynôme $X^n - 1$ qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$. Il est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de $X^n - 1$. □

On note $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères linéaires de G (i.e l'ensemble des morphismes de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$). Ce groupe est appelé le **groupe dual** de G. Pour $\chi \in \widehat{G}$, on définit une représentation $D_\chi = (\mathbb{C}, \rho_\chi)$ par $\rho_\chi(g)(x) = \chi(g).x$ si $g \in G$ et $x \in \mathbb{C}$.

Proposition 1.15. *Soit G un groupe abélien fini.*

Toute représentation complexe irréductible de G est de dimension 1.

Plus précisément, l'application de $\widehat{G}$ dans $\mathrm{Irr}(G)$ *envoyant chaque $\chi \in \widehat{G}$ sur la classe de D_χ est une bijection.*

Démonstration. Tout d'abord, n'importe quelle représentation de dimension 1 d'un groupe est irréductible, car elle n'admet déjà pas de sous-espace vectoriel strict non trivial. Il s'agit donc seulement de prouver que toutes les représentations irréductibles de G sont de dimension 1 lorsque G est abélien.

Soit (V, ρ) une représentation de G. Comme G est abélien, les endomorphismes $\rho(g)$ pour $g \in G$ commutent deux à deux. Comme ils sont diagonalisables par le lemme 1.14, ils sont codiagonalisables. Il existe donc une base de diagonalisation $(e_1, \cdots, e_k)$ commune à tous les $\rho(g)$, et chaque droite $\mathbb{C} \cdot e_i$ est une sous-représentation de V. Ainsi, si V est irréductible, ce doit être une droite.

On vérifie (exercice) que toute représentation irréductible de G est isomorphe à un D_χ pour $\chi \in \widehat{G}$.

Soient $\chi, \chi' \in \widehat{G}$ tels qu'il existe un isomorphisme de représentations $\varphi : D_\chi \to D_{\chi'}$. Comme $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on peut supposer que $\varphi = \mathrm{Id}$. On a alors pour tous $g \in G$ et $x \in \mathbb{C}$:

$$\varphi(\rho_\chi(g).x) = \chi(g).x = \rho_{\chi'}(g).\varphi(x) = \chi'(g).x,$$

car φ est un G-morphisme. On a donc $\chi = \chi'$, ce qui conclut la preuve de la proposition. $\square$

2 Caractères, fonctions centrales et tables

Ici, encore une fois, on fixe $\mathbb{C}$ comme corps de base, mais beaucoup de résultats seraient valables en plus grande généralité.

Définition 2.1 (Caractère d'une représentation)**.**

Soit (V, ρ) une représentation complexe de G. On appelle **caractère de** V, souvent noté χ_V, la fonction $\chi_V : G \to \mathbb{C}$ définie pour tout $g \in G$ par $\chi_V(g) := \mathrm{Tr}\,\rho(g)$.

Remarque 2.2. Attention : ce caractère, contrairement aux caractères linéaires mentionnés plus haut, n'a aucune raison d'être un morphisme de groupes en général !

Remarquer aussi que le caractère de la représentation triviale est la fonction toujours égale à 1 sur G, on la notera souvent **1**.

Exercice 7. — Montrer que lorsque V est de dimension 1, le caractère χ_V définit bien un morphisme de groupes $G \to \mathbb{C}^*$. Dans ce cas et ce cas seulement, on parle de **caractère linéaire** ou de **caractère abélien**.

Exercice 8. — Vérifier que lorsque deux représentations de G sont isomorphes, elles ont le même caractère.

2.1 Propriétés de base des caractères

Définition 2.3 (Fonctions centrales)**.**

Pour tout groupe fini G, on appelle **fonction centrale sur** G toute fonction $f : G \to \mathbb{C}$ telle que pour tous $g, h \in G$, on a $f(ghg^{-1}) = f(h)$, autrement dit toute fonction $f : G \to \mathbb{C}$ constante sur les classes de conjugaison.

On notera $\mathcal{C}(G)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions centrales sur G, de dimension $c(G)$ égale au nombre de classes de conjugaison de G.

Remarque 2.4. On définit ces fonctions car tout caractère de représentation est une fonction centrale : en effet, si (V, ρ) est une représentation de G, on a

$$\chi_V(ghg^{-1}) = \mathrm{Tr}\,\rho(ghg^{-1}) = \mathrm{Tr}\,\rho(g)\rho(h)\rho(g)^{-1} = \mathrm{Tr}\,\rho(h) = \chi_V(h).$$

Proposition 2.5. *Pour toutes représentations V et W de G, on a :*

$$\begin{aligned}
\chi_{V\oplus W} &= \chi_V + \chi_W \\
\chi_{V\otimes W} &= \chi_V \cdot \chi_W \\
\chi_{\mathcal{L}(V,W)} &= \overline{\chi_V} \cdot \chi_W \\
\chi_{V^*} &= \overline{\chi_V} \\
\chi_V(e) &= \dim V.
\end{aligned}$$

Démonstration. Pour la somme directe, c'est immédiat (trace des matrices diagonales par blocs), le cas V^* est un cas particulier de $\mathrm{Hom}(V, W)$ appliqué à W la représentation triviale (de caractère $\mathbf{1}$), et on peut démontrer le résultat pour le produit tensoriel en utilisant le G-isomorphisme canonique entre $V \otimes W$ et $\mathrm{Hom}(V^*, W)$.

Il reste donc seulement à trouver la formule pour $\mathcal{L}(V, W)$. Soit $g \in G$. Comme $\rho_V(g)$ et $\rho_W(g)$ sont diagonalisables, d'après le lemme 1.14, on choisit $(e_1, \cdots, e_m)$ une base de vecteurs propres de l'action de g sur V, et $(f_1, \cdots, f_n)$ une base de vecteurs propres de l'action de g sur W, et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$, $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ les valeurs propres associées, de sorte que

$$\forall i \in [\![1, m]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!],\ g \cdot e_i = \lambda_i e_i \quad \text{ et } \quad g \cdot f_j = \mu_j f_j.$$

Définissons alors, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, tout $j \in [\![1, n]\!]$, l'endomorphisme $\varphi_{i,j} \in \mathcal{L}(V, W)$ qui envoie e_i sur f_j et est nul sur le reste de la base. Ces morphismes forment clairement une base de $\mathrm{Hom}(V, W)$, étudions-y la trace de l'action de g. Pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, on a :

$$(g \cdot \varphi_{i,j})(e_k) = g \cdot \big(\varphi_{i,j}(g^{-1} \cdot e_k)\big) = g \cdot \big(\lambda_k^{-1} \varphi_{i,j}(e_k)\big).$$

Si $i \neq k$, ceci donne 0 et si $i = k$, on a alors $g \cdot (\lambda_i^{-1} f_j) = \lambda_i^{-1} \mu_j f_j$. Nous venons donc de montrer que pour tous i, j, on a :

$$g \cdot \varphi_{i,j} = \lambda_i^{-1} \mu_j \varphi_{i,j},$$

ainsi la base construite est diagonale pour l'action de g, et

$$\chi_{\mathcal{L}(V,W)}(g) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^{-1} \mu_j = \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g).$$

En effet, les valeurs propres sont toutes des racines de l'unité, d'après le lemme 1.14, donc égales à l'inverse de leur conjuguée, de sorte que

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{-1} = \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} = \overline{\chi_V(g)}.$$

Enfin, la formule pour $\chi_V(e)$ est immédiate vu la trace de la matrice identité. □

Exercice 9. —

Soit G agissant sur un ensemble fini X et V la représentation linéaire associée à cette action.

1. Calculer χ_V en fonction des points fixes de X par les éléments de G.
2. En déduire :
   (a) Le caractère associé à la représentation standard de $\mathfrak{S}_n$
   (b) Le caractère associé à la représentation régulière de G.

Exercice 10. —

1. Dans le cas d'un sous-corps de $\mathbb{C}$, les formules pour les caractères sont-elles toujours vraies ?

2.2 Résultats fondamentaux et relations entre caractères

Le grand thème de cette section est qu'une représentation est entièrement déterminée pas son caractère.

Proposition 2.6. *Soit (ρ, V) une représentation complexe de G. Définissons $\varphi = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{g \in G} \rho(g) \in \mathrm{End}(V)$.*

Alors φ est en fait un projecteur de V sur V^G et, par conséquent, on a :

$$\dim V^G = \mathrm{Tr}(\varphi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g).$$

Démonstration. Il est évident que φ est égal à l'identité sur V^G (car chaque $\rho(g)$ y agit comme l'identité par définition de ce sous-espace). Vérifions que l'image de φ est incluse dans V^G. Pour tout $v \in V$, tout $h \in G$, on a :

$$h \cdot (\varphi(v)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h \cdot (g \cdot v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in h.G} g' \cdot v = \varphi(v)$$

On en déduit que $\varphi^2 = \varphi$ et que l'image de φ est V^G. C'est donc bien un projecteur de V sur V^G. Pour les projecteurs, on sait que leur rang est égal à leur trace, d'où le résultat. □

Exercice 11. —(cf XIII.1.7 de Caldero-Germoni)
Soit k un corps de caractéristique nulle ou ne divisant pas G. S'inspirer de la proposition 2.6 pour généraliser le théorème de Maschke à toute k-représentation de dimension finie.

On a maintenant suffisamment de résultats préliminaires pour établir les premières relations non triviales entre caractères, qui seront numérotées, mais pas dans l'ordre d'obtention (le but étant que la numérotation finale reflète le plus clairement l'ordre d'utilisation en pratique).

Définition 2.7. Soit G un groupe fini. On munit $\mathcal{C}(G)$ du produit scalaire hermitien $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$ défini par :

$$\forall f, f' \in \mathcal{C}(G), \langle f, f'\rangle_G := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{f(g)}f'(g).$$

Lemme 2.8. *La famille $(\chi_V)_{V\in\mathrm{Irr}(G)}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{C}(G)$.*

Démonstration. Soient $V, W \in \mathrm{Irr}(G)$. On rappelle que $\mathcal{L}(V,W)^G = \mathrm{Hom}_G(V,W)$. Par la proposition 2.5 on a donc :

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V,W) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathcal{L}(V,W)}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi}_V(g)\chi_W(g).$$

On conclut avec le lemme de Schur. □

On en déduit que $|\mathrm{Irr}(G)| \leq \dim \mathcal{C}(G) < \infty$ et que l'application qui va de $\mathrm{Irr}(G)$ dans l'ensemble des caractères irréductible est une bijection. On écrit $\mathrm{Irr}(G) = \{W_1, \dots, W_r\}$, avec $r = |\mathrm{Irr}(G)|$.

Proposition 2.9. *(exercice) Soit V une représentation de G. Par le théorème de Maschke, il existe $(n_i) \in \mathbb{N}^r$ tel que $V \simeq \bigoplus_{i\in[\![1,r]\!]} W_i^{n_i}$. On a alors $\chi_V = \sum_{i\in[\![1,r]\!]} n_i\chi_{W_i}$. Alors $n_i = \langle\chi_V, \chi_{W_i}\rangle$, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$. En particulier, la famille $(n_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ est unique et V est irréductible si et seulement si $|\chi_V|^2 = 1$ $(= \langle\chi_V, \chi_V\rangle)$.*

Nous avons donc, grâce aux caractères, une manière explicite de décomposer une représentation en irréductibles, pour peu qu'on connaisse la liste (finie) de celles-ci et leurs caractères.

Un autre miracle se produit alors, qui nous permet de donner des relations entre les caractères de représentations irréductibles, résumées dans la proposition suivante.

Proposition 2.10. *Soit R_G la représentation régulière de G (définie en première partie), de caractère noté χ_{R_G}. Alors :*

1. *Pour tout $g \in G$, on a $\chi_{R_G}(g) = \left\{\begin{array}{ll} |G| & \text{si } g = 1, \\ 0 & \text{sinon.}\end{array}\right.$.*
2. *On a $R_G \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} W_i^{\dim W_i}$, autrement dit chaque représentation irréductible apparait exactement autant de fois que sa dimension dans la décomposition de la représentation régulière.*
3. *En particulier, on a*

$$(R_1) : \sum_{i=1}^{r}\dim(W_i)^2 = |G| \qquad \text{et } (R_5) : \sum_{i=1}^{r}\dim W_i\cdot\chi_{W_i}(g) = 0 \ \forall g \in G\setminus\{1\}.$$

.

Démonstration. 1. : C'est évident pour $g = 1$, et sinon chaque élément non trivial de G induit une translation de la base canonique (donc sans point fixe), de sorte que les coefficients diagonaux de $\rho(g)$ dans cette base sont tous nuls, la trace est donc nulle.

2. : La formule de 1. donne $\langle\chi_{R_G}, \chi_{W_i}\rangle_G = \frac{1}{|G|}|G|\chi_{W_i}(e) = \dim W_i$, et le reste découle de la proposition précédente.

3. : D'après la proposition 2.5, on a $\chi_{R_G} = \sum_{i=1}^{r}(\dim W_i)\chi_{W_i}$ et on conclut en évaluant en 1 et en $g \in G\setminus\{1\}$. □

On a donc établi un certain nombre de relations (linéaires ou quadratiques, essentiellement) entre les caractères des représentations irréductibles, mais il reste à comprendre combien on en a au juste. C'est le dernier grand résultat théorique de cette section, dû à Frobenius.

Théorème 2.11 (Frobenius)**.** *La famille $(\chi_V)_{V \in \mathrm{Irr}(G)}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(G)$. En particulier $|\mathrm{Irr}(G)| = c(G)$, où $c(G)$ est le nombre de classes de conjugaison de G.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}' = \mathrm{vect}\big(\chi_V, V \in \mathrm{Irr}(G)\big)$. Par le lemme 2.8, il suffit de montrer $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(G)$. On va montrer que $\mathcal{C}'^{\perp} = \{0\}$.

Soit $f \in \mathcal{C}'^{\perp}$. Soit (ρ, V) une représentation de G. Soit $\varphi_{V,f} := \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho(g) \in \mathcal{L}(V, V)$.

Montrons que $\varphi_{V,f}$ est G-équivariant. Soient $g, h \in G$ et $x \in V$. Alors (pour l'action habituelle de G sur $\mathcal{L}(V, V)$),

$$(h \cdot \rho(g))(x) = h.\rho(g)(h^{-1}.x) = \rho(h) \circ \rho(g) \circ \rho(h^{-1}).x = \rho(hgh^{-1}).x,$$

donc $h.\rho(g) = \rho(hgh^{-1})$. On a donc

$$h \cdot \varphi_{V,f} = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho(hgh^{-1}) = \sum_{g' \in G} \overline{f(h^{-1}g'h)} \rho(g') = \sum_{g' \in G} \overline{f(g')} \rho(g') = \varphi_{V,f}.$$

Supposons V irréductible. Par le lemme de Schur, $\varphi_{V,f}$ est une homothérie, de rapport $\frac{\mathrm{tr}(\varphi_{V,f})}{\dim V}$. Par hypothèse sur f, $\frac{\mathrm{tr}(\varphi_{V,f})}{\dim V} = \dfrac{1}{\dim V} \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \chi_V(g) = 0$. Lorsque $V = R_G$ est la représentation régulière, l'endomorphisme $\varphi_{V,f}$ se décompose sur chaque copie de W_i comme une homothétie indiquée ci-dessus, donc $\varphi_{R_G,f} = 0$. En particulier, si $(e_g)_{g \in G}$ est la base canonique de R_G, on a $\varphi_{V,f}(e_1) = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} e_g = 0$, donc $f = 0$. □

Exercice 12. — On suppose que toutes les représentations irréductibles de G sont de dimension 1. Montrer que G est abélien.

Soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des caractères de représentations irréductibles de G ($\mathfrak{X} = \{\chi_{W_i} |\ i \in [\![1, r]\!]\}$) et $\mathfrak{C}$ l'ensemble des classes de conjugaison de G.

Les conséquences du théorème de Frobenius vont nous donner des relations utiles entre caractères irréductibles.

Proposition 2.12. *Pour tout $g \in G$, on note $c(g)$ la classe de conjugaison de g. Alors, on a :*

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{X}} |\chi(g)|^2 = \frac{|G|}{|c(g)|}. \qquad (R3)$$

De plus, si $g, h \in G$ ne sont pas conjugués, on a :

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{X}} \overline{\chi(g)} \chi(h) = 0. \qquad (R2)$$

Démonstration. Comme les caractères sont des fonctions centrales, pour toute classe de conjugaison C de G, chaque χ est constant sur C et on note $\chi(C)$ sa valeur sur ses éléments. Considérons la matrice

$$\left(\chi(C) \sqrt{\frac{|C|}{|G|}} \right)_{\chi \in \mathfrak{X},\ C \in \mathfrak{C}}.$$

Le théorème de Frobenius nous dit que c'est une matrice carrée et, par orthonormalité des caractères irréductibles, on sait que ses lignes sont orthonormales. En effet, pour V, V' irréductibles non isomorphes, on a :

$$\sum_{C \in \mathfrak{C}} |\chi_V(C)|^2 \frac{|C|}{|G|} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi_V(g)|^2 = \langle \chi_V, \chi_V \rangle_G = 1$$

et, de même, on a :

$$\sum_{C \in \mathfrak{C}} \overline{\chi_V(C)} \chi_{V'}(C) \frac{|C|}{|G|} = 0.$$

Une matrice complexe carrée dont les lignes sont orthonormales est automatiquement unitaire. Donc ses colonnes sont également orthonormales ! En écrivant l'orthonormalité des colonnes, on obtient directement les deux relations $(R2)$ et $(R3)$. □

2.3 Bilan des relations et tables de caractères

Soit G un groupe fini. On note $\mathcal{X}$ l'ensemble des caractères de représentations irréductibles et $\mathfrak{C}$ l'ensemble des classes de conjugaison de G.

Pour bien comprendre les représentations de G, on se donne pour objectif d'écrire sa **table des caractères**. C'est le tableau de toutes les valeurs de $\chi(C)$, où χ parcourt $\mathfrak{X}$ et C parcourt $\mathfrak{C}$. Pour la présenter, on met dans la première ligne des représentants des classes de conjugaison, et leur cardinal, et dans la première colonne les caractères de représentations irréductibles. Tout le travail précédent nous donne alors les relations suivantes :

($R0$) Il y a autant de lignes que de colonnes.

($R1$) La somme des carrés des dimensions des représentations irréductibles est $|G|$, autrement dit

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}} \chi(1)^2 = |G|.$$

($R2$) Pour C, C' deux classes de conjugaison distinctes,

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}} \overline{\chi(C)}\chi(C') = 0,$$

autrement dit les colonnes de la table des caractères sont orthogonales.

($R3$) Pour toute classe de conjugaison C,

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}} |\chi(C)|^2 = \frac{|G|}{|C|},$$

autrement dit on connaît chaque norme de colonne de la table (ce n'est pas forcément 1).

($R4$) Pour deux caractères χ, χ' distincts,

$$\sum_{C\in\mathfrak{C}} |C|\overline{\chi(C)}\chi'(C) = 0,$$

autrement dit les lignes de la table des caractères sont orthogonales **avec pondération suivant les classes**.

($R5$) Pour un caractère χ de X,

$$\sum_{C\in\mathfrak{C}} |C||\chi(C)|^2 = |G|,$$

donc on connaît la norme de chaque ligne.

On utilise aussi la proposition suivante :

Proposition 2.13. *(exercice) Soient (V,ρ) une représentation de G et $\chi \in \widehat{G}$. Alors $(V,\chi.\rho)$ est une représentation de G, appelée **représentation tordue de ρ par χ**. Si de plus V est irréductible, alors $(V,\chi.\rho)$ est irréductible.*

La proposition ci-dessus peut permettre de déterminer des lignes ou de compléter des parties de lignes de la table de caractère. En effet, soient (V,ρ) une représentation irréductible de G et $\chi \in \widehat{G}$. Si l'on sait que $(V,\chi.\rho)$ est isomorphe à (V,ρ) (par exemple s'il n'y a qu'une représentation irréductible de dimension $\dim V$), alors pour tout $c \in \mathfrak{C}$ tel que $\chi(c) \neq 1$ on a $\chi_V(c) = 0$. Si $(V,\chi.\rho)$ n'est pas isomorphe à (V,ρ) (par exemple si l'on connait un $c \in \mathfrak{C}$ tel que $\chi(c) \neq 1$ et $\chi_V(c) \neq 0$), alors cela permet de rajouter une ligne à la table des caractères.

Exercice 13. — Ecrire les tables de caractères des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 14. — Retrouver les tables de caractères de ces quelques petits groupes de permutation.

$\mathfrak{S}_3$	1 1	3 $(1\,2)$	2 $(1\,2\,3)$
1	1	1	1
ε	1	-1	1
χ_{std}	2	0	-1

$\mathfrak{A}_4$	1 1	4 (1 2 3)	4 (1 3 2)	3 (1 2)(3 4)
1	1	1	1	1
χ	1	j	j^2	1
χ^2	1	j^2	j	1
χ_3	3	0	0	-1

$\mathfrak{S}_4$	1 1	6 (1 2)	8 (1 2 3)	3 (1 2)(3 4)	6 (1 2 3 4)
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ_2	2	0	-1	2	0
χ_{std}	3	1	0	-1	-1
$\chi_{\text{std}} \cdot \varepsilon$	3	-1	0	-1	1

2.4 Une application de la table des caractères

Extrait du rapport du jury 2018 sur la leçon 107 : « il faut savoir tirer des informations sur le groupe à partir de sa table de caractères ».

On peut se demander quelles informations on peut tirer d'une table des caractères sur le groupe G. Les tables de caractères de D_4 et H_8 sont identiques (exercice), alors que D_4 et H_8 ne sont pas isomorphes donc la table de caractère ne caractérise pas entièrement le groupe. On peut par contre déduire des informations sur les sous-groupes distingués de G et donc savoir si G est simple. Le théorème ci-dessous peut faire l'objet d'un développement.

Lemme 2.14. *(exercice, cf Ulmer 17.20) Soient (V, ρ) une représentation de G de caractère χ_V. Alors*

$$\ker(\rho) = \{g \in G|\ \chi(g) = \dim V\}.$$

Si χ est le caractère d'une représentation (V, ρ) de G, le **noyau de** χ est le noyau de ρ, c'est à dire l'ensemble des $g \in G$ tels que $\chi(g) = \chi(1)$.

Théorème 2.15. *(cf Ulmer 17.22) Soit G un groupe fini ayant m classes de conjugaison et $\chi_1, \ldots, \chi_m$ les caractères irréductibles de G. Alors tout sous-groupe distingué de G est de la forme $\bigcap_{j \in J} \ker \chi_j$ pour $J \subset [\![1, m]\!]$.*

Corollaire 2.16. *Le groupe G est simple si et seulement si tout caractère irréductible non trivial de G a un noyau trivial.*

3 Exercices supplémentaires

Exercice 15. — Soit V une représentation irréductible de G (exceptionnellement on ne suppose pas que V est de dimension finie a priori). Montrer que V est de dimension finie.

Exercice 16. — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et χ le caractère d'une représentation de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $\chi(\mathfrak{S}_n) \subset \mathbb{R}$.

Exercice 17. — Soit $\chi : G \to \mathbb{C}$ un caractère de G vérifiant $\chi(g) = 0$ pour tout $g \in G \setminus \{1\}$. Montrer que χ est un multiple du caractère de la représentation régulière.

Exercice 18. — Soient (V, ρ) une représentation de G et soit χ_V son caractère. Montrer que $\ker \rho = \{g \in G|\chi(g) = \chi(1)\}$.

Exercice 19. — Déterminer la table des caractères de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 20. — Déterminer les tables de caractères de D_4 et de H_8.

Exercice 21. — On considère une base $(e_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_3}$ de $\mathbb{C}^6$. Soit ρ la représentation de $\mathfrak{S}_3$ définie par $\sigma.e_{\sigma'} = e_{\sigma\sigma'\sigma^{-1}}$, pour tous $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_3$. Décomposer ρ en somme directe de représentations irréductibles.

Exercice 22. — [Représentation de permutation]

Soit G un groupe fini agissant sur l'ensemble fini X. On appelle représentation de permutation associée à X la représentation sur l'espace vectoriel $V_X = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C}e_x$ donnée par $\rho(g)(e_x) = e_{gx}$.

1. Soit $g \in G$, montrer que χ_{V_X} est le nombre de points fixes pour l'action de g sur X.

2. Montrer que $\frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{g \in G} \chi_{V_X}(g)$ est égal au nombre d'orbites de l'action de G sur X.

3. On suppose maintenant que X est de cardinal > 1 . Montrer que V_X n'est pas une représentation irréductible de G : on a une décomposition $V_X = \mathbf{1} \oplus W$, où $\mathbf{1}$ désigne la représentation triviale. On donnera une base de $\mathbf{1}$ et de W.

On fait agir G sur $X \times X$ en posant $g.(x, y) = (g.x, g.y)$ pour tous $x, y \in X$.

4. Calculer $\langle \chi_{V_X}, \chi_{V_X} \rangle$ en fonction du nombre d'orbites de $X \times X$ sous l'action de G.

5. En déduire que W est irréductible si et seulement si X est de cardinal 2 ou G agit 2-transitivement sur X (c'est-à-dire que pour tous couples $(x, y), (x', y')$ tels que $x \neq y$ et $x' \neq y'$, il existe g dans G tel que $(x, y) = (g.x', g.y')$).