INTRODUCTION AUX EDP STOCHASTIQUES

AURÉLIEN DEYA

Contents

Date: Mars 2021.

1. Préliminaires: mouvement brownien, martingales continues

Prérequis: espace de probabilité, variable aléatoire, indépendance, espérance conditionnelle.

1.1. Modification/indistinguabilité, processus stochastique.

Définition 1.1. *Soient* $X = \{X_a,\, a \in A\}$ *et* $Y = \{Y_a,\, a \in A\}$ *deux familles de variables aléatoires indexées par un même ensemble A (quelconque) et définies sur un même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On dit que Y *est une* modification *de* X *si, pour tout* $a \in \mathcal{A}$, *il existe* $\tilde{\Omega}_a \in \mathcal{F}$ *tel que*

$$\mathbb{P}\big(\tilde{\Omega}_a\big) = 1 \quad \text{et} \quad X_a(\omega) = Y_a(\omega) \quad \text{pour tout } \omega \in \tilde{\Omega}_a\,.$$

On dit que X *et* Y *sont* indistinguables *s'il existe* $\tilde{\Omega} \in \mathcal{F}$ *tel que*

$$\mathbb{P}\big(\tilde{\Omega}\big) = 1 \quad \text{et} \quad X_a(\omega) = Y_a(\omega) \quad \text{pour tout } \omega \in \tilde{\Omega} \text{ et tout } a \in \mathcal{A}\,.$$

Définition 1.2. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité. On appellera* processus stochastique à temps continu *(ou plus simplement* processus stochastique*) toute application* $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ *telle que, pour tout* $t \geq 0$, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ *est une application mesurable (autrement dit* X_t *est une variable aléatoire).*

1.2. Un processus stochastique fondamental: le mouvement brownien.

Définition 1.3. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité. Un processus stochastique* $W : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ *est appelé un* mouvement brownien *si:*

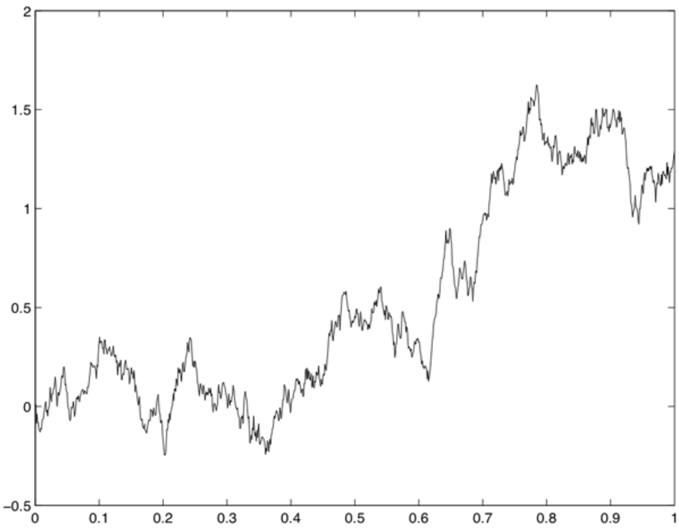
(i) $W_0(\omega) = 0$.

(ii) Pour tous $s < t$, $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

(iii) Pour tout $s > 0$, *le processus* $\{W_r - W_s,\, r \geq s\}$ *est indépendant du processus* $\{W_u,\, 0 \leq u \leq s\}$. *Autrement dit, si* X *est une variable aléatoire mesurable par rapport à la tribu générée par* $\{W_r - W_s,\, r \geq s\}$, *et* Y *une variable aléatoire mesurable par rapport à la tribu générée par* $(W_u)_{0 \leq u \leq s}$, *alors* X *et* Y *sont indépendantes.*

(iv) Pour presque tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto W_t(\omega)$ *est une fonction continue.*

Théorème 1.4. *Il existe un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et un processus stochastique* $W : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ *tel que* W *soit un mouvement brownien.*



Remarque 1.5. Si $\{W_t,\, t \geq 0\}$ est un mouvement brownien, alors pour tout $s \geq 0$ fixé, le processus $\{W_{t+s} - W_s,\, t \geq 0\}$ est aussi un mouvement brownien.

1.3. **Quelques outils de la théorie des martingales continues.**

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration sur cet espace (c'est-à-dire chaque $\mathcal{F}_t$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$, et on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pour tous $s < t$).

Définition 1.6. *On appelle* martingale *(relativement à $(\mathcal{F}_t)$) tout processus stochastique $M : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$ tel que:*
(i) pour tout $t \in [0,T]$, $M_t \in \mathcal{F}_t$ (M_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable);
(ii) pour tout $t \in [0,T]$, M_t est intégrable;
(iii) $\mathbb{E}\big[M_t \big| \mathcal{F}_s\big] = M_s$ pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$.

On appelle ensuite martingale continue *(relativement à $(\mathcal{F}_t)$) toute martingale $M : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ (relativement à $(\mathcal{F}_t)$) telle que, pour presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto M_t(\omega)$ est continue sur $[0,T]$.*

Exemple: un mouvement brownien $\{W_t,\, t \in [0,T]\}$ est une martingale continue relativement à la filtration $\mathcal{F}_t := \sigma\big(W_s,\ 0 \leq s \leq t\big)$. En effet, pour $s < t$,

$$\mathbb{E}\big[W_t \big| \mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big[\underbrace{W_t - W_s}_{\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s} \big| \mathcal{F}_s\big] + \mathbb{E}\big[\underbrace{W_s}_{\in \mathcal{F}_s} \big| \mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big[W_t - W_s\big] + W_s = W_s\,.$$

Définition 1.7. *On appelle* temps d'arrêt *(relativement à $(\mathcal{F}_t)$) toute application $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ telle que pour tout t, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Proposition 1.8. *Si M est une martingale continue et τ un temps d'arrêt (relativement à la même filtration $(\mathcal{F}_t)$), alors le processus M^τ défini par $M^\tau_t := M_{t\wedge\tau}$ est une martingale continue (relativement à $(\mathcal{F}_t)$).*

1.3.1. *Inégalité maximale de Doob.*

Théorème 1.9 (Inégalité maximale de Doob)**.** *Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ martingale continue, et $T \geq 0$. Pour tout $\lambda > 0$, on a*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq t\leq T} |M_t| \geq \lambda\Big) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbb{E}\big[|M_T|\big]\,, \tag{1.1}$$

et pour tout entier $p \geq 2$,

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq t\leq T} |M_t|\Big)^p\Big] \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\, \mathbb{E}\big[|M_T|^p\big]\,. \tag{1.2}$$

Preuve. On fixe $T > 0$.
Etape 1: Montrons que pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq t\leq T} |M_t| \geq \lambda\Big) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{\sup_{0\leq t\leq T} |M_t| \geq \lambda\}} |M_T|\big]\,, \tag{1.3}$$

ce qui entraînera immédiatement (1.1), et servira ensuite à montrer (1.2).

Soit $\lambda > 0$, et pour tout $n \geq 0$, introduisons la subdivision $t^n_k := \frac{k\,T}{2^n}$, $k \in \mathbb{N}$.

On considère le temps aléatoire τ^n_λ défini par

$$\tau^n_\lambda := \begin{cases} \min_{k\in\mathbb{N}} \big\{t^n_k : |M_{t^n_k}| \geq \lambda\big\} & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } |M_{t^n_k}| \geq \lambda \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de voir que

$$\Big\{\sup_{0\leq t^n_k\leq T} |M_{t^n_k}| \geq \lambda\Big\} = \{\tau^n_\lambda \leq T\}\,. \tag{1.4}$$

Décomposons maintenant $\mathbf{1}_{\{\tau_\lambda^n \leq T\}}|M_T|$ sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{\{\tau_\lambda^n \leq T\}}|M_T| &= \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda^n \leq T\}}|M_{\tau_\lambda^n}| + \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda^n < T\}}\big(|M_T| - |M_{\tau_\lambda^n}|\big) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda^n \leq T\}}|M_{\tau_\lambda^n}| + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda^n \leq t_k^n < T\}}\big(|M_{t_{k+1}^n}| - |M_{t_k^n}|\big) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda^n \leq T\}}|M_{\tau_\lambda^n}| + \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda^n \leq t_k^n\}}\big(|M_{t_{k+1}^n}| - |M_{t_k^n}|\big)\,,
\end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{\tau_\lambda^n \leq T\}}|M_T|\big] &= \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{\tau_\lambda^n \leq T\}}|M_{\tau_\lambda^n}|\big] + \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\{\tau_\lambda^n \leq t_k^n\}}\big(|M_{t_{k+1}^n}| - |M_{t_k^n}|\big)\Big] \\
&= \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{\tau_\lambda^n \leq T\}}|M_{\tau_\lambda^n}|\big] + \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\{\tau_\lambda^n \leq t_k^n\}}\big(|M_{t_{k+1}^n}| - |M_{t_k^n}|\big)\,\Big|\,\mathcal{F}_{t_k^n}\Big]\Big] \\
&= \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{\tau_\lambda^n \leq T\}}|M_{\tau_\lambda^n}|\big] + \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\{\tau_\lambda^n \leq t_k^n\}}\mathbb{E}\big[|M_{t_{k+1}^n}| - |M_{t_k^n}|\,\big|\,\mathcal{F}_{t_k^n}\big]\Big]\,, \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

où, pour obtenir la dernière égalité, on a utilisé le fait que $\{\tau_\lambda^n \leq t_k^n\} \in \mathcal{F}_{t_k^n}$.

On peut ensuite successivement affirmer

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[|M_{t_{k+1}^n}| - |M_{t_k^n}|\,\big|\,\mathcal{F}_{t_k^n}\big] &= \mathbb{E}\big[|M_{t_{k+1}^n}|\,\big|\,\mathcal{F}_{t_k^n}\big] - |M_{t_k^n}| \qquad &(\text{car } M_{t_k^n} \in \mathcal{F}_{t_k^n}) \\
&\geq \big|\mathbb{E}\big[M_{t_{k+1}^n}\,\big|\,\mathcal{F}_{t_k^n}\big]\big| - |M_{t_k^n}| \qquad &(\text{inégalité triangulaire})
\end{aligned}$$

et comme M est une martingale,

$$\big|\mathbb{E}\big[M_{t_{k+1}^n}\,\big|\,\mathcal{F}_{t_k^n}\big]\big| - |M_{t_k^n}| = \big|M_{t_k^n}\big| - |M_{t_k^n}| = 0\,.$$

Ainsi, $\mathbb{E}\big[|M_{t_{k+1}^n}| - |M_{t_k^n}|\,\big|\,\mathcal{F}_{t_k^n}\big] \geq 0$, et en revenant à (1.5), on obtient

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{\tau_\lambda^n \leq T\}}|M_T|\big] \geq \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{\tau_\lambda^n \leq T\}}\underbrace{|M_{\tau_\lambda^n}|}_{\geq \lambda}\big] \geq \lambda \cdot \mathbb{P}\big(\tau_\lambda^n \leq T\big)\,.$$

En se souvenant de l'identité (1.4), on déduit

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0 \leq t_k^n \leq T} |M_{t_k^n}| \geq \lambda\Big) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{\sup_{0 \leq t_k^n \leq T} |M_{t_k^n}| \geq \lambda\}}|M_T|\big]\,. \qquad (1.6)$$

Notons maintenant $D := \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{k=0,\ldots,n} \{t_k^n\}$. Il est facile de constater, en appliquant par exemple le théorème de convergence dominée, que

$$\mathbb{P}\bigg(\sup_{t \in D} |M_t| \geq \lambda\bigg) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\bigg(\sup_{0 \leq t_k^n \leq T} |M_t| \geq \lambda\bigg)$$

et

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{\sup_{t \in D} |M_t| \geq \lambda\}}|M_T|\big] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{\sup_{0 \leq t_k^n \leq T} |M_{t_k^n}| \geq \lambda\}}|M_T|\big]\,.$$

Ainsi, en faisant tendre $n \to \infty$ dans (1.6), il vient

$$\mathbb{P}\big(\sup_{t \in D} |M_t| \geq \lambda\big) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{\sup_{t \in D} |M_t| \geq \lambda\}}|M_T|\big]\,. \qquad (1.7)$$

Enfin, comme l'ensemble D est dense dans $[0, T]$, et que la martingale M est continue, on a (p.s.) $\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| = \sup_{t \in D} |M_t|$, et donc l'inégalité (1.7) correspond en fait à l'inégalité (1.3) recherchée.

Etape 2: Preuve de (1.2).

Soit $p \geq 2$. Pour plus de clarté, notons désormais $M_T^* := \sup_{t\in[0,T]} |M_t|$. Ecrivons, pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[(M_T^* \wedge k)^p\big] &= \mathbb{E}\bigg[\int_0^{M_T^*\wedge k} p\lambda^{p-1}\, d\lambda\bigg] \\
&= \mathbb{E}\bigg[\int_0^{k} p\lambda^{p-1}\mathbf{1}_{\{M_T^*\geq\lambda\}}\, d\lambda\bigg] \\
&= p\int_0^k \lambda^{p-1}\mathbb{P}\big(M_T^* \geq \lambda\big)\, d\lambda \qquad \text{(Fubini)}\,,
\end{aligned}$$

et donc, en utilisant l'étape 1, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[(M_T^* \wedge k)^p\big] &\leq p\int_0^k \lambda^{p-2}\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{M_T^*\geq\lambda\}}|M_T|\big]\, d\lambda \\
&\leq p\,\mathbb{E}\bigg[|M_T|\int_0^k \lambda^{p-2}\mathbf{1}_{\{M_T^*\geq\lambda\}}\, d\lambda\bigg] \qquad \text{(Fubini)} \\
&\leq p\,\mathbb{E}\bigg[|M_T|\int_0^{M_T^*\wedge k} \lambda^{p-2}\, d\lambda\bigg] \\
&\leq \frac{p}{p-1}\,\mathbb{E}\big[|M_T|\,(M_T^*\wedge k)^{p-1}\big] \leq \frac{p}{p-1}\,\mathbb{E}\big[|M_T|^p\big]^{1/p}\,\mathbb{E}\big[(M_T^*\wedge k)^p\big]^{1-1/p}\,,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir la dernière inégalité. On a ainsi établi que pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{E}\big[(M_T^* \wedge k)^p\big]^{1/p} \leq \frac{p}{p-1}\,\mathbb{E}\big[|M_T|^p\big]^{1/p}\,, \tag{1.8}$$

et l'inégalité (1.2) recherchée est finalement obtenue en faisant tendre $k \to \infty$.

$\square$

1.3.2. *Processus-crochet associé à une martingale de carré intégrable.*

Définition 1.10.

Un processus $X : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ sera dit de carré intégrable *si pour tout $t \in I$, $\mathbb{E}\big[|X_t|^2\big] < \infty$.*

Un processus $X : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ sera dit borné *s'il existe une constante (déterministe) $K > 0$ telle que pour presque tout $\omega \in \Omega$ et tout $t \in I$, $|X_t(\omega)| \leq K$.*

Théorème-Définition 1.11. *Etant donnée une martingale M continue et de carré intégrable, il existe un unique processus, noté $\langle M\rangle$ et appelé* crochet de M*, qui soit: (i) nul en 0 (p.s.); (ii) continu (p.s.) (iii) croissant; (iv) tel que le processus $t \mapsto M_t^2 - \langle M\rangle_t$ soit une martingale continue.*

Remarque 1.12. L'unicité dans ce résultat doit être comprise *à indistinguabilité près* (cf section 1.1).

Remarque 1.13. Le crochet $\langle M\rangle$ est aussi régulièrement appelé *variation quadratique de M*: cette dernière terminologie trouvera sa justification dans la preuve du résultat, à travers notamment la considération de la suite $V^{(n)}$ de processus définie par (1.15).

Exercice 1.14. Soit $\{W_t,\, t \geq 0\}$ un mouvement brownien sur un espace de probabilité donné. Montrer que, relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ générée par W, on a $\langle W\rangle_t = t$ pour tout $t \geq 0$.

Le reste de cette section (1.3.2) est consacré à la preuve du Théorème-Définition 1.11. Nous examinerons ensuite plusieurs conséquences importantes de ce résultat dans la section 1.4.

Pour la preuve du Théorème-Définition 1.11, nous aurons besoin de trois lemmes (1.15), 1.16 et 1.17).

Lemme 1.15. *Pour toute martingale M de carré intégrable, on a, pour tous $0 \leq r \leq s \leq t$,*

$$\mathbb{E}\big[(M_t - M_s)^2 \,\big|\, \mathcal{F}_r\big] = \mathbb{E}\big[M_t^2 - M_s^2 \,\big|\, \mathcal{F}_r\big] \tag{1.9}$$

et

$$\mathbb{E}\big[(M_t - M_r)^2 \,\big|\, \mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big[M_t^2 - M_s^2 \,\big|\, \mathcal{F}_s\big] + (M_s - M_r)^2 \,. \tag{1.10}$$

Preuve. Pour la première identité, on a en effet

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[(M_t - M_s)^2 \,\big|\, \mathcal{F}_r\big] &= \mathbb{E}\big[M_t^2 \,\big|\, \mathcal{F}_r\big] - 2\mathbb{E}\big[M_t M_s \,\big|\, \mathcal{F}_r\big] + \mathbb{E}\big[M_s^2 \,\big|\, \mathcal{F}_r\big] \\
&= \mathbb{E}\big[M_t^2 \,\big|\, \mathcal{F}_r\big] - 2\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[M_t M_s \,\big|\, \mathcal{F}_s\big] \,\big|\, \mathcal{F}_r\big] + \mathbb{E}\big[M_s^2 \,\big|\, \mathcal{F}_r\big] \qquad (\text{car } \mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}\big[M_t^2 \,\big|\, \mathcal{F}_r\big] - 2\mathbb{E}\big[M_s \mathbb{E}\big[M_t \,\big|\, \mathcal{F}_s\big] \,\big|\, \mathcal{F}_r\big] + \mathbb{E}\big[M_s^2 \,\big|\, \mathcal{F}_r\big] \qquad (\text{car } M_s \in \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}\big[M_t^2 \,\big|\, \mathcal{F}_r\big] - 2\mathbb{E}\big[M_s^2 \,\big|\, \mathcal{F}_r\big] + \mathbb{E}\big[M_s^2 \,\big|\, \mathcal{F}_r\big] \qquad (\text{car } M \text{ est une martingale}) \\
&= \mathbb{E}\big[M_t^2 - M_s^2 \,\big|\, \mathcal{F}_r\big] \,.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième identité, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[(M_t - M_r)^2 \,\big|\, \mathcal{F}_s\big] &= \mathbb{E}\big[((M_t - M_s) + (M_s - M_r))^2 \,\big|\, \mathcal{F}_s\big] \\
&= \mathbb{E}\big[(M_t - M_s)^2 \,\big|\, \mathcal{F}_s\big] + 2(M_s - M_r)\, \mathbb{E}\big[M_t - M_s \,\big|\, \mathcal{F}_s\big] + (M_s - M_r)^2 \,.
\end{aligned}$$

Or, par (1.9), on sait que $\mathbb{E}\big[(M_t - M_s)^2 \,\big|\, \mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big[M_t^2 - M_s^2 \,\big|\, \mathcal{F}_s\big]$, et comme M est une martingale, on a $\mathbb{E}\big[M_t - M_s \,\big|\, \mathcal{F}_s\big] = 0$, ce qui conduit à (1.10).

□

Lemme 1.16. *Soit M une martingale bornée. Pour tout $n \geq 1$ et tous temps $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, on a*

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\Big] = \mathbb{E}\big[|M_{t_n}|^2\big] - \mathbb{E}\big[|M_{t_0}|^2\big] \,, \tag{1.11}$$

et

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\Big)^2\Big] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^4\big] + 2\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \big\{(M_{t_n})^2 - (M_{t_{i+1}})^2\big\}\big] \,. \tag{1.12}$$

En particulier, pour tout intervalle $[s,t]$ de $\mathbb{R}_+$, on a

$$\sup_{(t_i) \in \Delta_{[s,t]}} \Big\| \sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \Big\|_{L^2(\Omega)} \;<\; \infty \,, \tag{1.13}$$

où le supremum est pris sur l'ensemble $\Delta_{[s,t]}$ des subdivisions $(t_i) = \{s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t,\ n \geq 1\}$ de $[s,t]$.

Preuve. L'identité (1.11) est une conséquence immédiate de (1.9), puisqu'en effet, d'après cette égalité,

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\Big] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\big] = \sum_{i=0}^{n-1} \big\{\mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}})^2\big] - \mathbb{E}\big[(M_{t_i})^2\big]\big\} = \mathbb{E}\big[|M_{t_n}|^2\big] - \mathbb{E}\big[|M_{t_0}|^2\big] \,.$$

Pour (1.12), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\Big)^2\Big] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{i,i'=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 (M_{t_{i'+1}} - M_{t_{i'}})^2\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^4\Big] + 2\,\mathbb{E}\Big[\sum_{0 \leq i < i' \leq n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 (M_{t_{i'+1}} - M_{t_{i'}})^2\Big] \,,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\sum_{0\le i<i'\le n-1}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2(M_{t_{i'+1}}-M_{t_{i'}})^2\Big] &= \sum_{0\le i\le n-2}\mathbb{E}\Big[(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2\sum_{i+1\le i'\le n-1}(M_{t_{i'+1}}-M_{t_{i'}})^2\Big]\\
&= \sum_{0\le i\le n-2}\mathbb{E}\Big[(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2\sum_{i+1\le i'\le n-1}\mathbb{E}\Big[(M_{t_{i'+1}}-M_{t_{i'}})^2\Big|\mathcal{F}_{t_{i+1}}\Big]\Big]\\
&= \sum_{0\le i\le n-2}\mathbb{E}\Big[(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2\sum_{i+1\le i'\le n-1}\mathbb{E}\Big[(M_{t_{i'+1}})^2-(M_{t_{i'}})^2\Big|\mathcal{F}_{t_{i+1}}\Big]\Big] \qquad \text{(par (1.9))}\\
&= \sum_{0\le i\le n-2}\mathbb{E}\Big[(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2\mathbb{E}\Big[(M_{t_n})^2-(M_{t_{i+1}})^2\Big|\mathcal{F}_{t_{i+1}}\Big]\Big]\\
&= \sum_{0\le i\le n-2}\mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2\big\{(M_{t_n})^2-M_{t_{i+1}})^2\big\}\big],
\end{aligned}$$

et nous avons ainsi établi (1.12).

En ce qui concerne (1.13), introduisons d'abord une constante $K>0$ telle que pour presque tout $\omega\in\Omega$ et pour tout t, $|M_t(\omega)|\le K$. En repartant de (1.12), on déduit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{n-1}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2\Big)^2\Big] &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^4\big]+2\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2\big\{(M_{t_n})^2-(M_{t_{i+1}})^2\big\}\big]\\
&\le (2K)^2\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2\big]+2K^2\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2\big]\\
&\le 6K^2\mathbb{E}\big[(M_t)^2\big],
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle de (1.11). La borne obtenue ne dépend donc pas de la subdivision de $[s,t]$ choisie, ce qui prouve (1.13).

□

Lemme 1.17. *Toute martingale continue, nulle en* 0*, et à variation totale finie, est identiquement nulle (c'est-à-dire: pour presque tout* $\omega\in\Omega$ *et pour tout* t*,* $M_t(\omega)=0$*).*

Rappel: une fonction $f:I\to\mathbb{R}$ (I intervalle de $\mathbb{R}_+$) est dite *à variation totale finie* si pour tous $s<t\in I$,

$$\mathcal{V}_{s,t}(f):=\sup_{(t_i)\in\Delta_{[s,t]}}\sum_{i=0}^{n-1}|f(t_{i+1})-f(t_i)|\;<\;\infty\,,$$

où le supremum est pris sur l'ensemble $\Delta_{[s,t]}$ des subdivisions $(t_i)=\{t_0=s<t_1<\ldots<t_n=t,\ n\ge 1\}$ de $[s,t]$.

Dès lors, on appelle *processus à variation totale finie* tout processus $M:\Omega\times I\to\mathbb{R}$ tel que pour presque tout $\omega\in\Omega$, $M(\omega)$ est une fonction à variation totale finie.

Remarque 1.18. Toute fonction monotone est une fonction à variation totale finie. La somme (ou la différence) de deux fonctions à variation totale finie est une fonction à variation totale finie. Toute fonction lipschitzienne est une fonction à variation totale finie.

Preuve du lemme 1.17.

I. Cas borné.

On suppose pour l'instant que M ***est borné et à variation totale bornée, autrement dit qu'il existe une constante*** $K>0$ ***telle que pour presque tout*** $\omega\in\Omega$ ***et pour tout*** t***,*** $|M_t(\omega)|\le K$ ***et*** $\mathcal{V}_{0,t}(M)(\omega)\le K$***.***

On fixe $T>0$. Par l'inégalité de Doob (Théorème 1.9), on sait que

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq t\leq T}|M_t|\Big)^2\Big]\leq 4\,\mathbb{E}\big[(M_T)^2\big]\,,$$

et par conséquent il suffit de montrer $\mathbb{E}\big[(M_T)^2\big]=0$.

Pour tout entier $m\geq 1$, on considère la subdivision $t_i^m:=\frac{iT}{m}$ $(0\leq i\leq m)$ de $[0,T]$. Comme $M_0=0$, on a

$$\mathbb{E}\big[(M_T)^2\big]=\sum_{i=0}^{m-1}\Big(\mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}^m})^2\big]-\mathbb{E}\big[(M_{t_i^m})^2\big]\Big)=\sum_{i=0}^{m-1}\mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}^m})^2-(M_{t_i^m})^2\big]$$

et donc, en appliquant (1.9), on déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(M_T)^2\big]=\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{m-1}\big(M_{t_{i+1}^m}-M_{t_i^m}\big)^2\Big]&\leq \mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq i\leq m-1}\big|M_{t_{i+1}^m}-M^{\tau_n}_{t_i^m}\big|\Big)\Big(\sum_{i=0}^{m-1}\big|M_{t_{i+1}^m}-M_{t_i^m}\big|\Big)\Big]\\&\leq \mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq i\leq m-1}\big|M_{t_{i+1}^m}-M_{t_i^m}\big|\Big)\,\mathcal{V}_{0,T}(M)\Big]\\&\leq K\,\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq i\leq m-1}\big|M_{t_{i+1}^m}-M_{t_i^m}\big|\Big)\Big]\,. \qquad (1.14)\end{aligned}$$

P.s., la martingale M est continue, donc uniformément continue sur $[0,T]$, et par conséquent on a p.s. $\sup_{0\leq i\leq m-1}\big|M_{t_{i+1}^m}-M_{t_i^m}\big|\to 0$ quand $m\to\infty$. Par ailleurs, M est bornée, et l'on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer que

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq i\leq m-1}\big|M_{t_{i+1}^m}-M_{t_i^m}\big|\Big)\Big]\overset{m\to\infty}{\longrightarrow}0\,.$$

En faisant tendre m vers l'infini dans (1.14), on déduit $\mathbb{E}\big[(M_T)^2\big]=0$.

II. Cas général.

On revient aux hypothèses contenues dans l'énoncé du théorème.

Soit M une telle martingale, et pour tout entier $n\geq 1$, considérons le temps d'arrêt

$$\tau_n:=\inf\big\{t:\ \mathcal{V}_{0,t}(M)\geq n\big\}\,.$$

Notons dès à présent que pour $0\leq t\leq\tau_n$, $|M_t|=|M_t-M_0|\leq\mathcal{V}_{0,t}(M)\leq n$.

Pour tout $n\geq 1$ fixé, on sait, par la proposition 1.8, que le processus stoppé M^{τ_n} (rappel: $M_t^{\tau_n}:=M_{t\wedge\tau_n}$) est une martingale. Comme nous venons de le voir, cette martingale est bornée ($|M_t^{\tau_n}|\leq n$ pour tout t) à variation totale finie majorée par n.

D'après le cas I ci-dessus, on sait que pour tout $n\geq 1$ et tout t, $\mathbb{E}\big[(M_t^{\tau_n})^2\big]=0$, et donc il existe un événement $\Omega_{n,t}$ de probabilité 1 tel que $M_t^{\tau_n}(\omega)=0$ pour tout $\omega\in\Omega_{n,t}$.

Pour conclure, soit $\tilde{\Omega}$ un événement de probabilité 1 sur lequel M est continue, et posons

$$\Omega:=\tilde{\Omega}\cap\Big(\cap_{n\geq 1,t\in\mathbb{Q}}\Omega_{n,t}\Big)\,.$$

On a $\mathbb{P}(\Omega)=1$. Fixons $\omega\in\Omega$. Pour tout $n\geq 1$ et tout $t\in\mathbb{Q}$, $M_t^{\tau_n}(\omega)=0$. En faisant d'abord tendre n vers l'infini, et en notant que $\tau_n(\omega)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$, on obtient $M_t(\omega)=0$ pour tout $t\in\mathbb{Q}$. Puis par continuité de $M(\omega)$, on obtient le résultat désiré, c'est-à-dire $M_t(\omega)=0$ pour tout t.

□

Preuve du Théorème-Définition 1.11.

Unicité. Supposons qu'il existe deux tels processus, notés A et B. La différence de deux martingales est encore une martingale, et donc le processus $D_t:=(M_t^2-A_t)-(M_t^2-B_t)=B_t-A_t$ est une martingale. Il s'agit par ailleurs d'un processus continu, à variation finie, et nul en 0: par le lemme 1.17, $D=0$ p.s, autrement dit A et B sont indistinguables.

Existence.

I. Cas borné.

On suppose pour l'instant que M est borné. Soit $K>0$ une constante (déterministe) telle que pour preque tout $\omega\in\Omega$ et pour tout t, $|M_t(\omega)|\leq K$.

Pour tout $n\geq 1$, on introduit la partition $\Delta_n := (t_i^n)$, où $t_i^n := \frac{i}{2^n}$ ($i\in\mathbb{N}$) de $\mathbb{R}_+$, en notant que $\Delta_n\subset\Delta_{n+1}$. Si $t\geq 0$, il existe un unique $k\in\mathbb{N}$ tel que $t_k^n\leq t<t_{k+1}^n$: on définit alors

$$V_t^{(n)} := \sum_{i=0}^{k-1}(M_{t_{i+1}^n}-M_{t_i^n})^2+(M_t-M_{t_k^n})^2\,. \tag{1.15}$$

La variable $V_t^{(n)}$ correspond ainsi à la *variation quadratique de M (sur $[0,t]$) relativement à* $(t_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$. Le processus $t\mapsto M_t$ étant continu (p.s), il est facile de voir que $t\mapsto V_t^{(n)}$ est lui même continu (p.s), pour tout $n\geq 1$ fixé. On dispose également, grâce au lemme 1.16, du contrôle uniforme

$$\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}\big[\big(V_t^{(n)}\big)^2\big]\leq C_K\,, \tag{1.16}$$

pour une certaine constante $C_K>0$ ne dépendant que de K.

Etape 1: On montre que pour tout $n\geq 1$, $t\mapsto M_t^2-V_t^{(n)}$ est une martingale.

D'abord, si $t_k^n\leq s\leq t<t_{k+1}^n$, la différence $V_t^{(n)}-V_s^{(n)}$ se résume à

$$V_t^{(n)}-V_s^{(n)}=(M_t-M_{t_k^n})^2-(M_s-M_{t_k^n})^2\,.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(M_t^2-V_t^{(n)})-(M_s^2-V_s^{(n)})\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]&=\mathbb{E}\big[(M_t^2-M_s^2)\big|\,\mathcal{F}_s\big]-\mathbb{E}\big[(V_t^{(n)}-V_s^{(n)})\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]\\&=\mathbb{E}\big[(M_t^2-M_s^2)\big|\,\mathcal{F}_s\big]-\mathbb{E}\big[(M_t-M_{t_k^n})^2\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]+(M_s-M_{t_k^n})^2\,.\end{aligned}$$

Par (1.10), on sait que $\mathbb{E}\big[(M_t-M_{t_k^n})^2\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]=\mathbb{E}\big[(M_t^2-M_s^2)\big|\,\mathcal{F}_s\big]+(M_s-M_{t_k^n})^2$, et donc

$$\mathbb{E}\big[(M_t^2-V_t^{(n)})-(M_s^2-V_s^{(n)})\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]=0\,,$$

ce qui correspond au résultat désiré.

Si $t_k^n\leq s<t_{k+1}^n<\ldots<t_\ell^n\leq t<t_{\ell+1}^n$ avec $k<\ell$, on a

$$V_t^{(n)}-V_s^{(n)}=(M_t-M_{t_\ell^n})^2+\sum_{i=k}^{\ell-1}(M_{t_{i+1}^n}-M_{t_i^n})^2-(M_s-M_{t_k^n})^2\,, \tag{1.17}$$

donc

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[(M_t^2-V_t^{(n)})-(M_s^2-V_s^{(n)})\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]\\&=\mathbb{E}\big[(M_t^2-M_s^2)\big|\,\mathcal{F}_s\big]-\mathbb{E}\big[(V_t^{(n)}-V_s^{(n)})\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]\\&=\mathbb{E}\big[(M_t^2-M_s^2)\big|\,\mathcal{F}_s\big]-\mathbb{E}\big[(M_t-M_{t_\ell^n})^2\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]-\sum_{i=k+1}^{\ell-1}\mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}^n}-M_{t_i^n})^2\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]-\mathbb{E}\big[(M_{t_{k+1}^n}-M_{t_k^n})^2\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]\\&\qquad+(M_s-M_{t_k^n})^2\,.\end{aligned} \tag{1.18}$$

En exploitant les formules (1.9)-(1.10), on déduit successivement

$$\mathbb{E}\big[(M_t-M_{t_\ell^n})^2\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]=\mathbb{E}\big[(M_t)^2-(M_{t_\ell^n})^2\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]\,,$$

$$\sum_{i=k+1}^{\ell-1}\mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}^n}-M_{t_i^n})^2\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]=\sum_{i=k+1}^{\ell-1}\mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}^n})^2-(M_{t_i^n})^2\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]=\mathbb{E}\big[(M_{t_\ell^n})^2-(M_{t_{k+1}^n})^2\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]\,,$$

$$\mathbb{E}\big[(M_{t_{k+1}^n}-M_{t_k^n})^2\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]=\mathbb{E}\big[(M_{t_{k+1}^n})^2-(M_s)^2\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]+(M_s-M_{t_k^n})^2\,.$$

En injectant ces identités dans (1.18), on obtient

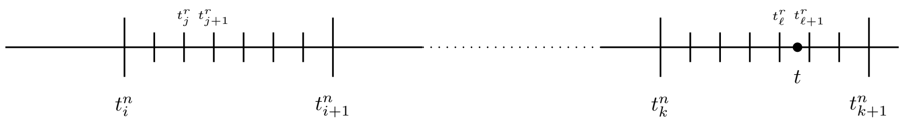
$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[(M_t^2 - V_t^{(n)}) - (M_s^2 - V_s^{(n)})\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]\\ &= \mathbb{E}\big[(M_t^2 - M_s^2)\big|\,\mathcal{F}_s\big] - \mathbb{E}\big[(M_t)^2 - (M_{t_\ell^n})^2\,\big|\,\mathcal{F}_s\big] - \mathbb{E}\big[(M_{t_\ell^n})^2 - (M_{t_{k+1}^n})^2\,\big|\,\mathcal{F}_s\big] - \mathbb{E}\big[(M_{t_{k+1}^n})^2 - (M_s)^2\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]\\ &\qquad - (M_s - M_{t_k^n})^2 + (M_s - M_{t_k^n})^2 \;= 0\,,\end{aligned}$$

ce qui achève de montrer que $M^2 - V^{(n)}$ est une martingale continue.

Remarque: malgré cette propriété de martingale, le processus $t \to V_t^{(n)}$ (pour $n \geq 1$ fixé) ne répond pas aux critères de l'énoncé, car il ne s'agit pas d'un processus croissant.

Etape 2: On montre que pour tout $t \geq 0$, la suite $(V_t^{(n)})_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$.

A cette fin, observons d'abord que pour tous $1 \leq n \leq r$, on peut écrire, si $t_k^n \leq t_\ell^r \leq t < t_{\ell+1}^r \leq t_{k+1}^n$,



$$V_t^{(n)} - V_t^{(r)} = \sum_{i=0}^{k-1} \Bigg\{ (M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})^2 - \sum_{j=i\,2^{r-n}}^{(i+1)\,2^{r-n}-1} (M_{t_{j+1}^r} - M_{t_j^r})^2 \Bigg\}$$
$$+ \Bigg\{ (M_t - M_{t_k^n})^2 - \Bigg[(M_t - M_{t_\ell^r})^2 + \sum_{j=k\,2^{r-n}}^{\ell-1} (M_{t_{j+1}^r} - M_{t_j^r})^2 \Bigg] \Bigg\}\,.$$

Posons alors, pour tout i,

$$D_i = D_i^{r,n} := (M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})^2 - \sum_{j=i\,2^{r-n}}^{(i+1)\,2^{r-n}-1} (M_{t_{j+1}^r} - M_{t_j^r})^2\,,$$

et définissons par ailleurs

$$R_t^{r,n} := \Bigg\{ (M_t - M_{t_k^n})^2 - \Bigg[(M_t - M_{t_\ell^r})^2 + \sum_{j=k\,2^{r-n}}^{\ell-1} (M_{t_{j+1}^r} - M_{t_j^r})^2 \Bigg] \Bigg\}\,,$$

de telle sorte que

$$\big\|V_t^{(n)} - V_t^{(r)}\big\|_{L^2(\Omega)} = \Big\| \sum_{i=0}^{k-1} D_i + R_t^{r,n} \Big\|_{L^2(\Omega)} \leq \Big\| \sum_{i=0}^{k-1} D_i \Big\|_{L^2(\Omega)} + \big\|R_t^{r,n}\big\|_{L^2(\Omega)}\,. \tag{1.19}$$

Nous allons montrer que ces deux dernières normes tendent vers 0 quand $n, r \to \infty$.

− − − − − − − − − − − − − − − − − − − −

On a d'abord

$$\big\|R_t^{r,n}\big\|_{L^2(\Omega)} \leq \big\|(M_t - M_{t_k^n})^2\big\|_{L^2(\Omega)} + \big\|(M_t - M_{t_\ell^r})^2\big\|_{L^2(\Omega)} + \Bigg\| \sum_{j=k\,2^{r-n}}^{\ell-1} (M_{t_{j+1}^r} - M_{t_j^r})^2 \Bigg\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.20}$$

En utilisant la continuité de M et le théorème de convergence dominée (rappelons que M est bornée), on voit clairement que $\big\|(M_t - M_{t_k^n})^2\big\|_{L^2(\Omega)} + \big\|(M_t - M_{t_\ell^r})^2\big\|_{L^2(\Omega)} \overset{n,r\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Par ailleurs, en utilisant la formule (1.12), on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=k\,2^{r-n}}^{\ell-1}(M_{t^r_{j+1}}-M_{t^r_j})^2\Big)^2\Big]\\
&=\mathbb{E}\Big[\sum_{j=k\,2^{r-n}}^{\ell-1}(M_{t^r_{j+1}}-M_{t^r_j})^4\Big]+2\,\mathbb{E}\Big[\sum_{j=k\,2^{r-n}}^{\ell-1}(M_{t^r_{j+1}}-M_{t^r_j})^2\big\{(M_{t^r_\ell})^2-(M_{t^r_{j+1}})^2\big\}\Big]. \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k\,2^{r-n}}^{\ell-1}(M_{t^r_{j+1}}-M_{t^r_j})^4 &\leq \Big(\sup_{0\leq j\leq \ell-1}(M_{t^r_{j+1}}-M_{t^r_j})^2\Big)\sum_{j=k\,2^{r-n}}^{\ell-1}(M_{t^r_{j+1}}-M_{t^r_j})^2\\
&\leq \Big(\sup_{0\leq j\leq \ell-1}(M_{t^r_{j+1}}-M_{t^r_j})^2\Big)\cdot V^{(r)}_t\,, \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

et de même

$$\sum_{j=k\,2^{r-n}}^{\ell-1}(M_{t^r_{j+1}}-M_{t^r_j})^2\big\{(M_{t^r_\ell})^2-(M_{t^r_{j+1}})^2\big\}\leq\Big(\sup_{k\,2^{r-n}\leq j\leq \ell-1}\big|(M_{t^r_\ell})^2-(M_{t^r_{j+1}})^2\big|\Big)\cdot V^{(r)}_t\,, \qquad (1.23)$$

donc, en revenant à (1.21),

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=k\,2^{r-n}}^{\ell-1}(M_{t^r_{j+1}}-M_{t^r_j})^2\Big)^2\Big]\\
&\leq \mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq j\leq \ell-1}(M_{t^r_{j+1}}-M_{t^r_j})^2\Big)\cdot V^{(r)}_t\Big]+2\,\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{k\,2^{r-n}\leq j\leq \ell-1}\big|(M_{t^r_\ell})^2-(M_{t^r_{j+1}})^2\big|\Big)\cdot V^{(r)}_t\Big]\\
&\leq \mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq j\leq \ell-1}(M_{t^r_{j+1}}-M_{t^r_j})^2\Big)^2\Big]^{1/2}\cdot\mathbb{E}\big[(V^{(r)}_t)^2\big]^{1/2}\\
&\qquad +2\,\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{k\,2^{r-n}\leq j\leq \ell-1}\big|(M_{t^r_\ell})^2-(M_{t^r_{j+1}})^2\big|\Big)^2\Big]^{1/2}\cdot\mathbb{E}\big[(V^{(r)}_t)^2\big]^{1/2}, \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

où la seconde inégalité découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Souvenons nous maintenant que d'après (1.16), $\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}\big[\big(V^{(n)}_t\big)^2\big]\leq C_K$. D'autre part, en utilisant la continuité p.s. de M (et donc la continuité uniforme de M sur $[0,t]$), ainsi que le théorème de convergence dominée (rappelons que M est bornée), on constate que

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq j\leq \ell-1}(M_{t^r_{j+1}}-M_{t^r_j})^2\Big)^2\Big]\overset{r\to\infty}{\longrightarrow}0 \quad\text{et}\quad \mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{k\,2^{r-n}\leq j\leq \ell-1}\big|(M_{t^r_\ell})^2-(M_{t^r_{j+1}})^2\big|\Big)^2\Big]\overset{r\to\infty}{\longrightarrow}0\,.$$

En revenant à (1.20), on déduit finalement le résultat souhaité, c'est-à-dire

$$\big\|R^{r,n}_t\big\|_{L^2(\Omega)}\overset{r,n\to\infty}{\longrightarrow}0\,. \qquad (1.25)$$

− −

Considérons maintenant la première quantité dans la borne (1.19), c'est-à-dire $\big\|\sum_{i=0}^{k-1}D_i\big\|_{L^2(\Omega)}$. On a $D_i\in\mathcal{F}_{t^n_{i+1}}$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{k-1}D_i\Big)^2\Big]=\sum_{i,i'=0}^{k-1}\mathbb{E}\big[D_iD_{i'}\big]&=\sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{E}\big[(D_i)^2\big]+2\sum_{0\leq i'<i\leq k-1}\mathbb{E}\big[D_{i'}D_i\big]\\
&=\sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{E}\big[(D_i)^2\big]+2\sum_{0\leq i'<i\leq k-1}\mathbb{E}\big[D_{i'}\,\mathbb{E}\big[D_i\,|\,\mathcal{F}_{t^n_i}\big]\big]. \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

Pour tout i, on peut écrire, en appliquant (1.9),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[D_i \,\big|\, \mathcal{F}_{t_i^n}\big] &= \mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})^2 \,\big|\, \mathcal{F}_{t_i^n}\big] - \sum_{j=i\,2^{r-n}}^{(i+1)\,2^{r-n}-1} \mathbb{E}\big[(M_{t_{j+1}^r} - M_{t_j^r})^2 \,\big|\, \mathcal{F}_{t_i^n}\big]\\ &= \mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}^n})^2 - (M_{t_i^n})^2 \,\big|\, \mathcal{F}_{t_i^n}\big] - \sum_{j=i\,2^{r-n}}^{(i+1)\,2^{r-n}-1} \mathbb{E}\big[(M_{t_{j+1}^r})^2 - (M_{t_j^r})^2 \,\big|\, \mathcal{F}_{t_i^n}\big]\\ &= \mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}^n})^2 - (M_{t_i^n})^2 \,\big|\, \mathcal{F}_{t_i^n}\big] - \mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}^n})^2 - (M_{t_i^n})^2 \,\big|\, \mathcal{F}_{t_i^n}\big] = 0\,.\end{aligned}$$

En revenant à (1.26), on déduit

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{k-1} D_i\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{k-1}(D_i)^2\Big]\,. \tag{1.27}$$

Pour majorer cette dernière quantité, nous pouvons à présent reprendre les arguments qui nous ont servi pour contrôler $\mathbb{E}\big[(R_t^{r,n})^2\big]$. Notons d'abord que

$$(D_i)^2 \leq 2\Big[(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})^4 + \Big(\sum_{j=i\,2^{r-n}}^{(i+1)\,2^{r-n}-1} |M_{t_{j+1}^r} - M_{t_j^r}|^2\Big)^2\Big]\,,$$

avec, par la formule (1.12),

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=i\,2^{r-n}}^{(i+1)\,2^{r-n}} (M_{t_{j+1}^r} - M_{t_j^r})^2\Big)^2\Big]\\ &= \mathbb{E}\Big[\sum_{j=i\,2^{r-n}}^{(i+1)\,2^{r-n}} (M_{t_{j+1}^r} - M_{t_j^r})^4\Big] + 2\,\mathbb{E}\Big[\sum_{j=i\,2^{r-n}}^{(i+1)\,2^{r-n}} (M_{t_{j+1}^r} - M_{t_j^r})^2\,\big\{(M_{t_{i+1}^n})^2 - (M_{t_{j+1}^r})^2\big\}\Big]\,.\end{aligned}$$

On obtient de cette façon, en reprenant le raisonnement contenu dans (1.22), (1.23) et (1.24),

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{k-1}(D_i)^2\Big]\\ &\leq 2\Big\{\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{k-1}(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})^4\Big] + \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i\,2^{r-n}}^{(i+1)\,2^{r-n}-1} (M_{t_{j+1}^r} - M_{t_j^r})^4\Big]\\ &\qquad\qquad + 2\,\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i\,2^{r-n}}^{(i+1)\,2^{r-n}-1} (M_{t_{j+1}^r} - M_{t_j^r})^2\,\big\{(M_{t_{i+1}^n})^2 - (M_{t_{j+1}^r})^2\big\}\Big]\Big\}\\ &\leq 2\Big\{\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq i\leq k-1}(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})^2\Big)\cdot V_t^{(n)}\Big] + \mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq j\leq \ell-1}(M_{t_{j+1}^r} - M_{t_j^r})^2\Big)\cdot V_t^{(r)}\Big]\\ &\qquad\qquad + 2\,\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{\substack{0\leq i\leq k-1\\ i\,2^{r-n}\leq j\leq (i+1)2^{r-n}-1}} \big|(M_{t_{i+1}^n})^2 - (M_{t_{j+1}^r})^2\big|\Big)\cdot V_t^{(r)}\Big]\Big\}\\ &\leq c_K\Big\{\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq i\leq k-1}(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})^2\Big)^2\Big]^{1/2} + \mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq j\leq \ell-1}(M_{t_{j+1}^r} - M_{t_j^r})^2\Big)^2\Big]^{1/2}\\ &\qquad\qquad + \mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{\substack{0\leq i\leq k-1\\ i\,2^{r-n}\leq j\leq (i+1)2^{r-n}-1}} \big|(M_{t_{i+1}^n})^2 - (M_{t_{j+1}^r})^2\big|\Big)^2\Big]^{1/2}\Big\}\,,\end{aligned}$$

pour une certaine constante $c_K > 0$ qui ne dépend que de K.

En utilisant la continuité uniforme de M sur $[0,t]$, ainsi que le théorème de convergence dominée, on voit facilement que ces trois dernières espérances tendent vers 0 quand $n, r \to \infty$. Ainsi, nous avons montré que $\mathbb{E}\big[\sum_{i=0}^{k-1}(D_i)^2\big] \overset{n,r\to\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc, grâce à l'identité (1.27),

$$\Big\|\sum_{i=0}^{k-1} D_i\Big\|_{L^2(\Omega)} \overset{n,r\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{1.28}$$

En revenant à (1.19) et en tenant compte des deux résultats de convergence (1.25) et (1.28), on obtient la propriété escomptée, à savoir

$$\big\|V_t^{(n)} - V_t^{(r)}\big\|_{L^2(\Omega)} \overset{n,r\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

La suite $(V_t^{(n)})_{n\geq 1}$ est bien de Cauchy dans $L^2(\Omega)$.

Etape 3: Conclusion.

Pour tout $t \geq 0$, notons V_t la limite, dans $L^2(\Omega)$, de la suite $(V_t^{(n)})_{n\geq 1}$ (nous savons, grâce à l'étape 2, que cette limite existe). Montrons que le processus $t \mapsto V_t$ ainsi défini satisfait les propriétés recherchées.

Continuité. Nous savons, grâce à l'étape 1, que pour tous $n \leq r$, les processus $M^2 - V^{(n)}$ et $M^2 - V^{(r)}$ sont des martingales continues: il en est donc de même pour leur différence $V^{(r)} - V^{(n)}$. Nous pouvons maintenant appliquer l'*inégalité de Doob* (théorème 1.9) à cette martingale pour affirmer que, pour tout $T > 0$, et pour une certaine constante $c > 0$, on a

$$\mathbb{E}\bigg[\Big(\sup_{t\in[0,T]} |V_t^{(r)} - V_t^{(n)}|\Big)^2\bigg] \leq c\,\mathbb{E}\Big[|V_T^{(r)} - V_T^{(n)}|^2\Big] \overset{n,r\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Nous constatons de cette façon que pour tout $T > 0$, la suite de fonctions aléatoires $([0,T] \to \mathbb{R},\ t \mapsto V_t^{(n)})$ est de Cauchy dans l'espace $L^2(\Omega; \mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}))$, où $\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$, muni de la norme du supremum. Comme $(\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach, il en est de même pour $L^2(\Omega; \mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}))$, et donc, par unicité de la limite, la convergence de $V^{(n)}_{|[0,T]}$ vers $V_{|[0,T]}$ a lieu dans cet espace. Il existe finalement une sous-suite $V^{(n_k)}_{|[0,T]}$ telle que $\|V^{(n_k)} - V\|_{\infty;[0,T]} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *p.s.* Comme $V^{(n_k)}$ est continue (p.s.), sa limite uniforme est aussi continue (p.s).

Croissance. Soit $T > 0$. On sait désormais qu'il existe $V^{(n_k)}_{|[0,T]}$ telle que $\big\|V^{(n_k)} - V\big\|_{\infty;[0,T]} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ p.s. A présent, soit $s < t \in [0,T]$. Pour tout $k \geq 1$ assez grand, il existe $\ell_1 < \ell_2 \in \mathbb{N}$ tels que $t^{n_k}_{\ell_1} \leq s < t^{n_k}_{\ell_1+1}$ et $t^{n_k}_{\ell_2} \leq t < t^{n_k}_{\ell_2+1}$. Pour de telles valeurs, on a vu à l'étape 1 que

$$V_t^{(n_k)} - V_s^{(n_k)} = (M_t - M_{t^{n_k}_{\ell_2}})^2 + \sum_{i=\ell_1}^{\ell_2-1} (M_{t^{n_k}_{i+1}} - M_{t^{n_k}_i})^2 - (M_s - M_{t^{n_k}_{\ell_1}})^2 \geq (M_t - M_{t^{n_k}_{\ell_2}})^2 - (M_s - M_{t^{n_k}_{\ell_1}})^2\,.$$

Le processus M étant (p.s) continu, cette dernière quantité tend (p.s) vers 0 quand $k \to \infty$. Ainsi, pour tout $T > 0$, on a p.s: pour tous $s < t \in [0,T]$, $V_s \leq V_t$, autrement dit V est croissant sur $[0,T]$. Le résultat s'étend maintenant facilement sur $\mathbb{R}_+$.

Martingale. Il reste à vérifier que le processus $M^2 - V$ est une martingale. Pour tout $n \geq 1$, nous savons, grâce à l'étape 1, que le processus $M^2 - V^{(n)}$ est une martingale. En particulier, pour tous $s < t$,

$$\mathbb{E}\big[M_t^2 - V_t^{(n)} \,\big|\, \mathcal{F}_s\big] = M_s^2 - V_s^{(n)}\,. \tag{1.29}$$

Or on a bien sûr, par l'inégalité de Jensen,

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\mathbb{E}\big[M_t^2 - V_t^{(n)} \,\big|\, \mathcal{F}_s\big] - \mathbb{E}\big[M_t^2 - V_t \,\big|\, \mathcal{F}_s\big]\Big|^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\Big|\mathbb{E}\big[V_t - V_t^{(n)} \,\big|\, \mathcal{F}_s\big]\Big|^2\Big] \leq \mathbb{E}\Big[|V_t - V_t^{(n)}|^2\Big] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

et donc, en passant à la limite dans (1.29), on déduit

$$\mathbb{E}\big[M_t^2 - V_t \,\big|\, \mathcal{F}_s\big] = M_s^2 - V_s\,.$$

Le processus $t \mapsto M_t^2 - V_t$ est bien une martingale.

II. Cas général.

On revient aux hypothèses contenues dans l'énoncé du théorème.

On considère la suite $(\tau_n)_{n\geq 0}$ des temps d'arrêts définis par $\tau_0 = 0$ et pour $n \geq 1$

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}.$$

Cette suite est bien sûr croissante ($\tau_{n+1} \geq \tau_n$) et tend (p.s.) vers l'infini. Pour tout $n \geq 1$, on sait par la proposition 1.8 que le processus stoppé M^{τ_n} est une martingale. Par ailleurs, on a par définition $|M_t^{\tau_n}| \leq n$ pour tout $t \geq 0$, et donc, à n fixé, M^{τ_n} est une martingale bornée. D'après l'étape 1, il existe ainsi, pour tout $n \geq 1$, un unique processus $A^{(n)}$ croissant, continu, nul en 0, et tel que $(M^{\tau_n})^2 - A^{(n)}$ est une martingale.

Pour tout $n \geq 1$, on peut affirmer, en appliquant à nouveau la proposition 1.8, que le processus $\big[(M^{\tau_{n+1}})^2 - A^{(n+1)}\big]^{\tau_n}$ est une martingale. Or on constate facilement que

$$\big[(M^{\tau_{n+1}})^2 - A^{(n+1)}\big]^{\tau_n} = \big[(M^{\tau_{n+1}})^2\big]^{\tau_n} - \big[A^{(n+1)}\big]^{\tau_n} = \big[(M^{\tau_{n+1}})^{\tau_n}\big]^2 - \big[A^{(n+1)}\big]^{\tau_n} = (M^{\tau_n})^2 - \big[A^{(n+1)}\big]^{\tau_n}$$

et par la propriété d'unicité du processus-crochet, on obtient l'identité $\big[A^{(n+1)}\big]^{\tau_n} = A^{(n)}$, ce qui signifie en particulier que

$$\text{p.s., pour tout } t \leq \tau_n, \quad A_t^{(n+1)} = A_t^{(n)}. \tag{1.30}$$

A partir de cette propriété, vérifions que le processus A défini par

$$A_t := \sum_{n=0}^{\infty} A_t^{(n+1)} \mathbf{1}_{(\tau_n, \tau_{n+1}]}(t).$$

satisfait les propriétés recherchées.

Grâce à (1.30), on sait que, p.s., sur tout intervalle $[0, \tau_n]$, $A = A^{(n)}$. La continuité (p.s), resp. la croissance (p.s), de A découle donc immédiatement de celle de chaque $A^{(n)}$. Comme $A_0^{(1)} = 0$, on $A_0 = 0$.

Il reste à vérifier que $M^2 - A$ est une martingale. Pour montrer tout d'abord que $A_t \in L^1(\Omega)$, écrivons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[A_t \mathbf{1}_{\{t\leq\tau_n\}}\big] = \mathbb{E}\big[A_t^{(n)} \mathbf{1}_{\{t\leq\tau_n\}}\big] \leq \mathbb{E}\big[A_t^{(n)}\big] = \underbrace{\mathbb{E}\big[A_t^{(n)} - (M_t^{\tau_n})^2\big]}_{=0} + \mathbb{E}\big[(M_t^{\tau_n})^2\big] &= \mathbb{E}\big[(M_{\tau_n\wedge t})^2\big] \\ &\leq \mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{s\in[0,t]} |M_s|\Big)^2\Big] \\ &\leq 4\,\mathbb{E}\big[M_t^2\big],\end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle de l'inégalité de Doob (théorème 1.9). En faisant tendre $n \to \infty$, on obtient, par convergence monotone, $\mathbb{E}[A_t] \leq 4\,\mathbb{E}[M_t^2] < \infty$, et donc $A_t \in L^1(\Omega)$.

En fait, on a p.s. $A_t^{\tau_n} \to A_t$ quand $n \to \infty$, et $A_t^{\tau_n} \leq A_t \in L^1(\Omega)$, donc par convergence dominée, $A_t^{\tau_n} \to A_t$ dans $L^1(\Omega)$. On s'aperçoit en outre facilement que, pour tout t,

$$A_t^{\tau_n} = A_{\tau_n\wedge t} = A_t \mathbf{1}_{\{t\leq\tau_n\}} + A_{\tau_n}\mathbf{1}_{\{t>\tau_n\}} = A_t^{(n)} \mathbf{1}_{\{t\leq\tau_n\}} + A_{\tau_n}^{(n)}\mathbf{1}_{\{t>\tau_n\}} = \big[A^{(n)}\big]_t^{\tau_n},$$

et de cette façon, on peut réécrire la convergence précédente sous la forme

$$A_t = \lim_{n\to\infty} \big[A^{(n)}\big]_t^{\tau_n} \quad \text{dans } L^1(\Omega). \tag{1.31}$$

Par ailleurs, on a p.s. $(M^{\tau_n})_t^2 \to M_t^2$ quand $n \to \infty$, et $(M^{\tau_n})_t^2 \leq \sup_{s\in[0,t]} |M_t|^2 \in L^1(\Omega)$ (par l'inégalité de Doob). Ainsi, par convergence dominée, on a

$$M_t^2 = \lim_{n\to\infty} (M^{\tau_n})_t^2 \quad \text{dans } L^1(\Omega). \tag{1.32}$$

En combinant (1.31) et (1.32), on déduit naturellement, pour tout t,

$$M_t^2 - A_t = \lim_{n\to\infty} \big[(M^{\tau_n})^2 - A^{(n)}\big]_t^{\tau_n} \quad \text{dans } L^1(\Omega).$$

Or il n'est pas dur de constater que toute limite ponctuelle, dans $L^1(\Omega)$, d'une suite de martingales est une martingale, et par conséquence $M^2 - A$ est bien une martingale, ce qui achève notre vérification (autrement dit, $A = \langle M\rangle$).

$\square$

1.4. **Corollaires du Théorème-Définition 1.11.**

Corollaire 1.19. *Pour toute martingale M continue de carré intégrable, et tout temps d'arrêt τ, on a*

$$\langle M^\tau \rangle = \langle M \rangle^\tau .$$

(On rappelle ici la notation: pour tout processus X et tout $t \geq 0$, $X_t^\tau := X_{t\wedge\tau}$.)

Preuve. On sait que $M^2 - \langle M \rangle$ est une martingale, et donc, par la proposition 1.8, $(M^2 - \langle M \rangle)^\tau$ est aussi une martingale. Or il est facile de voir que

$$(M^2 - \langle M \rangle)^\tau = (M^\tau)^2 - \langle M \rangle^\tau .$$

En outre, le processus $\langle M \rangle^\tau$ est croissant, continu et nul en 0 (p.s): par unicité du processus-crochet, on peut affirmer que $\langle M \rangle^\tau = \langle M^\tau \rangle$. □

Corollaire 1.20 (Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy)**.** *Pour tout $p \geq 1$, il existe une constante $c_p > 0$ telle que pour tout $T > 0$ et pour toute martingale M continue, de carré intégrable et nulle en 0,*

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq t\leq T} |M_t|\Big)^{2p}\Big] \leq c_p\, \mathbb{E}\Big[\big|\langle M \rangle_T\big|^p\Big] . \tag{1.33}$$

Remarque 1.21. Ce dernier résultat peut en fait se généraliser sous le forme de l'énoncé suivant (appelé “inégalités de Burkholder-Davis-Gundy”): pour tout $p \geq 2$, il existe des constantes $c_p > 0$ et $C_p > 0$ telles que, pour tout $T > 0$ et toute martingale M continue, de carré intégrable et nulle en 0, on a

$$c_p\, \mathbb{E}\Big[\big|\langle M \rangle_T\big|^{p/2}\Big] \leq \mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{t\in[0,T]} |M_t|\Big)^{p}\Big] \leq C_p\, \mathbb{E}\Big[\big|\langle M \rangle_T\big|^{p/2}\Big] .$$

Cette généralisation repose sur une exploitation subtile de ce que l'on appelle la *formule d'Itô.*

Le résultat (plus faible) contenu dans le corollaire 1.20 se révèlera toutefois suffisant pour la suite du cours.

Preuve du corollaire 1.20.

Comme $M^2 - \langle M \rangle$ est une martingale, on a $\mathbb{E}\big[M_T^2 - \langle M \rangle_T\big] = \mathbb{E}\big[M_0^2 - \langle M \rangle_0\big] = 0$. Ainsi, $\mathbb{E}\big[M_T^2\big] = \mathbb{E}\big[\langle M \rangle_T\big]$ et l'inégalité (1.33) pour $p = 1$ découle donc immédiatement du Théorème 1.9.

On supposera par conséquent, dans ce qui suit, que $p \geq 2$. Nous noterons par ailleurs $M_T^* := \sup_{t\in[0,T]} |M_t|$.

I. Cas borné.

On suppose pour l'instant que M est borné. Soit $K > 0$ une constante (déterministe) telle que pour preque tout $\omega \in \Omega$ et pour tout t, $|M_t(\omega)| \leq K$.

On sait déjà, grâce à l'inégalité de Doob (théorème 1.9), que

$$\mathbb{E}\big[(M_T^*)^{2p}\big] \leq \Big(\frac{2p}{2p-1}\Big)^{2p} \mathbb{E}\big[(M_T)^{2p}\big] . \tag{1.34}$$

Considérons ensuite, pour tout $n \geq 1$, la subdivision $t_i = t_i^n := \frac{iT}{n}$ de $[0,T]$, et écrivons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[(M_T)^{2p}\big] = \mathbb{E}\big[(M_T)^{2p} - (M_0)^{2p}\big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}\big\{(M_{t_{i+1}})^{2p} - (M_{t_i})^{2p}\big\}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}\big\{\big(M_{t_i} + (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\big)^{2p} - (M_{t_i})^{2p}\big\}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}\Big\{\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}(M_{t_i})^{2p-k}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^k - (M_{t_i})^{2p}\Big\}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}\Big\{(M_{t_i})^{2p-1}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + \binom{2p}{2}(M_{t_i})^{2p-2}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + \sum_{k=3}^{2p}\binom{2p}{k}(M_{t_i})^{2p-k}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^k\Big\}\Big].
\end{aligned} \tag{1.35}$$

A ce stade, observons d'abord que

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(M_{t_i})^{2p-1}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\Big] = \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\Big[(M_{t_i})^{2p-1}\mathbb{E}\big[M_{t_{i+1}} - M_{t_i}\,\big|\,\mathcal{F}_{t_i}\big]\Big] = 0\,.$$

D'autre part, pour tout $k \geq 3$,

$$\begin{aligned}
\Big|\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(M_{t_i})^{2p-k}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^k\Big]\Big| &\leq K^{2p-k}\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|^k\Big] \\
&\leq K^{2p-k}\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq i\leq n-1}|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|^{k-2}\Big)\sum_{i=0}^{n-1}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\Big] \\
&\leq K^{2p-k}\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq i\leq n-1}|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|^{k-2}\Big)^2\Big]^{1/2}\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{n-1}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\Big)^2\Big]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Nous pouvons ici appliquer le lemme 1.16 pour affirmer que

$$\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{n-1}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\Big)^2\Big] < \infty\,.$$

De plus, comme $k \geq 3$ et M est continue (bornée), on a $\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq i\leq n-1}|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|^{k-2}\Big)^2\Big] \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc, en revenant à (1.36), on obtient, pour tout $k \geq 3$,

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(M_{t_i})^{2p-k}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^k\Big] \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Enfin, en utilisant l'identité (1.9) *et le fait que $M^2 - \langle M\rangle$ est une martingale*, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(M_{t_i})^{2p-2}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\Big] &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\Big[(M_{t_i})^{2p-2}\mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\,\big|\,\mathcal{F}_{t_i}\big]\Big] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\Big[(M_{t_i})^{2p-2}\mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}})^2 - (M_{t_i})^2\,\big|\,\mathcal{F}_{t_i}\big]\Big] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\Big[(M_{t_i})^{2p-2}\mathbb{E}\big[\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i}\,\big|\,\mathcal{F}_{t_i}\big]\Big] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\Big[(M_{t_i})^{2p-2}\big(\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i}\big)\Big]\,,
\end{aligned}$$

d'où, comme $\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i} \geq 0$,

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_i})^{2p-2}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\Big] \leq \mathbb{E}\Big[(M_T^*)^{2p-2}\sum_{i=0}^{n-1}\big(\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i}\big)\Big] = \mathbb{E}\Big[(M_T^*)^{2p-2}\langle M\rangle_T\Big].$$

En associant ces trois résultats successifs, nous voyons qu'en faisant tendre $n \to \infty$ dans (1.35), il vient

$$\mathbb{E}\big[(M_T)^{2p}\big] \leq \binom{2p}{2}\mathbb{E}\Big[(M_T^*)^{2p-2}\langle M\rangle_T\Big].$$

Par (1.34), on déduit alors

$$\mathbb{E}\big[(M_T^*)^{2p}\big] \leq \Big(\frac{2p}{2p-1}\Big)^{2p}\binom{2p}{2}\mathbb{E}\Big[(M_T^*)^{2p-2}\langle M\rangle_T\Big] \leq \Big(\frac{2p}{2p-1}\Big)^{2p}\binom{2p}{2}\mathbb{E}\big[(M_T^*)^{2p}\big]^{1-1/p}\mathbb{E}\big[(\langle M\rangle_T)^p\big]^{1/p},$$

et donc

$$\mathbb{E}\big[(M_T^*)^{2p}\big]^{1/p} \leq \Big(\frac{2p}{2p-1}\Big)^{2p}\binom{2p}{2}\mathbb{E}\big[(\langle M\rangle_T)^p\big]^{1/p},$$

ce qui correspond bien au résultat attendu.

II. Cas général.

On revient aux hypothèses contenues dans l'énoncé du théorème.

Pour $n \geq 1$, on considère le temps d'arrêt $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$. On sait par la proposition 1.8 que le processus stoppé M^{τ_n} est une martingale. Cette martingale est bornée (par n), et par le corollaire 1.19, on a $\langle M^{\tau_n}\rangle = \langle M\rangle^{\tau_n}$. En appliquant le résultat du cas I, on obtient ainsi

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq t\leq T}|M_{t\wedge\tau_n}|\Big)^{2p}\Big] \leq c_p\,\mathbb{E}\Big[\big|\langle M\rangle_{\tau_n\wedge T}\big|^p\Big],$$

avec c_p une constante indépendante de n. Les deux suites de variables aléatoires $n \mapsto \sup_{0\leq t\leq T}|M_{t\wedge\tau_n}|$ et $n \mapsto |\langle M\rangle_{\tau_n\wedge T}|$ sont croissantes (puisque $n \mapsto \tau_n$ est croissante): nous sommes en mesure d'appliquer le théorème de convergence monotone, qui conduit à l'inégalité souhaitée.

□

Corollaire-Définition 1.22. *Etant données deux martingales M, N continues et de carré intégrable, il existe un unique processus, noté $\langle M, N\rangle$ et appelé* crochet de M et N, *qui soit: (i) nul en 0 (p.s.); (ii) continu (p.s.); (iii) à variation totale finie; (iv) tel que $MN - \langle M, N\rangle$ soit une martingale.*

Remarque 1.23. En utilisant le lemme 1.17, on constate facilement que $\langle M, M\rangle = \langle M\rangle$.

Preuve.

Unicité. Si A et B sont deux processus remplissant les conditions, alors en particulier $B - A = (MN - A) - (MN - B)$ est une martingale continue, nulle en 0 et à variation totale finie: on peut appliquer le lemme 1.17 pour affirmer que $B - A = 0$ p.s.

Existence. On s'inspire simplement de l'identité $MN = \frac{1}{4}(M+N)^2 - \frac{1}{4}(M-N)^2$ pour définir

$$\langle M, N\rangle := \frac{1}{4}\langle M+N\rangle - \frac{1}{4}\langle M-N\rangle.$$

En effet, de cette façon, on a

$$MN - \langle M, N\rangle = \frac{1}{4}\Big[(M+N)^2 - \langle M+N\rangle\Big] - \frac{1}{4}\Big[(M-N)^2 - \langle M-N\rangle\Big]$$

et donc $MN - \langle M, N\rangle$ est bien une martingale.

□

1.5. **Exercices.**

Exercice 1.24. Soient X et Y deux processus sur $[0,T]$. Montrer que si Y est une modification de X, et X et Y sont continus sur $[0,T]$ (p.s.), alors X et Y sont indistinguables l'un de l'autre.

Preuve. Soit $(\tilde{\Omega}_t)_{t\in[0,T]}$ les événements (de probabilité 1) issus de la définition d'une modification, c'est-à-dire: pour tout $t \in [0,T]$ et tout $\omega \in \tilde{\Omega}_t$, $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$. Par ailleurs, soit $\bar{\Omega}$ un événement de probabilité 1 sur lequel les fonctions $t \mapsto X_t$ et $t \mapsto Y_t$ sont continues. Considérons alors l'événement

$$\tilde{\Omega} := \bar{\Omega} \cap \big(\cap_{t\in[0,T]\cap\mathbb{Q}} \tilde{\Omega}_t \big) \in \mathcal{F}\,.$$

L'événement $\tilde{\Omega}$ est une intersection *dénombrable* d'événements de probabilité 1: il s'agit donc d'un événement de probabilité 1.

Fixons ensuite $\omega \in \tilde{\Omega}$. On sait que $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ pour tout $t \in [0,T]\cap\mathbb{Q}$, et que les fonctions $t \mapsto X_t(\omega)$, $t \mapsto Y_t(\omega)$ sont continues: par densité de $[0,T]\cap\mathbb{Q}$ dans $[0,T]$, l'identité $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ s'étend immédiatement à tout $t \in [0,T]$, ce qui fournit le résultat escompté. □

Exercice 1.25. Soit $\{W_t,\, t \geq 0\}$ un mouvement brownien. Montrer que, relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ générée par W, on a $\langle W\rangle_t = t$ pour tout $t \geq 0$.

Preuve. Le processus $t \mapsto t$ est bien continu, nul en 0 et croissant. Il suffit donc de vérifier que le processus $t \mapsto M_t := W_t^2 - t$ est une martingale continue.

Pour tout $t \geq 0$, $W_t \in \mathcal{F}_t$, et donc $M_t \in \mathcal{F}_t$. Ensuite, pour tout $t \geq 0$, on sait que $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, donc $W_t \in \cap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$, et par conséquent $M_t \in L^1(\Omega)$. Enfin, pour tous $s \leq t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[M_t\big|\mathcal{F}_s\big] &= \mathbb{E}\big[W_t^2\big|\mathcal{F}_s\big] - t \\
&= \mathbb{E}\big[(W_t - W_s + W_s)^2\big|\mathcal{F}_s\big] - t \\
&= \mathbb{E}\big[(W_t - W_s)^2\big|\mathcal{F}_s\big] + 2\mathbb{E}\big[W_s(W_t - W_s)\big|\mathcal{F}_s\big] + \mathbb{E}\big[W_s^2\big|\mathcal{F}_s\big] - t\,.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Comme $W_s \in \mathcal{F}_s$ et $W_t - W_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$, on obtient $\mathbb{E}\big[W_s^2\big|\mathcal{F}_s\big] = W_s^2$,

$$\mathbb{E}\big[W_s(W_t - W_s)\big|\mathcal{F}_s\big] = W_s\mathbb{E}\big[W_t - W_s\big|\mathcal{F}_s\big] = W_s\mathbb{E}\big[W_t - W_s\big] = 0\,,$$

et

$$\mathbb{E}\big[(W_t - W_s)^2\big|\mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big[(W_t - W_s)^2\big] = t - s.$$

En revenant à (1.37), on déduit

$$\mathbb{E}\big[M_t\big|\mathcal{F}_s\big] = (t-s) + W_s^2 - t = W_s^2 - s = M_s,$$

ce qui conclut la preuve.

□

Exercice 1.26. Soit $\{W_t,\, t \geq 0\}$ un mouvement brownien.

(i) Montrer que, relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ générée par W, et pour tout $\alpha > 0$, le processus $M_t^\alpha := \exp\big(\alpha W_t - \frac{\alpha^2}{2} t\big)$ est une martingale continue de carré intégrable. Montrer ensuite que

$$\langle M^\alpha\rangle_t = \alpha^2 \int_0^t \exp\big(2\alpha W_r - \alpha^2 r\big)\, dr\,.$$

(Rappel: si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, alors $\mathbb{E}\big[e^{\lambda X}\big] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}$.)

(ii) Notons $S_t := \sup_{0\leq s\leq t} W_s$. Montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\exp\big(\alpha S_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\big) \leq \sup_{0\leq s\leq t} M_s^\alpha\,.$$

En déduire, à l'aide de l'inégalité de Doob, que pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}\big(S_t \geq at\big) \leq \exp\big(-\frac{a^2 t}{2}\big)\,.$$

Preuve. (*i*) Pour tout $t \geq 0$, $W_t \in \mathcal{F}_t$, donc $M^\alpha_t \in \mathcal{F}_t$. Ensuite, pour tout $t \geq 0$, $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, donc $\exp(\lambda W_t) \in L^1(\Omega)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et par conséquent $M^\alpha_t \in \cap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$. Par ailleurs, W étant continu (p.s), il est clair que M^α l'est également. Enfin, pour tous $s \leq t$, et comme $W_s \in \mathcal{F}_s$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[M^\alpha_t\big|\mathcal{F}_s\big] &= \mathbb{E}\Big[\exp\big(\alpha W_t - \frac{\alpha^2}{2}t\big)\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\ &= \exp\big(\alpha W_s - \frac{\alpha^2}{2}t\big)\mathbb{E}\Big[\exp\big(\alpha(W_t - W_s)\big)\Big|\mathcal{F}_s\Big]\,. \end{aligned}\tag{1.38}$$

Puisque $W_t - W_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ et $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, on a

$$\mathbb{E}\Big[\exp\big(\alpha(W_t - W_s)\big)\Big|\mathcal{F}_s\Big] = \mathbb{E}\Big[\exp\big(\alpha(W_t - W_s)\big)\Big] = \exp\big(\frac{\alpha^2}{2}(t-s)\big)\,.$$

En revenant à (1.38), on déduit

$$\mathbb{E}\big[M^\alpha_t\big|\mathcal{F}_s\big] = \exp\big(\alpha W_s - \frac{\alpha^2}{2}t\big)\exp\big(\frac{\alpha^2}{2}(t-s)\big) = \exp\big(\alpha W_s - \frac{\alpha^2}{2}s\big) = M^\alpha_s\,.$$

Ainsi, M^α est bien une martingale continue de carré intégrable.

Notons temporairement $V^\alpha_t := \alpha^2 \int_0^t \exp\big(2\alpha W_r - \alpha^2 r\big)\,dr$. On a d'abord $V^\alpha_0 = 0$. Ensuite, comme W est continu (p.s), il en est de même pour V^α. Notons par ailleurs que V^α est clairement croissant (le processus que l'on intégre étant toujours positif).

Il reste à montrer que le processus $t \mapsto (M^\alpha_t)^2 - V^\alpha_t$ *est une martingale continue.* À cette fin, observons d'abord que $(M^\alpha_t)^2 - V^\alpha_t \in \mathcal{F}_t$ (car $W_r \in \mathcal{F}_t$ pour tout $0 \leq r \leq t$), et que $t \mapsto (M^\alpha_t)^2 - V^\alpha_t$ est continu p.s. Ensuite, comme $\exp(\lambda W_t) \in L^1(\Omega)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et $\mathbb{E}\big[\exp(\lambda W_t)\big] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}$, il est clair que $(M^\alpha_t)^2 - V^\alpha_t \in L^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(M^\alpha_t)^2 - V^\alpha_t\big|\mathcal{F}_s\big] &= \mathbb{E}\Big[\exp\big(2\alpha W_t - \alpha^2 t\big) - \alpha^2\int_0^t \exp\big(2\alpha W_r - \alpha^2 r\big)\,dr\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\ &= \exp\big(2\alpha W_s - \alpha^2 t\big)\mathbb{E}\Big[\exp\big(2\alpha(W_t - W_s)\big)\Big|\mathcal{F}_s\Big] - \alpha^2\int_0^s \exp\big(2\alpha W_r - \alpha^2 r\big)\,dr\\ &\quad - \alpha^2\mathbb{E}\Big[\int_s^t \exp\big(2\alpha W_r - \alpha^2 r\big)\,dr\Big|\mathcal{F}_s\Big]\,. \end{aligned}\tag{1.39}$$

Comme $W_t - W_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ et $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, on a

$$\mathbb{E}\Big[\exp\big(2\alpha(W_t - W_s)\big)\Big|\mathcal{F}_s\Big] = \mathbb{E}\Big[\exp\big(2\alpha(W_t - W_s)\big)\Big] = \exp\big(2\alpha^2(t-s)\big)\,.\tag{1.40}$$

Souvenons-nous par ailleurs que le *processus* $\{W_r - W_s,\ r \geq s\}$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$, ce qui entraîne

$$\int_s^t \exp\big(2\alpha(W_r - W_s) - \alpha^2 r\big)\,dr \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s\,.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\int_s^t \exp\big(2\alpha W_r-\alpha^2 r\big)\,dr\Big|\mathcal{F}_s\Big] &= \exp\big(2\alpha W_s\big)\mathbb{E}\Big[\int_s^t \exp\big(2\alpha(W_r-W_s)-\alpha^2 r\big)\,dr\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\
&= \exp\big(2\alpha W_s\big)\mathbb{E}\Big[\int_s^t \exp\big(2\alpha(W_r-W_s)-\alpha^2 r\big)\,dr\Big]\\
&= \exp\big(2\alpha W_s\big)\int_s^t \mathbb{E}\Big[\exp\big(2\alpha(W_r-W_s)\big)\Big]\exp\big(-\alpha^2 r\big)\,dr\\
&= \exp\big(2\alpha W_s\big)\int_s^t \exp\big(2\alpha^2(r-s)\big)\exp\big(-\alpha^2 r\big)\,dr\\
&= \exp\big(2\alpha W_s-2\alpha^2 s\big)\int_s^t \exp\big(\alpha^2 r\big)\,dr\\
&= \exp\big(2\alpha W_s-2\alpha^2 s\big)\frac{1}{\alpha^2}\big(\exp\big(\alpha^2 t\big)-\exp\big(\alpha^2 s\big)\big)\,. \qquad (1.41)
\end{aligned}$$

En injectant (1.40) et (1.41) dans (1.39), on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[(M_t^\alpha)^2-V_t^\alpha\big|\mathcal{F}_s\big]\\
&= \exp\big(2\alpha W_s-\alpha^2 t\big)\exp\big(2\alpha^2(t-s)\big)-\alpha^2\int_0^s \exp\big(2\alpha W_r-\alpha^2 r\big)\,dr\\
&\qquad\qquad -\exp\big(2\alpha W_s-2\alpha^2 s\big)\big(\exp\big(\alpha^2 t\big)-\exp\big(\alpha^2 s\big)\big)\\
&= \exp\big(2\alpha W_s\big)\big[e^{-\alpha^2 t}e^{2\alpha^2(t-s)}-e^{-2\alpha^2 s}\big(e^{\alpha^2 t}-e^{\alpha^2 s}\big)\big]-\alpha^2\int_0^s \exp\big(2\alpha W_r-\alpha^2 r\big)\,dr\\
&= \exp\big(2\alpha W_s-\alpha^2 s\big)-\alpha^2\int_0^s \exp\big(2\alpha W_r-\alpha^2 r\big)\,dr\\
&= (M_s^\alpha)^2-V_s^\alpha\,.
\end{aligned}$$

Nous sommes en mesure de conclure que

$$\langle M^\alpha\rangle_t = V_t^\alpha = \alpha^2\int_0^t \exp\big(2\alpha W_r-\alpha^2 r\big)\,dr\,.$$

(ii) Soit $t_0\in[0,t]$ (aléatoire) tel que $S_t=W_{t_0}$. On a alors

$$\exp\big(\alpha S_t-\frac{\alpha^2 t}{2}\big)=\exp\big(\alpha W_{t_0}-\frac{\alpha^2 t_0}{2}\big)\exp\big(-\frac{\alpha^2}{2}(t-t_0)\big)\leq \exp\big(\alpha W_{t_0}-\frac{\alpha^2 t_0}{2}\big)=M_{t_0}^\alpha\leq \sup_{0\leq s\leq t} M_s^\alpha\,.$$

Dès lors, pour tout $a>0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(S_t\geq at\big) &= \mathbb{P}\Big(\exp\big(\alpha S_t-\frac{\alpha^2 t}{2}\big)\geq \exp\big(\alpha a t-\frac{\alpha^2 t}{2}\big)\Big)\\
&\leq \mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq s\leq t} M_s^\alpha\geq \exp\big(\alpha a t-\frac{\alpha^2 t}{2}\big)\Big) \;\leq\; \mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq s\leq t} |M_s^\alpha|\geq \exp\big(\alpha a t-\frac{\alpha^2 t}{2}\big)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Nous pouvons à présent appliquer l'inégalité de Doob (théorème 1.9) à la martingale continue M^α pour déduire

$$\mathbb{P}\big(S_t\geq at\big)\leq \exp\big(-\alpha a t+\frac{\alpha^2 t}{2}\big)\mathbb{E}\big[|M_t^\alpha|\big]\,.$$

Comme M^α est toujours positive, on a en fait $\mathbb{E}\big[|M_t^\alpha|\big]=\mathbb{E}\big[M_t^\alpha\big]$, et puisqu'il s'agit d'une martingale, son espérance est constante, donc

$$\mathbb{E}\big[M_t^\alpha\big]=\mathbb{E}\big[M_0^\alpha\big]=1\,.$$

Ainsi, on a montré que

$$\mathbb{P}\big(S_t\geq at\big)\leq \exp\big(-\alpha a t+\frac{\alpha^2 t}{2}\big)$$

et l'inégalité recherchée est obtenue en prenant $a=\alpha$.

□

2. Les équations différentielles stochastiques: généralités

2.1. **Généralités.** Quelques grandes idées à garder à l'esprit:

(1) *Équation différentielle stochastique*: un terme a priori très général. Littéralement:
• *différentielle* $\longrightarrow$ impliquant des dérivées
• *stochastique* $\longrightarrow$ impliquant des termes aléatoires.

(2) Il existe néanmoins des modèles d'équations de référence ("classiques"): l'objectif de ces quelques heures de cours est d'en donner un aperçu.

(3) Les techniques pour "traiter ces équations" peuvent être très différentes d'un type d'équation à l'autre.

Bien entendu, cette diversité des techniques est déjà présente pour les équations différentielles *déterministes* (= sans terme aléatoire): par exemple, on ne peut pas traiter l'équation de la chaleur $\partial_t y = \partial_x^2 y$ avec les mêmes techniques qu'une équation ordinaire $\partial_t y = f(y)$ (cf opérateur borné/non-borné, etc).

(4) *"Stochastic PDEs are ubiquitous in mathematical modeling."* (I. Corwin and H. Shen: Some recent progress in singular stochastic partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.* **57** (2020), 409-454).

Remarque 2.1. Qu'entend-on par "traiter une équation (stochastique)"? En général:
• Interprétation de l'équation
• Résolution: existence (locale/globale/"temps d'explosion"), unicité de la solution. Équation localement/globalement "bien posée" (well-posed): équation qui admet une unique solution locale/globale (+ parfois: continuité vis-à-vis de la condition initiale).
• Approximation/simulation des solutions
• Propriétés "déterministes" de la solution: régularité, dépendance vis-à-vis de la condition initiale (ou d'autres paramètres), comportement asymptotique,...
• Propriétés "stochastiques" de la solution: (semi)martingale, processus de Markov, contrôle des moments, existence d'une densité...
• ...

2.2. **Quelques modèles de référence.**

Ces différents modèles auront une structure globale similaire:

"Equation différentielle déterministe classique + Perturbation stochastique".

Commençons par évoquer le modèle différentiel le plus standard de la théorie des processus stochastiques: l'EDO stochastique.

2.2.1. *L'équation différentielle ordinaire (EDO) stochastique.*

Le modèle général:
$$\frac{dY_t}{dt} = b(t, Y_t) + \sigma(t, Y_t)\frac{dW_t}{dt} \ , \ Y_0 = a \ , \quad t \in [0,T], \tag{2.1}$$
où $a \in \mathbb{R}$, $b, \sigma : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et surtout W *est un processus stochastique*, c'est-à-dire
$$\boxed{W : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}, \text{ avec } (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \text{ un espace de probabilité.}}$$
Conséquence immédiate: la solution (potentielle) Y dépendra elle-même d'un aléa $\omega \in \Omega$. Ainsi, *moralement*, l'équation doit être comprise comme: pour tous $t \in [0,T]$ et $\omega \in \Omega$,
$$\frac{dY_t(\omega)}{dt} = b(t, Y_t(\omega)) + \sigma(t, Y_t(\omega))\frac{dW_t(\omega)}{dt} \ , \ Y_0(\omega) = a \ . \tag{2.2}$$

Modèle le plus classique, sur lequel nous nous concentrerons:

$$\boxed{W \text{ est un mouvement brownien.}}$$

Toutefois, l'interprétation directe (= à ω fixé) de (2.2)) pose alors des difficultés: cf lemme 1.17 et surtout proposition 2.4 à venir.

Les motivations derrière le modèle (2.1)) (en présence d'un mouvement brownien) sont très nombreuses:

• SVT: croissance de population, climatologie,... Phénomènes de diffusion (déplacement de particules d'une zone hautement concentrée à une zone faiblement concentrée sous l'action de forces aléatoires)

• finance (modèle Black-Scholes,...)

• Lien avec certains modèles d'EDP *déterministes*.

Tournons nous à présent vers la présentation de modèles différentiels nettement moins standards, et qui donnent véritablement naissance à la théorie des EDP stochastiques.

2.2.2. *L'équation de la chaleur stochastique.*

Le modèle général:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial t} = \Delta_x Y + f(Y) + \sigma(Y)\dfrac{\partial^{d+1} W}{\partial t \partial x_1 \cdots \partial x_d} \ , \quad t \in [0,T],\, x \in D, \\ Y(0,.) = \Phi \ , \end{cases} \tag{2.3}$$

où D est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $\Delta_x Y := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 Y}{\partial x_i^2}$, $f(Y)_t(x) := f(Y_t(x))$, $\sigma(Y)_t(x) := \sigma(Y_t(x))$ avec $f, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Phi : D \to \mathbb{R}$, et surtout

$$\boxed{W : ([0,T] \times D) \times \Omega \to \mathbb{R} \text{ est un } \textit{champ stochastique.}}$$

– –

Définition 2.2. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité. On appellera* champ stochastique *toute application* $X : A \times \Omega \to \mathbb{R}$ *(où* A *est un sous-ensemble de* $\mathbb{R}^d$*,* $d \geq 1$*) telle que, pour tout* $a \in A$*,* $X_a : \Omega \to \mathbb{R}$ *est une variable aléatoire.*

Remark 2.3. Un processus stochastique (au sens de la définition 1.2) est aussi un champ stochastique. On réservera toutefois la terminologie champ stochastique au cas où A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$, *avec* $d \geq 2$.

– –

Modèle le plus classique $\to$ W est un *champ brownien* (= extension multiparamétrique du mouvement brownien, voir définition 4.6)

Possibles motivations derrière (2.3):

• Aléa "intrinsèque": évolution de la température d'une barre soumise à une multitude de forces aléatoires (immersion dans un liquide,...).

• Aléa "extrinsèque": quantification d'une incertitude liée (par exemple) à l'imprécision de la mesure (artéfact, parasite).

Extension possible du modèle: *opérateurs paraboliques* plus généraux.

2.2.3. *L'équation des ondes stochastique.*
Le modèle général:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \Delta_x Y + f(Y) + \sigma(Y)\dfrac{\partial^{d+1} W}{\partial t \partial x_1 \cdots \partial x_d} \ , \quad t \in [0,T],\, x \in D, \\ Y(0,.) = \Phi \ , \ \dfrac{\partial Y}{\partial t}(0,.) = \Psi \ , \end{cases} \tag{2.4}$$

où D est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $\Delta_x Y := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 Y}{\partial x_i^2}$, $f(Y)_t(x) := f(Y_t(x))$, $\sigma(Y)_t(x) := \sigma(Y_t(x))$ avec $f, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Phi, \Psi : D \to \mathbb{R}$, et $W : ([0,T] \times D) \times \Omega \to \mathbb{R}$ est un champ stochastique (typiquement, un champ brownien).

Possibles motivations derrière (2.4)):
- Corde vibrante dans un milieu "aléatoire" (par ex, brin d'ADN).
- Neurophysiologie (cf livre Walsh [6]).

Extension possible du modèle: *opérateurs hyperboliques* plus généraux.

2.2.4. *L'équation KPZ.*
Le modèle général:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \Big(\dfrac{\partial Y}{\partial x}\Big)^2 + \dfrac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} \ , \quad t \in [0,T],\, x \in \mathbb{R}, \\ Y(0,.) = \Phi \ , \end{cases} \tag{2.5}$$

où $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $W : ([0,T] \times \mathbb{R}) \times \Omega \to \mathbb{R}$ est un champ stochastique.

Possibles motivations derrière (2.5)):
- Description de l'évolution de la frontière d'une surface (par ex, combustion d'une feuille de papier).
- Limite de plusieurs modèles discrets d'évolution aléatoire (par ex, frontière créée par des particulières en interaction).

Cas du champ brownien:
- Manipulé depuis longtemps par les physiciens.
- Traitement mathématique rigoureux: Martin Hairer (2013) $\Rightarrow$ médaille Fields 2014.

2.3. **La difficulté essentielle.**

Soit $\{W_t,\, t \geq 0\}$ un mouvement brownien sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Par le lemme 1.17, on sait déjà que, comme W est une martingale non constante, ce n'est pas un processus à variation totale finie (en particulier, $t \mapsto W_t$ n'est de classe $\mathcal{C}^1$ sur aucun intervalle). On peut même aller plus loin:

Proposition 2.4. *Pour presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto W_t(\omega)$ n'est dérivable en aucun point.*

Preuve (sous forme d'exercice).
(i) Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en un temps $t \in [0,1]$. Montrer qu'il existe deux entiers $L_t, N_t \geq 1$ tels que pour tout $k \geq N_t$, on a, si $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ est tel que $\frac{i}{k} \leq t < \frac{i+1}{k}$,

$$\Big| g\Big(\frac{j+1}{k}\Big) - g\Big(\frac{j}{k}\Big) \Big| \leq \frac{L_t}{k} \qquad \text{pour } j \in \{i, i+1, i+2\}\,.$$

Par définition, il existe deux constantes $g'(t) \in \mathbb{R}$ et $H_t > 0$ telles que pour tout $0 \leq h \leq H_t$,

$$\Big| \frac{1}{h}\big(g(t+h) - g(t)\big) - g'(t) \Big| \leq 1\,,$$

ce qui entraîne
$$\big|g(t+h)-g(t)\big| \leq h(|g'(t)|+1)\,.$$
Soit $N_t \geq 1$ un entier tel que $\frac{3}{N_t} \leq H_t$. Pour tout $k \geq N_t$, si $i \in \{0,\ldots,k-1\}$ est tel que $\frac{i}{k} \leq t < \frac{i+1}{k}$ et $j \in \{i,i+1,i+2\}$, on a
$$\Big|\frac{j+1}{k}-t\Big| \leq \frac{3}{k} \leq H_t \quad \text{et} \quad \Big|\frac{j}{k}-t\Big| \leq \frac{2}{k} \leq H_t\,,$$
donc, d'après ce qui est écrit ci-dessus,
$$\Big|g\Big(\frac{j+1}{k}\Big)-g\Big(\frac{j}{k}\Big)\Big| \leq \Big|g\Big(t+(\frac{j+1}{k}-t)\Big)-g(t)\Big| + \Big|g\Big(t+(\frac{j}{k}-t)\Big)-g(t)\Big| \leq \frac{5}{k}(|g'(t)|+1)\,.$$
Il suffit finalement de définir L_t comme le plus petit entier tel que $5(|g'(t)|+1) \leq L_t$.

(ii) Soit W un mouvement brownien, et, pour tout $t \geq 0$, notons D_t l'événement
$$D_t := \{\omega \in \Omega:\, W(\omega) \text{ est dérivable en } t\}.$$
Montrer que la réunion $\bigcup_{t\in[0,1]} D_t$ est contenue dans l'événement
$$\Gamma := \bigcup_{\ell\geq 1}\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n}\bigcup_{i=0}^{k-1}\bigcap_{j=i}^{i+2}\Big\{\Big|W\Big(\frac{j+1}{k}\Big)-W\Big(\frac{j}{k}\Big)\Big| \leq \frac{\ell}{k}\Big\}.$$

C'est une traduction immédiate du point (i). En effet, si $\omega \in \bigcup_{t\in[0,1]} D_t$, il existe $t \in [0,1]$, $L_t(\omega), N_t(\omega) \geq 1$ tels que pour pour tous $k \geq N_t$, on a, en prenant $i = i(t,k) \in \{0,\ldots,k-1\}$ tel que $\frac{i}{k} \leq t < \frac{i+1}{k}$,
$$\Big|W\Big(\frac{j+1}{k}\Big)-W\Big(\frac{j}{k}\Big)\Big| \leq \frac{L_t}{k} \qquad \text{pour } j \in \{i,i+1,i+2\}\,.$$

(iii) Montrer que pour tout $j \geq 0$,
$$\mathbb{P}\Big(\Big|W\Big(\frac{j+1}{k}\Big)-W\Big(\frac{j}{k}\Big)\Big| \leq \frac{\ell}{k}\Big) \leq \frac{2\ell}{(2\pi k)^{\frac12}}\,,$$
et en déduire, à l'aide des propriétés d'indépendance de W, que $\mathbb{P}(\Gamma)=0$.

On sait que $W\big(\frac{j+1}{k}\big)-W\big(\frac{j}{k}\big) \sim \mathcal{N}\big(0,\frac{1}{k}\big)$, donc
$$\mathbb{P}\Big(\Big|W\Big(\frac{j+1}{k}\Big)-W\Big(\frac{j}{k}\Big)\Big| \leq \frac{\ell}{k}\Big) = \int_{|x|\leq\frac{\ell}{k}} \frac{k^{\frac12}}{(2\pi)^{\frac12}} e^{-\frac{x^2}{2}k}\,dx \leq \int_{|x|\leq\frac{\ell}{k}} \frac{k^{\frac12}}{(2\pi)^{\frac12}}\,dx = \frac{2\ell}{(2\pi k)^{\frac12}}\,.$$
En notant, pour tous $\ell, k \geq 1$,
$$\Gamma^{(\ell,k)} := \bigcup_{i=0}^{k-1}\bigcap_{j=i}^{i+2}\Big\{\Big|W\Big(\frac{j+1}{k}\Big)-W\Big(\frac{j}{k}\Big)\Big| \leq \frac{\ell}{k}\Big\}$$
on a, grâce à l'indépendance des incréments disjoints de W,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Gamma^{(\ell,k)}) &\leq \sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j=i}^{i+2}\Big\{\Big|W\Big(\frac{j+1}{k}\Big)-W\Big(\frac{j}{k}\Big)\Big| \leq \frac{\ell}{k}\Big\}\Big) = \sum_{i=0}^{k-1}\prod_{j=i}^{i+2}\mathbb{P}\Big(\Big|W\Big(\frac{j+1}{k}\Big)-W\Big(\frac{j}{k}\Big)\Big| \leq \frac{\ell}{k}\Big)\\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1}\Big(\frac{2\ell}{(2\pi k)^{\frac12}}\Big)^3 \leq \Big(\frac{2\ell}{(2\pi)^{\frac12}}\Big)^3\frac{1}{k^{\frac12}}\,.\end{aligned}$$
Ainsi, pour tout $\ell \geq 1$,
$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}(\Gamma^{(\ell,k)}) = 0\,.$$
Comme
$$\mathbb{P}(\Gamma) = \lim_{L,N\to\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{\ell=1}^{L}\bigcup_{n=1}^{N}\bigcap_{k\geq n}\Gamma^{(\ell,k)}\Big) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\ell=1}^{L}\bigcup_{n=1}^{N}\bigcap_{k\geq n}\Gamma^{(\ell,k)}\Big) \leq \sum_{\ell=1}^{L}\sum_{n=1}^{N}\Big(\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}(\Gamma^{(\ell,k)})\Big) = 0\,,$$
on obtient le résultat souhaité.

(iv) Conclure.

Nous venons de montrer que, p.s., la fonction $t \mapsto W_t$ n'est dérivable en aucun point $t \in [0,1]$.

On peut ensuite itérer le raisonnement en partant des processus $\{W_{t+1} - W_1,\, t \geq 0\}$, $\{W_{t+2} - W_2,\, t \geq 0\}$, etc... ces processus étant eux mêmes des mouvements browniens (cf remarque 1.5).

□

$\Longrightarrow$ Problème d'interprétation de la dérivée $\frac{dW_t}{dt}$ dans l'équation

$$\frac{dY_t}{dt} = b(t, Y_t) + \sigma(t, Y_t)\frac{dW_t}{dt} \ .$$

$\Longrightarrow$ Besoin d'étendre le calcul différentiel classique ("de Lebesgue") à des fonctions (aléatoires) non dérivables.

$\Longrightarrow$ Recours à l'intégrale d'Itô.

Évidemment, même problème d'irrégularité pour les champs browniens, et donc même difficulté d'interprétation des modèles d'EDP stochastiques (2.3)), (2.4)) et (2.5)).

$\Longrightarrow$ Extension de la théorie d'Itô à des champs browniens.

2.4. **Critère de Kolmogorov.**

Pour cerner au plus près la régularité du mouvement brownien, nous pouvons faire appel à un outil très puissant de l'analyse stochastique: le *critère de Kolmogorov*. L'énoncé de la version classique (c'est-à-dire uni-paramétrique) de ce résultat peut être trouvé dans [4, Theorem 1.8]. Nous énonçons ici directement l'extension multi-paramétrique du résultat (empruntée à [2, Theorem 1.4.1]), qui nous servira plusieurs fois par la suite.

Théorème 2.5 (Critère de Kolmogorov)**.** *Soit un entier $d \geq 0$, A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{d+1}$, et soit un champ stochastique $X : A \times \Omega \to \mathbb{R}$.*

Supposons que pour tout sous-ensemble compact I de A de la forme $I := [a_0, b_0] \times \ldots \times [a_d, b_d]$ (avec $a_i < b_i \in \mathbb{R}$), et pour tout $p \geq 1$, il existe une constante $c_{p,I}$ telle que pour tous $(x_0, \ldots, x_d), (y_0, \ldots, y_d) \in I$,

$$\mathbb{E}\Big[\big|X(y_0, y_1, \ldots, y_d) - X(x_0, x_1, \ldots, x_d)\big|^{2p}\Big] \leq c_{p,I} \sum_{i=0}^{d} |y_i - x_i|^{2\lambda_i p} \, ,$$

pour certains coefficients $0 < \lambda_i < 1$.

Alors il existe une modification continue $\widetilde{X}$ de X sur A telle que pour tout $I := [a_0, b_0] \times \ldots \times [a_d, b_d] \subset A$ (avec $a_i < b_i \in \mathbb{R}$), on a (p.s.)

$$\sup_{(x_0,\ldots,x_d) \neq (y_0,\ldots,y_d) \in I} \frac{\big|\widetilde{X}(y_0, y_1, \ldots, y_d) - \widetilde{X}(x_0, x_1, \ldots, x_d)\big|}{|y_0 - x_0|^{\gamma_0} + \cdots + |y_d - x_d|^{\gamma_d}} \ < \ \infty \, ,$$

pour tous $0 < \gamma_i < \lambda_i$.

Corollaire 2.6. *Soit $\{W_t,\, t \geq 0\}$ un mouvement brownien. Alors p.s, on a pour tout $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ et tout $T > 0$,*

$$\sup_{0 \leq s < t \leq T} \frac{\big|W_t - W_s\big|}{|t - s|^{\gamma}} \ < \ \infty \, . \tag{2.6}$$

Preuve. Par définition du mouvement brownien, on a $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, et donc

$$\mathbb{E}\big[|W_t - W_s|^{2p}\big] = c_p |t - s|^p \, .$$

Il existe ainsi une modification continue $\widetilde{W}$ de W qui vérifie (2.6). Comme W et $\widetilde{W}$ sont tous deux continus, on sait par le résultat de l'exercice (1.24) que les deux processus sont en fait indistinguables. □

3. L'équation différentielle ordinaire stochastique

Nous nous intéressons ici au modèle présenté dans la section 2.2.1, à savoir:

$$\frac{dY_t}{dt} = b(t, Y_t) + \sigma(t, Y_t)\frac{dW_t}{dt} \ , \ Y_0 = a \in \mathbb{R} \ , \quad t \in [0,T] \, , \tag{3.1}$$

où $b, \sigma : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $W : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ *désigne un mouvement brownien*, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Comme nous l'avons évoqué dans la section précédente, une première étape consiste à fournir une interprétation raisonnable de l'équation. C'est en fait la *forme intégrale* de l'équation que l'on va chercher à interpréter, autrement dit le modèle

$$Y_t = a + \int_0^t b(s, Y_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s)\, dW_s \ , \quad t \in [0,T] \, . \tag{3.2}$$

A ce stade toutefois, l'écriture $\int_0^t \sigma(s, Y_s)\, dW_s$ reste formelle (tout comme la dérivée $\frac{dW_t}{dt}$ dans (3.1)): nous allons lui donner un sens rigoureux par le biais de *l'intégrale d'Itô*.

3.1. **L'intégrale d'Itô contre le mouvement brownien.**

3.1.1. *Objectif.* Donner sens à l'intégrale

$$\int_0^t H_u\, dW_u \ , \tag{3.3}$$

pour une classe de processus stochastiques $H : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ suffisamment large (afin de pouvoir ensuite envisager l'interprétation et la résolution de (3.2) au sein de cette classe).

Comme nous allons le voir, la construction d'Itô de l'intégrale (3.3) s'appuie de façon essentielle sur les propriétés *stochastiques* du mouvement brownien W, qui vont permettre de surmonter le problème d'interprétation à ω fixé (cf la proposition 2.4).

3.1.2. *Construction de l'intégrale d'Itô.*

– –

Définition 3.1. *Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nous dirons qu'un processus $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ est adapté (à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) si pour tout $t \geq 0$, $X_t \in \mathcal{F}_t$.*

Remarque 3.2. La condition (i) de la définition 1.6 peut donc aussi s'écrire sous la forme "M est adaptée".

– –

Dans toute ce chapitre 3, nous considérerons uniquement la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} = (\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$ générée par W, autrement dit

$$\mathcal{F}_t := \sigma\text{-algèbre engendrée par } (W_s)_{0\leq s\leq t} \ .$$

Grâce aux propriétés du mouvement brownien, on sait en particulier que pour tous $s \leq t$, la variable aléatoire $W_t - W_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$.

Étape 1: Définition de l'intégrale pour un processus simple adapté.

Considérons d'abord l'ensemble $\mathcal{E}$ des processus *simples adaptés*, c'est-à-dire l'ensemble des processus $H : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ qui s'écrivent sous la forme d'une somme finie

$$H_t := \sum_i X_i \, \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(t) \ , \quad \text{où } 0 = t_0 < t_1 < \ldots < T \ ,$$

et, pour tout i, $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ *est une variable aléatoire bornée* ($\sup_{\omega\in\Omega} |X_i(\omega)| < \infty$) *et $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable.*

Remarque: si $t \in [t_i, t_{i+1})$, $H_t = X_i \in \mathcal{F}_{t_i} \subset \mathcal{F}_t$ (donc H est effectivement *adapté*).

Dans une telle situation, on *pose* naturellement

$$\int_0^T H_u \, dW_u := \sum_i X_i \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right) . \tag{3.4}$$

Avec les mêmes arguments que dans la construction de Lebesgue classique, on montre facilement:

Proposition 3.3. *L'ensemble $\mathcal{E}$ des processus simples adaptés forme un espace vectoriel, et pour tous $H, K \in \mathcal{E}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_0^T (\alpha H_u + \beta K_u) \, dW_u = \alpha \int_0^T H_u \, dW_u + \beta \int_0^T K_u \, dW_u .$$

Étape 2: Isométrie. Pour étendre la définition (3.4) à des intégrands H plus généraux, nous nous appuierons sur la propriété d'isométrie suivante:

Lemme 3.4 (Isométrie d'Itô)**.** *Pour tout processus simple adapté H,*

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T H_u \, dW_u \Big)^2 \Big] = \int_0^T \mathbb{E}\big[H_u^2 \big] \, du \ , \tag{3.5}$$

autrement dit l'application

$$H \longmapsto \int_0^T H_u \, dW_u$$

est une isométrie de $(\mathcal{E}, \|.\|_{L^2([0,T]\times\Omega)})$ dans $L^2(\Omega)$.

Preuve. Si $H_t = \sum_i X_i \, \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(t)$ avec $X_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ et $\sup_{\omega \in \Omega} |X_i(\omega)| < \infty$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T H_u \, dW_u \Big)^2 \Big] &= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_i X_i \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right) \Big)^2 \Big] \\ &= \sum_{i,j} \mathbb{E}\big[X_i X_j \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right) (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \big] . \end{aligned}$$

Or, pour $i < j$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\big[\underbrace{X_i X_j \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right)}_{\in \mathcal{F}_{t_j}} \underbrace{(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})}_{\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{t_j}} \big] \\ &= \ \mathbb{E}\big[X_i X_j \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right) \big] \mathbb{E}\big[W_{t_{j+1}} - W_{t_j} \big] \ = \ 0 \ , \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T H_u \, dW_u \Big)^2 \Big] &= \sum_i \mathbb{E}\big[\underbrace{X_i^2}_{\in \mathcal{F}_{t_i}} \underbrace{(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2}_{\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{t_i}} \big] \\ &= \sum_i \mathbb{E}\big[X_i^2 \big] \mathbb{E}\big[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \big] \\ &= \sum_i \mathbb{E}\big[X_i^2 \big] (t_{i+1} - t_i) \ = \ \int_0^T \mathbb{E}\big[H_u^2 \big] \, du \ . \end{aligned}$$

□

Étape 3: Argument de densité.

Lemme 3.5. *Étant donné un processus H adapté, continu p.p. (c'est-à-dire, p.s., la fonction $t \mapsto H_t$ est continue p.p.) et tel que*

$$\int_0^T \mathbb{E}\big[H_u^2 \big] \, du \ < \ \infty \ , \tag{3.6}$$

il existe une suite $(H^{(n)})_{n\geq 1}$ de processus simples adaptés telle que

$$\int_0^T \mathbb{E}\big[(H_u^{(n)} - H_u)^2\big]\, du \;\to\; 0 \ . \tag{3.7}$$

Preuve. Dans un souci de clarté, notons

$$\mathcal{H} := \{H \text{ processus adapté, continu p.p. et dans } L^2([0,T]\times\Omega)\} \ ,$$

$$\mathcal{B} := \{H \text{ processus adapté, continu p.p. et dans } L^\infty([0,T]\times\Omega)\} \ ,$$

et rappelons que $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des processus simples adaptés.

Nous allons montrer successivement que, pour la norme de $L^2([0,T]\times\Omega)$, $\mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{B}$, ce qui fournira le résultat escompté.

Densité de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{H}$. Étant donné $H \in \mathcal{H}$, il suffit de considérer la suite $(H^{(n)})_{n\geq 1}$ donnée pour tout $n \geq 1$ par

$$H_t^{(n)} := \Big\{ H_t \mathbf{1}_{\{|H_t|<n\}} + n\mathbf{1}_{\{H_t\geq n\}} - n\mathbf{1}_{\{H_t\leq -n\}} \Big\} \ .$$

On a bien $H^{(n)} \in \mathcal{B}$, et comme $|H_t^{(n)}| \leq |H_t|$, nous sommes en mesure d'invoquer le théorème de convergence dominée pour affirmer que $H^{(n)} \to H$ dans $L^2([0,T]\times\Omega)$.

Densité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{B}$. Soit $H \in \mathcal{B}$. Pour tout $n \geq 1$ et $t \in [0,T]$, on pose

$$H_t^{(n)} := \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i^n}\, \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n)}(t) \ , \quad t_i^n := \frac{iT}{n} \ .$$

Comme H est adapté et appartient à $L^\infty([0,T]\times\Omega)$, on a bien, pour tout $n\geq 1$, $H^{(n)} \in \mathcal{E}$. Par ailleurs, on peut vérifier que $H_t^{(n)} \to H_t$ en tout point de continuité t de H, donc presque partout. Nous sommes donc une nouvelle fois en mesure d'appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer que

$$\big\| H^{(n)} - H \big\|_{L^2([0,T]\times\Omega)}^2 \to 0 \quad \text{quand } n\to\infty \ .$$

□

3.1.3. *Définition générale de l'intégrale.*

Étant donné un processus $H : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$ adapté, continu p.p. et vérifiant (3.6), nous savons désormais, grâce à l'étape 3 ci-dessus, qu'il existe une suite $(H^{(n)})_{n\geq 1}$ de processus simples adaptés qui converge vers H au sens de (3.7). Par ailleurs, en faisant appel à la propriété d'isométrie établie à l'étape 2, nous pouvons immédiatement voir que la suite des intégrales stochastiques $\int_0^T H_u^{(n)}\, dW_u$ (définies à l'étape 1) est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Nous avons ainsi justifié la définition qui suit:

Définition 3.6. *Soit $H : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$ un processus adapté, continu p.p. et tel que*

$$\int_0^T \mathbb{E}\big[H_u^2\big]\, du \;<\; \infty \ .$$

On appelle intégrale d'Itô de H contre W, et on note

$$\int_0^T H_u\, dW_u \ ,$$

la limite, dans $L^2(\Omega)$, de la suite $\int_0^T H_u^{(n)}\, dW_u$, pour toute suite $(H^{(n)})_{n\geq 1}$ de processus simples adaptés telle que

$$\int_0^T \mathbb{E}\big[(H_u^{(n)} - H_u)^2\big]\, du \;\to\; 0 \ . \tag{3.8}$$

3.1.4. *Quelques propriétés de l'intégrale d'Itô.*

On fixe un processus H adapté, continu p.p. et tel que $\int_0^T \mathbb{E}\big[H_u^2\big]\, du < \infty$. En particulier, l'intégrale d'Itô $\int_0^T H_s\, dW_s$ est bien définie via la définition 3.6.

Proposition 3.7. *On a*

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T H_u\, dW_u\Big] = 0 \quad et \quad \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T H_u\, dW_u\Big)^2\Big] = \int_0^T \mathbb{E}\big[H_u^2\big]\, du\ .$$

Preuve. Soit $(H^{(n)})_{n\geq 1}$ une suite de processus simples adaptés telle que la condition (3.8) soit vérifiée. Il est facile de voir, à partir de (3.4) et (3.5), que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T H_u^{(n)}\, dW_u\Big] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T H_u^{(n)}\, dW_u\Big)^2\Big] = \int_0^T \mathbb{E}\big[(H_u^{(n)})^2\big]\, du\ .$$

Comme $\int_0^T H_u^{(n)}\, dW_u \to \int_0^T H_u\, dW_u$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to \infty$, le passage à la limite dans les deux identités ci-dessus est facile à justifier. □

Le résultat suivant fait maintenant le lien avec le chapitre 1 du cours.

Proposition 3.8. *Le processus*

$$t \longmapsto \mathcal{J}_t := \int_0^t H_s\, dW_s \quad \Big(= \int_0^T H_s \mathbf{1}_{[0,t[}(s)\, dW_s\Big) \tag{3.9}$$

est une martingale continue de crochet

$$\langle \mathcal{J} \rangle_t = \int_0^t H_s^2\, ds\,. \tag{3.10}$$

Preuve. Soit $(H^{(n)})_{n\geq 1}$ une suite de processus simples adaptés vérifiant (3.8), et notons

$$\mathcal{J}_t^{(n)} := \int_0^t H_u^{(n)}\, dW_u \quad \Big(= \int_0^T H_u^{(n)} \mathbf{1}_{[0,t[}(u)\, dW_u\Big)\,.$$

Étape 1: on montre qu'à n fixé, $\mathcal{J}^{(n)}$ est une martingale continue de crochet $\langle \mathcal{J}^{(n)} \rangle_t = \int_0^t (H_s^{(n)})^2\, ds$.

En notant $H^{(n)} = \sum_i X_i^{(n)}\, \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}$ (avec $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < T$, $\sup_{\omega\in\Omega} |X_i(\omega)| < \infty$ et $X_i \in \mathcal{F}_{t_i^n}$), on a, si $t \in [t_\ell^n, t_{\ell+1}^n[$,

$$H^{(n)} \mathbf{1}_{[0,t[} = \sum_{i=0}^{\ell-1} X_i^{(n)}\, \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[} + X_\ell^{(n)}\, \mathbf{1}_{[t_\ell^n, t[} + 0 \cdot \mathbf{1}_{[t,T[}$$

et donc par définition, pour tout $t \in [t_\ell^n, t_{\ell+1}^n[$,

$$\mathcal{J}_t^{(n)} = \int_0^T H_u^{(n)} \mathbf{1}_{[0,t[}(u)\, dW_u = \sum_{i=0}^{\ell-1} X_i^{(n)} \big\{W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}\big\} + X_\ell^{(n)} \big\{W_t - W_{t_\ell^n}\big\}\,.$$

À partir de cette écriture, il apparaît clairement que $\mathcal{J}_t^{(n)} \in \mathcal{F}_t$ et que $\mathcal{J}_t^{(n)}$ est intégrable, pour tout $t \in [0,T]$. Par ailleurs, la continuité (p.s) de $\mathcal{J}^{(n)}$ découle aisément de la continuité (p.s) de W.

Ensuite, pour $s \leq t$ fixés, soit $k \leq \ell$ tels que $t_k^n \leq s < t_{k+1}^n < \ldots < t_\ell^n \leq t < t_{\ell+1}^n$. Si $k = \ell$, on a

$$\mathbb{E}\Big[\mathcal{J}_t^{(n)} - \mathcal{J}_s^{(n)}\Big|\mathcal{F}_s\Big] = \mathbb{E}\Big[X_k^{(n)} \big\{W_t - W_s\big\}\Big|\mathcal{F}_s\Big] = X_k^{(n)} \mathbb{E}\big[W_t - W_s\big|\mathcal{F}_s\big] = X_k^{(n)} \mathbb{E}\big[W_t - W_s\big] = 0\,.$$

Par ailleurs, si $k < \ell$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_t^{(n)} - \mathcal{J}_s^{(n)} &= \sum_{i=k}^{\ell-1} X_i^{(n)} \big\{W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}\big\} + X_\ell^{(n)} \big\{W_t - W_{t_\ell^n}\big\} - X_k^{(n)} \big\{W_s - W_{t_k^n}\big\} \\ &= \sum_{i=k+1}^{\ell-1} X_i^{(n)} \big\{W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}\big\} + X_\ell^{(n)} \big\{W_t - W_{t_\ell^n}\big\} + X_k^{(n)} \big\{W_{t_{k+1}^n} - W_s\big\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Or

$$\mathbb{E}\Big[X_k^{(n)}\{W_{t_{k+1}^n}-W_s\}\Big|\mathcal{F}_s\Big]=X_k^{(n)}\,\mathbb{E}[W_{t_{k+1}^n}-W_s]=0\,,$$

et de même

$$\begin{aligned}&\sum_{i=k+1}^{\ell-1}\mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\}\Big|\mathcal{F}_s\Big]+\mathbb{E}\Big[X_\ell^{(n)}\{W_t-W_{t_\ell^n}\}\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\ &\quad=\sum_{i=k+1}^{\ell-1}\mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}\mathbb{E}\Big[\{W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\}\Big|\mathcal{F}_{t_i^n}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big]+\mathbb{E}\Big[X_\ell^{(n)}\mathbb{E}\Big[\{W_t-W_{t_\ell^n}\}\Big|\mathcal{F}_{t_\ell^n}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big]\;=\;0\,,\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}\Big[\mathcal{J}_t^{(n)}-\mathcal{J}_s^{(n)}\Big|\mathcal{F}_s\Big]=0\,.$$

À ce stade, nous avons donc établi que pour tout $n\geq 1$, $\mathcal{J}^{(n)}$ était une martingale continue.

La preuve de l'identité

$$\langle\mathcal{J}^{(n)}\rangle_t=\int_0^t(H_s^{(n)})^2\,ds$$

est laissée en exercice (elle permet en effet de se familiariser à la fois avec la définition du crochet et avec les propriétés du mouvement brownien).

Pour montrer que $\langle\mathcal{J}^{(n)}\rangle_t=\int_0^t(H_s^{(n)})^2\,ds$, vérifions que ce dernier processus satisfait les quatre conditions qui apparaissent dans le théorème-définition 1.11. Observons tout d'abord que pour tout $t\in[0,T]$ et tout $s\in[0,t]$, $H_s^{(n)}\in\mathcal{F}_t$, donc $\int_0^t(H_s^{(n)})^2\,ds\in\mathcal{F}_t$ (en tant que limite d'applications $\mathcal{F}_t$-mesurables). Ensuite, on a évidemment $\int_0^0(H_s^{(n)})^2\,ds=0$. Pour le point (iii), notons que la fonction $t\mapsto\int_0^t(H_s^{(n)})^2\,ds$ est bien croissante.

Enfin, pour établir que le processus $t\mapsto\big(\mathcal{J}_t^{(n)}\big)^2-\int_0^t(H_r^{(n)})^2\,dr$ est une martingale, fixons $s\leq t$ tels que $t_k^n\leq s<t_{k+1}^n<\ldots<t_\ell^n\leq t<t_{\ell+1}^n$, et supposons $k<\ell$ (le cas $k=\ell$ pourrait être traité avec les mêmes arguments).

Notons d'abord que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\int_0^t(H_r^{(n)})^2\,dr-\int_0^s(H_r^{(n)})^2\,dr\Big|\mathcal{F}_s\Big]=\mathbb{E}\Big[\int_s^t(H_r^{(n)})^2\,dr\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\ &=(t_{k+1}^n-s)(X_k^{(n)})^2+\sum_{i=k+1}^{\ell-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)\mathbb{E}\big[(X_i^n)^2\big|\mathcal{F}_s\big]+(t-t_\ell^n)\mathbb{E}\big[(X_\ell^n)^2\big|\mathcal{F}_s\big].\end{aligned}\tag{3.12}$$

Écrivons ensuite

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[(\mathcal{J}_t^{(n)})^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]&=\mathbb{E}\Big[(\mathcal{J}_s^{(n)}+\mathcal{J}_t^{(n)}-\mathcal{J}_s^{(n)})^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\ &=(\mathcal{J}_s^{(n)})^2+2\mathcal{J}_s^{(n)}\mathbb{E}\Big[\mathcal{J}_t^{(n)}-\mathcal{J}_s^{(n)}\Big|\mathcal{F}_s\Big]+\mathbb{E}\Big[(\mathcal{J}_t^{(n)}-\mathcal{J}_s^{(n)})^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]\,.\end{aligned}\tag{3.13}$$

En utilisant la décomposition (3.11), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\mathcal{J}_t^{(n)}-\mathcal{J}_s^{(n)}\Big|\mathcal{F}_s\Big]&=\sum_{i=k+1}^{\ell-1}\mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\}\Big|\mathcal{F}_s\Big]+\mathbb{E}\Big[X_\ell^{(n)}\{W_t-W_{t_\ell^n}\}\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\ &\qquad+\mathbb{E}\Big[X_k^{(n)}\{W_{t_{k+1}^n}-W_s\}\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\ &=\sum_{i=k+1}^{\ell-1}\mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}\mathbb{E}\Big[W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\Big|\mathcal{F}_{t_i^n}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big]+\mathbb{E}\Big[X_\ell^{(n)}\mathbb{E}\Big[W_t-W_{t_\ell^n}\Big|\mathcal{F}_{t_\ell^n}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big]+X_k^{(n)}\mathbb{E}\Big[W_{t_{k+1}^n}-W_s\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\ &=0.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Toujours suivant (3.11), on a par ailleurs

$$\mathbb{E}\Big[(\mathcal{J}_t^{(n)}-\mathcal{J}_s^{(n)})^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]$$
$$=\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=k+1}^{\ell-1}X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\}+X_\ell^{(n)}\{W_t-W_{t_\ell^n}\}+X_k^{(n)}\{W_{t_{k+1}^n}-W_s\}\Big)^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]$$
$$=\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=k+1}^{\ell-1}X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\}\Big)^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]+\mathbb{E}\Big[\big(X_\ell^{(n)}\big)^2\{W_t-W_{t_\ell^n}\}^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]+\mathbb{E}\Big[\big(X_k^{(n)}\big)^2\{W_{t_{k+1}^n}-W_s\}^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]$$
$$+2\sum_{i=k+1}^{\ell-1}\mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\}X_\ell^{(n)}\{W_t-W_{t_\ell^n}\}\Big|\mathcal{F}_s\Big]+2\sum_{i=k+1}^{\ell-1}\mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\}X_k^{(n)}\{W_{t_{k+1}^n}-W_s\}\Big|\mathcal{F}_s\Big]$$
$$+2\mathbb{E}\Big[X_\ell^{(n)}\{W_t-W_{t_\ell^n}\}X_k^{(n)}\{W_{t_{k+1}^n}-W_s\}\Big|\mathcal{F}_s\Big]$$
$$=\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=k+1}^{\ell-1}X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\}\Big)^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]+\mathbb{E}\Big[\big(X_\ell^{(n)}\big)^2\mathbb{E}\Big[\{W_t-W_{t_\ell^n}\}^2\Big|\mathcal{F}_{t_\ell^n}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big]+\big(X_k^{(n)}\big)^2\mathbb{E}\Big[\{W_{t_{k+1}^n}-W_s\}^2\Big]$$
$$+2\sum_{i=k+1}^{\ell-1}\mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\}X_\ell^{(n)}\mathbb{E}\Big[\{W_t-W_{t_\ell^n}\}\Big|\mathcal{F}_{t_\ell^n}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big]$$
$$+2\sum_{i=k+1}^{\ell-1}\mathbb{E}\Big[X_k^{(n)}\{W_{t_{k+1}^n}-W_s\}X_i^{(n)}\mathbb{E}\Big[\{W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\}\Big|\mathcal{F}_{t_i^n}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big]$$
$$+2\,\mathbb{E}\Big[X_\ell^{(n)}X_k^{(n)}\{W_{t_{k+1}^n}-W_s\}\mathbb{E}\Big[\{W_t-W_{t_\ell^n}\}\Big|\mathcal{F}_{t_\ell^n}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big]$$
$$=\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=k+1}^{\ell-1}X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\}\Big)^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]+(t-t_\ell^n)\mathbb{E}\big[\big(X_\ell^{(n)}\big)^2\big|\mathcal{F}_s\big]+\big(X_k^{(n)}\big)^2(t_{k+1}^n-s)\,, \tag{3.15}$$

puis

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=k+1}^{\ell-1}X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\}\Big)^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]$$
$$=\sum_{i=k+1}^{\ell-1}\mathbb{E}\Big[\big(X_i^{(n)}\big)^2\{W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\}^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]+2\sum_{k+1\le i<j\le\ell-1}\mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\}X_j^{(n)}\{W_{t_{j+1}^n}-W_{t_j^n}\}\Big|\mathcal{F}_s\Big]$$
$$=\sum_{i=k+1}^{\ell-1}\mathbb{E}\Big[\big(X_i^{(n)}\big)^2\{W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\}^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]+2\sum_{k+1\le i<j\le\ell-1}\mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\}X_j^{(n)}\{W_{t_{j+1}^n}-W_{t_j^n}\}\Big|\mathcal{F}_s\Big]$$
$$=\sum_{i=k+1}^{\ell-1}\mathbb{E}\Big[\big(X_i^{(n)}\big)^2\mathbb{E}\Big[\{W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\}^2\Big|\mathcal{F}_{t_i^n}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big]$$
$$+2\sum_{k+1\le i<j\le\ell-1}\mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\}X_j^{(n)}\mathbb{E}\Big[\{W_{t_{j+1}^n}-W_{t_j^n}\}\Big|\mathcal{F}_{t_j^n}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big]$$
$$=\sum_{i=k+1}^{\ell-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)\mathbb{E}\big[\big(X_i^{(n)}\big)^2\big|\mathcal{F}_s\big]\,. \tag{3.16}$$

En injectant (3.14), (3.15) et (3.16) dans (3.13), on déduit

$$\mathbb{E}\Big[(\mathcal{J}_t^{(n)})^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]=(\mathcal{J}_s^{(n)})^2+(t_{k+1}^n-s)(X_k^{(n)})^2+\sum_{i=k+1}^{\ell-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)\mathbb{E}\big[(X_i^n)^2\big|\mathcal{F}_s\big]+(t-t_\ell^n)\mathbb{E}\big[(X_\ell^n)^2\big|\mathcal{F}_s\big]\,,$$

ce qui, combiné à (3.12), conduit finalement à l'identité souhaitée:

$$\mathbb{E}\Big[(\mathcal{J}_t^{(n)})^2-\int_0^t (H_r^{(n)})^2\,dr\Big|\mathcal{F}_s\Big]=(\mathcal{J}_s^{(n)})^2-\int_0^s (H_r^{(n)})^2\,dr\,.$$

Étape 2: continuité de $\mathcal{J}$.

En utilisant l'étape 1, on peut affirmer que pour tous $m,n\geq 1$, le processus $\mathcal{J}^{(m)}-\mathcal{J}^{(n)}$ est une martingale continue, et par conséquent, en utilisant successivement l'inégalité de Doob (théorème 1.9) et le fait que $\mathcal{J}_T^{(n)}\to\mathcal{J}_T$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{t\in[0,T]}\big|\mathcal{J}_t^{(m)}-\mathcal{J}_t^{(n)}\big|\Big)^2\Big]\leq 4\,\mathbb{E}\Big[\big|\mathcal{J}_T^{(m)}-\mathcal{J}_T^{(n)}\big|^2\Big]\overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow}0\,.$$

Nous constatons de cette façon que la suite de fonctions aléatoires $([0,T]\to\mathbb{R},\ t\mapsto\mathcal{J}_t^{(n)})$ est de Cauchy dans l'espace $L^2(\Omega;\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}))$, où $\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$, muni de la norme du supremum. Comme $(\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$ est un espace de Banach, il en est de même pour $L^2(\Omega;\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}))$, et donc, par unicité de la limite, la convergence de $\mathcal{J}^{(n)}$ vers $\mathcal{J}$ a lieu dans cet espace. Il existe finalement une sous-suite $\mathcal{J}^{(n_k)}$ telle que $\|\mathcal{J}^{(n_k)}-\mathcal{J}\|_{\infty;[0,T]}\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$ *p.s.* Comme $\mathcal{J}^{(n_k)}$ est continue (p.s.), sa limite uniforme est aussi continue (p.s).

Étape 3: $\mathcal{J}$ est une martingale continue de crochet donnée par (3.10). Observons tout d'abord que pour tout $t\in[0,T]$ fixé, $\mathcal{J}_t$ est (par définition) limite de $\mathcal{J}_t^{(n)}$ dans $L^2(\Omega)$, donc il existe une sous-suite $(\mathcal{J}_t^{(n_k)})_{k\geq 1}$ qui converge vers $\mathcal{J}_t$ p.s: les applications $\mathcal{J}_t^{(n_k)}$ étant $\mathcal{F}_t$-mesurables (cf étape 1), il en est de même pour $\mathcal{J}_t$.

Ensuite, pour montrer l'identité $\mathbb{E}\big[\mathcal{J}_t\big|\mathcal{F}_s\big]=\mathcal{J}_s$ pour tous $s\leq t$, il suffit de passer à la limite, dans $L^2(\Omega)$, dans la relation (obtenue à l'étape 1)

$$\mathbb{E}\big[\mathcal{J}_t^{(n)}\big|\mathcal{F}_s\big]=\mathcal{J}_s^{(n)}\,.$$

En effet, en utilisant l'inégalité de Jensen, on a

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\mathbb{E}\big[\mathcal{J}_t^{(n)}\big|\mathcal{F}_s\big]-\mathbb{E}\big[\mathcal{J}_t\big|\mathcal{F}_s\big]\Big|^2\Big]=\mathbb{E}\Big[\Big|\mathbb{E}\big[\mathcal{J}_t^{(n)}-\mathcal{J}_t\big|\mathcal{F}_s\big]\Big|^2\Big]\leq\mathbb{E}\Big[\big|\mathcal{J}_t^{(n)}-\mathcal{J}_t\big|^2\Big]\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\,.$$

De même, pour déduire (3.10), il suffit de passer à la limite, dans $L^1(\Omega)$, dans la relation (obtenue à l'étape 1)

$$\mathbb{E}\Big[(\mathcal{J}_t^{(n)})^2-\int_0^t (H_r^{(n)})^2\,dr\Big|\mathcal{F}_s\Big]=(\mathcal{J}_s^{(n)})^2-\int_0^s (H_r^{(n)})^2\,dr\,.$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big|\mathbb{E}\Big[(\mathcal{J}_t^{(n)})^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]-\mathbb{E}\Big[(\mathcal{J}_t)^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]\Big|\Big]&=\mathbb{E}\Big[\Big|\mathbb{E}\Big[(\mathcal{J}_t^{(n)})^2-(\mathcal{J}_t)^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]\Big|\Big]\\&\leq\mathbb{E}\Big[\Big|(\mathcal{J}_t^{(n)})^2-(\mathcal{J}_t)^2\Big|\Big]\\&\leq\mathbb{E}\Big[\big|\mathcal{J}_t^{(n)}+\mathcal{J}_t\big|\big|\mathcal{J}_t^{(n)}-\mathcal{J}_t\big|\Big]\leq\mathbb{E}\Big[\big|\mathcal{J}_t^{(n)}+\mathcal{J}_t\big|^2\Big]^{\frac12}\mathbb{E}\Big[\big|\mathcal{J}_t^{(n)}-\mathcal{J}_t\big|^2\Big]^{\frac12}\,.\end{aligned}$$

Or on sait que $\mathcal{J}_t^{(n)}\to\mathcal{J}_t$ dans $L^2(\Omega)$, ce qui garantit à la fois

$$\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}\Big[\big|\mathcal{J}_t^{(n)}+\mathcal{J}_t\big|^2\Big]<\infty\quad\text{et}\quad\mathbb{E}\Big[\big|\mathcal{J}_t^{(n)}-\mathcal{J}_t\big|^2\Big]\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\,.$$

□

Corollaire 3.9. *Pour tout $p\geq 1$, il existe une constante $c_p>0$ telle que*

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t H_s\,dW_s\Big|\Big)^{2p}\Big]\leq c_p\,\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T H_s^2\,ds\Big)^p\Big]\,.\tag{3.17}$$

Preuve. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy (corollaire 1.20) à la martingale $\mathcal{J}$ définie par (3.9). □

Corollaire 3.10. *Soit $\mathcal{J}$ le processus défini par* (3.9)*, et supposons que H est borné. Alors p.s, on a pour tout $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ et tout $T > 0$,*

$$\sup_{0 \leq s < t \leq T} \frac{\big|\mathcal{J}_t - \mathcal{J}_s\big|}{|t-s|^\gamma} \ < \ \infty \, . \tag{3.18}$$

Preuve. En appliquant l'inégalité (3.17), on déduit, pour tout $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}\Big[\big|\mathcal{J}_t - \mathcal{J}_s\big|^{2p}\Big] \leq c_p \, \mathbb{E}\bigg[\Big(\int_s^t H_u^2 \, du\Big)^p\bigg] \leq c_p c_H^{2p} \, |t-s|^p \, ,$$

où $c_H > 0$ est une constante déterministe qui borne H. Le résultat (3.18) découle à présent de l'application du critère de Kolmogorov (théorème 2.5). □

3.2. **Interprétation et résolution de l'équation.**

L'interprétation découle naturellement de la construction précédente:

Définition 3.11. *Étant donnés un mouvement brownien $W : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$, un réel a et deux applications continues $b : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on appelle solution (sur $[0,T]$)* au sens d'Itô *de l'équation*

$$dY_t = b(t, Y_t) \, dt + \sigma(t, Y_t) \, dW_t \ , \quad Y_0 = a \ , \quad t \in [0,T] \ ,$$

tout processus Y adapté, continu, vérifiant, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\int_0^t \mathbb{E}\big[\sigma(s, Y_s)^2\big] \, ds \ < \ \infty \ ,$$

et

$$Y_t = a + \int_0^t b(s, Y_s) \, ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s) \, dW_s \ ,$$

où l'intégrale (contre W) est comprise au sens d'Itô.

Le résultat le plus classique d'existence et d'unicité d'une solution s'énonce comme suit:

Théorème 3.12. *Soit W un mouvement brownien et $b, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications continues telles qu'il existe une constante $c_{b,\sigma} > 0$ pour laquelle*

$$|b(x)| + |\sigma(x)| \leq c_{b,\sigma}$$

et

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq c_{b,\sigma} \, |x - y| \ , \tag{3.19}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Alors, pour toute condition initiale $a \in \mathbb{R}$, l'équation

$$dY_t = b(Y_t) \, dt + \sigma(Y_t) \, dW_t \ , \quad Y_0 = a \ , \ t \in [0,T] \, , \tag{3.20}$$

admet une unique solution (sur $[0,T]$) au sens d'Itô.

Remarque 3.13. Dans ce dernier énoncé, l'unicité doit être comprise *à indistinguabilité près*, autrement dit: si Y et $\tilde{Y}$ sont deux solutions (au sens d'Itô) de l'équation (3.20)), alors Y et $\tilde{Y}$ sont indistinguables (cf section 1.1).

Remarque 3.14. Axes d'extension *potentiels* pour ce résultat d'existence et d'unicité:

- b et σ moins "réguliers": par ex non bornés, ou non Lipschitz, etc. Parfois: existence locale seulement (sur $[0, T_0(\omega)]$), non unicité, etc.
- on remplace la condition initale a (déterministe) par une variable aléatoire $A : \Omega \to \mathbb{R}$. Par exemple, si A est indépendante de W et si $\mathbb{E}[A^2] < \infty$, on peut utiliser les mêmes arguments que dans la preuve qui suit.

Preuve.

Existence. Soit $(Y^{(n)})_{n\geq 1}$ la suite de processus définie par le schéma d'itération de Picard: $Y_t^{(0)} := a$ et

$$Y_t^{(n+1)} := a + \int_0^t b(Y_s^{(n)})\, ds + \int_0^t \sigma(Y_s^{(n)})\, dW_s\ . \tag{3.21}$$

(i) (*Exercice*) Montrer, par récurrence sur $n \geq 0$, que $Y^{(n)}$ est bien défini, est adapté et est continu (p.s.).

Pour $n = 0$, le résultat est trivial. Supposons cette propriété vraie pour un certain $n \geq 0$.

On sait alors que $\sigma(Y^{(n)})$ est adapté (puisque $Y^{(n)}$ l'est) et continu (puisque $Y^{(n)}$ et σ le sont). Par ailleurs, comme σ est bornée, il est clair que $\int_0^T \mathbb{E}\big[\sigma\big(Y_s^{(n)}\big)^2\big]\, ds < \infty$. L'intégrale d'Itô $\int_0^t \sigma(Y_s^{(n)})\, dW_s$ est donc bien définie, ce qui garantit par là même la bonne définition de $Y^{(n+1)}$.

Le fait que $Y_t^{(n+1)}$ soit $\mathcal{F}_t$-mesurable découle ensuite du fait que les intégrales $\int_0^t b(Y_s^{(n)})\, ds$ et $\int_0^t \sigma(Y_s^{(n)})\, dW_s$ sont toutes deux $\mathcal{F}_t$-mesurables, en tant que limites d'applications $\mathcal{F}_t$-mesurables (voir l'étape 3 de la preuve de la proposition 3.8).

Enfin, la continuité de $Y^{(n+1)}$ est une conséquence de la proposition 3.8.

(ii) (*Exercice*) Montrer que

$$\mathbb{E}\big[|Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}|^2\big] \leq c_{b,\sigma,T} \int_0^t \mathbb{E}\big[|Y_s^{(n)} - Y_s^{(n-1)}|^2\big]\, ds\ , \tag{3.22}$$

pour une certaine constante $c_{b,\sigma,T} > 0$.

On a

$$Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)} := \int_0^t \big[b(Y_s^{(n)}) - b(Y_s^{(n-1)})\big]\, ds + \int_0^t \big[\sigma(Y_s^{(n)}) - \sigma(Y_s^{(n-1)})\big]\, dW_s\ . \tag{3.23}$$

Or, d'une part, en utilisant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la condition (3.19), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t \big[b(Y_s^{(n)}) - b(Y_s^{(n-1)})\big]\, ds\Big|^2\Big] &\leq T\int_0^t \mathbb{E}\Big[\big|b(Y_s^{(n)}) - b(Y_s^{(n-1)})\big|^2\Big]\, ds\\ &\leq (c_{b,\sigma})^2 T\int_0^t \mathbb{E}\Big[\big|Y_s^{(n)} - Y_s^{(n-1)}\big|^2\Big]\, ds\,.\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant successivement l'isométrie d'Itô et la condition (3.19), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t \big[\sigma(Y_s^{(n)}) - \sigma(Y_s^{(n-1)})\big]\, dW_s\Big|^2\Big] &= \int_0^t \mathbb{E}\Big[\big|\sigma(Y_s^{(n)}) - \sigma(Y_s^{(n-1)})\big|^2\Big]\, ds\\ &\leq (c_{b,\sigma})^2\int_0^t \mathbb{E}\Big[\big|Y_s^{(n)} - Y_s^{(n-1)}\big|^2\Big]\, ds\,.\end{aligned}$$

En revenant à (3.23), on déduit immédiatement l'estimation désirée:

$$\mathbb{E}\big[|Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}|^2\big] \leq c_{b,\sigma,T} \int_0^t \mathbb{E}\big[|Y_s^{(n)} - Y_s^{(n-1)}|^2\big]\, ds\ ,$$

avec $c_{b,\sigma,T} := 2(c_{b,\sigma})^2(1+T)$.

(iii) Conclusion.

En itérant l'inégalité (3.22), on obtient, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[|Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}|^2\big] &\leq c_{b,\sigma,T} \int_0^t \mathbb{E}\big[|Y_{s_n}^{(n)} - Y_{s_n}^{(n-1)}|^2\big]\, ds_n \\ &\leq (c_{b,\sigma,T})^2 \int_0^t \int_0^{s_n} \mathbb{E}\big[|Y_{s_{n-1}}^{(n-1)} - Y_{s_{n-1}}^{(n-2)}|^2\big]\, ds_{n-1}\, ds_n \\ &\leq \ldots \leq (c_{b,\sigma,T})^n \int_{0<s_1<\ldots<s_n<t} \mathbb{E}\big[|Y_{s_1}^{(1)} - Y_{s_1}^{(0)}|^2\big]\, ds_1 \cdots ds_n \ .\end{aligned}$$

Or nous disposons bien entendu de l'expression explicite

$$Y_{s_1}^{(1)} - Y_{s_1}^{(0)} = b(a)s_1 + \sigma(a)W_{s_1}$$

ce qui permet finalement d'affirmer que pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\big[|Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}|^2\big] &\leq 2(c_{b,\sigma,T})^n (c_{b,\sigma})^2 (T^2+T) \int_{0<s_1<\ldots<s_n<T} ds_1 \cdots ds_n \\ &\leq 2\frac{(c_{b,\sigma,T}\, T)^n}{n!}(c_{b,\sigma})^2(T^2+T) \ .\end{aligned}$$

Cette inégalité montre (en particulier) que la suite de processus $(Y^{(n)})_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans l'espace (complet) $L^\infty([0,T];L^2(\Omega))$: cette suite converge donc dans l'espace en question. Notons Y sa limite.

En revenant à la relation (3.21) définissant la suite $Y^{(n)}$, on montre ensuite, avec les mêmes arguments qu'au point (ii), que (*exercice*)

$$\mathbb{E}\bigg[\bigg|\int_0^t \big[b(Y_s^{(n)}) - b(Y_s)\big]\, ds\bigg|^2\bigg] \leq (c_{b,\sigma})^2 T \int_0^t \mathbb{E}\Big[\big|Y_s^{(n)} - Y_s\big|^2\Big]\, ds \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ ,$$

et de même

$$\mathbb{E}\bigg[\bigg|\int_0^t \big[\sigma(Y_s^{(n)}) - \sigma(Y_s)\big]\, dW_s\bigg|^2\bigg] \leq (c_{b,\sigma})^2 \int_0^t \mathbb{E}\Big[\big|Y_s^{(n)} - Y_s\big|^2\Big]\, ds \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

On constate ainsi que le processus Y est bien solution de l'équation (3.20).

Unicité. Soit $Y, \tilde{Y}$ deux solutions de l'équation.

(i) (*Exercice*) Montrer qu'en posant $h_t := \sup_{0\leq s\leq t} \mathbb{E}\big[|Y_s - \tilde{Y}_s|^2\big]$, on a

$$h_t \leq c_{b,\sigma,T} \int_0^t h_s\, ds \ , \tag{3.24}$$

pour une certaine constante $c_{b,\sigma,T} > 0$.

Avec les mêmes arguments qu'au point (ii) ci-dessus, on obtient facilement, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}\big[|Y_t - \tilde{Y}_t|^2\big] \leq c_{b,\sigma,T} \int_0^t \mathbb{E}\big[|Y_s - \tilde{Y}_s|^2\big]\, ds \leq c_{b,\sigma,T} \int_0^t h_s\, ds \ .$$

L'inégalité (3.24) en découle immédiatement.

(ii) Conclusion.

En itérant (3.24), on obtient, pour tout $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}0 \leq h_T &\leq c_{b,\sigma,T} \int_0^T h_{s_m}\, ds_m \\ &\leq (c_{b,\sigma,T})^2 \int_0^T \int_0^{s_m} h_{s_{m-1}}\, ds_{m-1}\, ds_m \\ &\leq \ldots \leq (c_{b,\sigma,T})^m \int_{0<s_1<\ldots<s_m<T} h_{s_1}\, ds_1 \cdots ds_m \leq \frac{(c_{b,\sigma,T}\, T)^m}{m!} h_T \ ,\end{aligned}$$

et donc, en faisant tendre m vers l'infini, on obtient effectivement $h_T = 0$ (on aurait également pu appliquer le lemme de Gronwall).

Ceci permet d'affirmer dans un premier temps que Y et $\tilde{Y}$ sont modifications l'un de l'autre (cf section 1.1). Or nous savons, par définition même d'une solution, que ces deux processus sont continus (p.s). Nous sommes par conséquent en mesure d'invoquer le résultat de l'exercice 1.24 pour conclure: les processus Y et $\tilde{Y}$ sont bien indistinguables.

□

Proposition 3.15. *Sous les hypothèses du théorème 3.12, et en utilisant les mêmes notations, on a p.s, pour tout* $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ *et tout* $T > 0$,

$$\sup_{0 \leq s < t \leq T} \frac{\left|Y_t - Y_s\right|}{|t-s|^\gamma} \ < \ \infty \, .$$

Preuve. Puisque b et σ sont supposées bornées, le résultat découle immédiatement du corollaire 3.10. □

Comme nous l'évoquions dans la remarque 2.1, les propriétés de l'équation (3.20) *et de sa solution* Y *peuvent être examinées sous de multiples angles ("déterministes" et/ou "stochastiques"). Nous n'aurons malheureusement pas le temps de développer davantage cette analyse dans le cadre de ce cours.*

4. L'équation de la chaleur stochastique

Nous nous concentrerons sur l'étude du modèle le plus standard, à savoir le modèle dirigé par un champ brownien, c'est-à-dire:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma(u)\dfrac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} \ , \quad t \in [0,T],\, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,.) = \Phi \ , \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, $\sigma(u)_t(x) := \sigma(u_t(x))$ et $W : ([0,T] \times \mathbb{R}) \times \Omega \to \mathbb{R}$ est un *champ brownien* sur $[0,T] \times \mathbb{R}$.

4.1. **Le champ brownien.** Pour une bonne définition de ce champ stochastique, procédons d'abord à quelques rappels généraux sur les *familles gaussiennes.*

Définition 4.1. *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble quelconque. Une famille de variables aléatoires $\{X_a,\, a \in \mathcal{A}\}$ (à valeurs réelles) est dite gaussienne si pour tout $k \geq 1$, tous $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{A}$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\sum_{i=1}^k \lambda_i X_{a_i}$ est gaussienne.*

Définition 4.2. *Étant donné un ensemble $\mathcal{A}$ quelconque, on appelle fonction de covariance sur $\mathcal{A}$ toute fonction $C : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ symétrique (c'est-à-dire $C(x,y) = C(y,x)$ pour tous $x, y \in \mathcal{A}$) et positive (c'est-à-dire $\sum_{i,j=1}^k \alpha_i \alpha_j C(x_i, x_j) \geq 0$ pour tous $k \geq 1$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $x_i \in \mathcal{A}$).*

Proposition 4.3. *Étant données une fonction $m : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ et une fonction de covariance $C : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, il existe une unique famille gaussienne $\{X_a,\, a \in \mathcal{A}\}$ de moyenne m ($\mathbb{E}[X_a] = m(a)$) et de covariance C, c'est-à-dire*

$$\mathbb{E}\big[(X_{a_1} - \mathbb{E}[X_{a_1}])(X_{a_2} - \mathbb{E}[X_{a_2}])\big] = C(a_1, a_2) \ .$$

Remarque 4.4. La propriété d'unicité dans la proposition 4.3 est à comprendre comme une unicité *au sens des lois de dimension finie*, c'est-à-dire: si $\{X_a,\, a \in \mathcal{A}\}$ et $\{\widetilde{X}_a,\, a \in \mathcal{A}\}$ sont deux familles gaussiennes, définies respectivement sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$, de même moyenne et de même covariance, alors pour tout $k \geq 1$, tous $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{A}$ et tout borélien B de $\mathbb{R}^k$, on aura

$$\mathbb{P}\big((X_{a_1}, \dots, X_{a_k}) \in B\big) = \widetilde{\mathbb{P}}\big((\widetilde{X}_{a_1}, \dots, \widetilde{X}_{a_k}) \in B\big) \, .$$

À partir des considérations ci-dessus, nous pouvons revisiter la définition du mouvement brownien:

Proposition 4.5. *Le mouvement brownien $(W_t)_{t \geq 0}$ est l'unique processus gaussien continu tel que pour tout $s, t \geq 0$,*

$$\mathbb{E}[W_t] = 0 \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}[W_s W_t] = R(s,t) \, , \qquad \textit{où} \;\; R(s,t) = \frac{1}{2}\big(|s| + |t| - |t-s|\big) \, .$$

Définition 4.6. *Soit $T > 0$ et $d \geq 1$. On appelle* champ brownien *(sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$) le champ gaussien $W : ([0,T] \times \mathbb{R}^d) \times \Omega \to \mathbb{R}$ continu (= p.s., $(t,x) \mapsto W_t(x)$ est continue) tel que pour tous $s, t \in [0,T]$, $x, y \in \mathbb{R}^d$,*

$$\mathbb{E}\big[W_s(x)\big] = 0 \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}\big[W_s(x) W_t(y)\big] = R(s,t) \prod_{i=1}^d R(x_i, y_i) \, , \tag{4.2}$$

où, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $R(a,b)$ est donné par

$$R(a,b) := \frac{1}{2}\big\{|a| + |b| - |a-b|\big\} \ . \tag{4.3}$$

Exercice 4.7. Vérifier que pour tous $a, b \geq 0$, $R(a,b) = \inf(a,b)$, et plus généralement que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$R(a,b) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,a]}(x)\mathbf{1}_{[0,b]}(x)\, dx \ , \tag{4.4}$$

avec la convention usuelle $\mathbf{1}_{[0,a]} := -\mathbf{1}_{[a,0]}$ si $a < 0$. En déduire que la formule

$$C((s,x),(t,y)) := R(s,t) \prod_{k=1}^{d} R(x^{(k)}, y^{(k)})$$

définit bien une fonction de covariance sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ (au sens de la définition 4.2).

Pour tous $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $(s_i, x_i) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, on a, en utilisant (4.4),

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j C\big((s_i,x_i),(s_j,x_j)\big) &= \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j R(s_i,s_j) \prod_{k=1}^{d} R(x_i^{(k)}, x_j^{(k)}) \\
&= \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \bigg(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,s_i]}(t)\mathbf{1}_{[0,s_j]}(t)\, dt \bigg) \prod_{k=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,x_i^{(k)}]}(y)\mathbf{1}_{[0,x_j^{(k)}]}(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \bigg(\sum_i \alpha_i \mathbf{1}_{[0,s_i]}(t)\mathbf{1}_{[0,x_i^{(1)}]}(y^{(1)}) \cdots \mathbf{1}_{[0,x_i^{(d)}]}(y^{(d)}) \bigg)^2 dt\, dy^{(1)} \cdots dy^{(d)} \ \geq \ 0 \ .
\end{aligned}$$

Exercice 4.8. Utiliser le critère de Kolmogorov (théorème 2.5) pour montrer que si $W : ([0,T]\times\mathbb{R}^d)\times\Omega \to \mathbb{R}$ est un champ brownien, alors on a p.s: pour tout $I = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_d,b_d]$, tout $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ et tous $0 < \beta_i < \frac{1}{2}$ $(i = 1,\ldots,d)$,

$$\sup_{(s,x)\neq(t,y)\in[0,T]\times I} \frac{\big|W_t(y) - W_s(x)\big|}{|t-s|^{\gamma} + |y_1 - x_1|^{\beta_1} + \ldots + |y_d - x_d|^{\beta_d}} \ < \ \infty \ .$$

Soit $I := [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_d,b_d]$ (avec $a_i < b_i \in \mathbb{R}$) et $(s,x),(t,y) \in [0,T] \times I$. Observons d'abord que, comme le champ W est gaussien, la variable $W_t(y) - W_s(x)$ est gaussienne, et par conséquent, pour tout $p \geq 2$,

$$\mathbb{E}\Big[\big|W_t(y) - W_s(x)\big|^p\Big] \leq c_p\, \mathbb{E}\Big[\big|W_t(y) - W_s(x)\big|^2\Big]^{\frac{p}{2}} \ , \tag{4.5}$$

pour une certaine constante $c_p > 0$ qui ne dépend que de p.

Ensuite, grâce à (4.2), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\big|W_t(y) - W_s(x)\big|^2\Big] &= \mathbb{E}\big[W_t(y)^2\big] - 2\mathbb{E}\big[W_t(y)W_s(x)\big] + \mathbb{E}\big[W_s(x)^2\big] \\
&= t\prod_{i=1}^{d} R(y_i,y_i) - 2s\prod_{i=1}^{d} R(x_i,y_i) + s\prod_{i=1}^{d} R(x_i,x_i) \\
&= (t-s)\prod_{i=1}^{d} R(y_i,y_i) \\
&\quad + s\bigg\{\bigg[\prod_{i=1}^{d} R(y_i,y_i) - \prod_{i=1}^{d} R(x_i,y_i)\bigg] + \bigg[\prod_{i=1}^{d} R(x_i,x_i) - \prod_{i=1}^{d} R(x_i,y_i)\bigg]\bigg\} \ .
\end{aligned} \tag{4.6}$$

À ce stade, on a d'une part

$$(t-s)\prod_{i=1}^{d} R(y_i,y_i) = (t-s)\prod_{i=1}^{d} |y_i| \leq c_I\, |t-s| \ .$$

D'autre part, si par exemple $d = 2$, on a

$$\begin{aligned}
&R(y_1,y_1)R(y_2,y_2) - R(x_1,y_1)R(x_2,y_2) \\
&= \big[R(y_1,y_1) - R(x_1,y_1)\big]R(y_2,y_2) + R(x_1,y_1)\big[R(y_2,y_2) - R(x_2,y_2)\big] \ ,
\end{aligned}$$

avec
$$\big|R(y_i,y_i)-R(x_i,y_i)\big| = \left|\frac{1}{2}(|y_i|-|x_i|)+\frac{1}{2}|y_i-x_i|\right| \leq |y_i-x_i| \ .$$
En revenant à (4.6), on déduit aisément
$$\mathbb{E}\Big[\big|W_t(y)-W_s(x)\big|^2\Big] \leq c_I\big\{|t-s|+\sum_{i=1}^d |y_i-x_i|\big\} \ ,$$
et donc, par (4.5),
$$\mathbb{E}\Big[\big|W_t(y)-W_s(x)\big|^p\Big] \leq c_{p,I}\big\{|t-s|^{\frac{p}{2}}+\sum_{i=1}^d |y_i-x_i|^{\frac{p}{2}}\big\} \ .$$
À partir de ces contrôles, le résultat attendu découle immédiatement du critère de Kolmogorov.

□

Remarque 4.9. La fonction R définie par (4.3) correspond en fait à la covariance du *mouvement brownien sur* $\mathbb{R}$, que l'on peut construire (et à vrai dire définir) à partir de deux mouvements browniens indépendants $W^{(1)}, W^{(2)}$ classiques (c'est-à-dire sur $\mathbb{R}_+$, cf la définition 1.3 ou la proposition 4.5), en posant, pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$W(a) := \begin{cases} W^{(1)}(a) & \text{si } a \geq 0 \\ W^{(2)}(-a) & \text{si } a < 0 \end{cases} \ . \tag{4.7}$$
On peut en effet vérifier que pour un tel processus (gaussien), on a, *pour tous* $a,b \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}\big[W(a)\big] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\big[W(a)W(b)\big] = R(a,b) \ .$$

4.2. **Heuristique: formulation mild de l'équation de la chaleur.**

Considérons pour l'instant une équation de la forme
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(.,u) \ , \quad u_0(x) = \Phi(x) \ , \tag{4.8}$$
où $f : [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une *fonction bien définie* et la notation dans (4.8) signifie $f(.,u)_t(x) := f(t,x,u_t(x))$. Pour simplifier la présentation, on supposera en outre que f est bornée.

Comme dans le cas des EDO, on souhaiterait mettre l'équation sous une forme "intégrale" que l'on puisse ensuite étendre (*par le biais d'arguments stochastiques*) au cas où f est remplacée par
$$f(.,u) = \sigma(u)\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} \ . \tag{4.9}$$

1ère idée (mauvaise): on intègre simplement l'équation en temps (à x fixé) pour obtenir
$$u_t(x) = u_0(x) + \int_0^t (\partial_x^2 u)_s(x)\, ds + \int_0^t f(s,x,u_s(x))\, ds \ .$$
Deux inconvénients majeurs apparaissent ici:

• L'opérateur $u \mapsto \partial_x^2 u$ est non borné (si $u \in \mathcal{W}^2$, alors $\partial_x^2 u \in L^2$), d'où des problèmes de stabilité pour résoudre l'équation sous cette forme.

• En vue de l'interprétation recherchée (quand $f(.,u)$ laissera place à $\sigma(u)\frac{\partial^2 W}{\partial t\partial x}$), on souhaite faire apparaître une forme intégrale en temps, *mais aussi en espace*, pour compenser l'irrégularité du bruit $\frac{\partial^2 W}{\partial t\partial x}$.

2ème idée (meilleure): s'appuyer sur la solution fondamentale de l'équation linéaire sous-jacente, soit l'équation de la chaleur standard
$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \ , \quad t \in \mathbb{R}_+ \, , \, x \in \mathbb{R} \ . \tag{4.10}$$

— —

Rappel: par définition, la solution fondamentale de l'équation (4.10) (avec condition nulle en $t = 0$) est la distribution $G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ telle que, pour toute fonction-test $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la solution (au sens des distributions) de l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varphi \ , \quad v(0,x) = 0 \ ,$$

est donnée par la convolution (espace-temps) $v := G * \varphi$.

− −

Cette solution fondamentale est en fait donnée ici par le noyau de la chaleur

$$\boxed{G_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4t}\Big)\, \mathbf{1}_{\{t>0\}}} \ . \tag{4.11}$$

Observons plus simplement que cette fonction G satisfait $G_t(x) = 0$ pour tout $t \leq 0$,

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(t,x) \quad \text{pour tous } t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{4.12}$$

$$\text{et} \qquad \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\psi(y)\, dy \overset{t\to 0}{\longrightarrow} \psi(x) \ , \tag{4.13}$$

pour toute fonction continue bornée $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Grâce à ces propriétés, nous pouvons établir le résultat suivant:

Proposition 4.10. *Si u est solution de* (4.8) *au sens classique (c'est-à-dire u est $\mathcal{C}^1$ en temps, $\mathcal{C}^2$ en espace, et satisfait* (4.8) *pour tout (t,x)), et si*

$$\max\Big(\sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}} |u(t,x)|, \sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}} \Big|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\Big|, \sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}} \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\Big| \Big) < \infty \ , \tag{4.14}$$

alors u est aussi solution de l'équation suivante (appelée parfois forme mild de (4.8)*): pour tous $t \in [0,T]$ et $x \in \mathbb{R}$,*

$$u_t(x) = \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\Phi(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y) f(s,y,u_s(y))\, ds\, dy \ . \tag{4.15}$$

La formulation (4.15) fait cette fois bien apparaître une intégrale en temps et en espace: *c'est cette formulation de l'équation que nous allons pouvoir étendre à la situation* (4.9).

Preuve de la proposition 4.10. On a, pour tous $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} G_\varepsilon(x-y)u_t(y)\, dy - \int_{\mathbb{R}} G_{t+\varepsilon}(x-y)\Phi(y)\, dy &= \int_{\mathbb{R}} \big\{ G_\varepsilon(x-y)u_t(y) - G_{t+\varepsilon}(x-y)u_0(y) \big\}\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \partial_s\big(G_{t-s+\varepsilon}(x-y)u_s(y)\big)\, ds\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \big\{ \partial_s\big(G_{t-s+\varepsilon}(x-y)\big)u_s(y) \\
&\qquad + G_{t-s+\varepsilon}(x-y)\partial_s\big(u_s(y)\big) \big\}\, ds\, dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \int_0^t (\partial_s G)_{t-s+\varepsilon}(x-y)u_s(y)\, ds\, dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t G_{t-s+\varepsilon}(x-y)\partial_y^2\big(u_s(y)\big)\, ds\, dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t G_{t-s+\varepsilon}(x-y) f(s,y,u_s(y))\, ds\, dy \ .
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Ensuite, en utilisant (4.14) et le fait que, pour tous $0 \leq s \leq t$ et $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\partial_y\big(G_{t-s+\varepsilon}(x-y)\big) \overset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0 \ , \quad G_{t-s+\varepsilon}(x-y) \overset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0 \ ,$$

on déduit facilement

$$\int_{\mathbb{R}}\int_0^t G_{t-s+\varepsilon}(x-y)\partial_y^2\big(u_s(y)\big)\,ds\,dy=\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s+\varepsilon}(x-y)\partial_y^2\big(u_s(y)\big)\,dy\,ds$$
$$=\int_0^t\int_{\mathbb{R}} (\partial_y^2 G)_{t-s+\varepsilon}(x-y)u_s(y)\,dy\,ds\;.$$

Ainsi, en revenant à (4.16) et en utilisant (4.12), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} G_\varepsilon(x-y)u_t(y)\,dy-\int_{\mathbb{R}} G_{t+\varepsilon}(x-y)\Phi(y)\,dy=\int_{\mathbb{R}}\int_0^t G_{t-s+\varepsilon}(x-y)f(s,y,u_s(y))\,ds\,dy\;.$$

Il suffit maintenant de faire tendre ε vers 0 et d'utiliser (4.13) pour obtenir (4.15).

$\square$

4.3. **Intégration par rapport à un champ brownien espace-temps.**

En gardant la formulation (4.15) à l'esprit, et étant donné un champ brownien W sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ (au sens de la définition 4.6), on cherche à donner sens à l'intégrale

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\,\frac{\partial^{d+1}W}{\partial s\partial x_1\cdots\partial x_d}(s,x)\,ds\,dx\;,$$

pour une certaine classe de champs stochastiques $H:([0,T]\times\mathbb{R}^d)\times\Omega\to\mathbb{R}$ (la plus large possible).

À cette fin, inspirons nous de la construction d'Itô (cf Section 3.1.2). Considérons ici $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}=(\mathcal{F}_s^W)_{s\geq 0}$ la filtration *en temps* associée à W, autrement dit

$$\mathcal{F}_s:=\sigma\text{-algèbre engendrée par }\{W_r(x);\;\underline{0\leq r\leq s,\;x\in\mathbb{R}^d}\}\;.$$

Reprenons maintenant une à une les étapes de la section 3.1.2.

Étape 1: Définition de l'intégrale pour un champ simple adapté.

Considérons d'abord l'espace $\mathcal{E}$ des *champs simples adaptés*, c'est-à-dire l'ensemble des champs $H:([0,T]\times\mathbb{R}^d)\times\Omega\to\mathbb{R}$ de la forme

$$H_s(x):=\sum_{i,j}X_i^j\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(s)\mathbf{1}_{A_j}(x)\,,\tag{4.17}$$

où la somme porte sur un nombre fini d'indices i,j, et où $0=t_0<t_1<\ldots<T$,

$$A_j:=[a_1^{(1)}(j),a_2^{(1)}(j)[\times\ldots\times[a_1^{(d)}(j),a_2^{(d)}(j)[\quad\text{avec}\quad a_1^{(k)}(j)<a_2^{(k)}(j)\,,$$
$$A_{j_1}\cap A_{j_2}=\emptyset\quad\text{si } j_1\neq j_2\;,$$

et enfin, pour tous i,j, $X_i^j:\Omega\to\mathbb{R}$ *est une variable aléatoire bornée et $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable.*
On pose alors

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\,\frac{\partial^{d+1}W}{\partial s\partial x_1\cdots\partial x_d}(s,x)\,ds\,dx\bigg(=\sum_{i,j}X_i^j\bigg\{\int_{A_j}\frac{\partial^d W_{t_{i+1}}}{\partial x_1\cdots\partial x_d}(x)\,dx-\int_{A_j}\frac{\partial^d W_{t_i}}{\partial x_1\cdots\partial x_d}(x)\,dx\bigg\}\bigg)$$
$$:=\sum_{i,j}X_i^j\big\{W_{t_{i+1}}(A_j)-W_{t_i}(A_j)\big\}\;,\tag{4.18}$$

où, pour tous $A:=[a_1^{(1)},a_2^{(1)}]\times\ldots\times[a_1^{(d)},a_2^{(d)}]$ et $s\in[0,T]$, on définit $W_s(A)$ par la formule

$$W_s(A):=\int_A\frac{\partial^d W_s}{\partial x_1\cdots\partial x_d}(x)\,dx:=\sum_{i_1,\ldots,i_d=1}^{2}(-1)^{i_1+\ldots+i_d}W_s\big(a_{i_1}^{(1)},\ldots,a_{i_d}^{(d)}\big)\;.\tag{4.19}$$

Par exemple, pour $d=2$, on récupère l'incrément rectangulaire

$$W_s(A):=W_s(a_1^{(1)},a_1^{(2)})-W_s(a_1^{(1)},a_2^{(2)})-W_s(a_2^{(1)},a_1^{(2)})+W_s(a_2^{(1)},a_2^{(2)})\,.$$

Soulignons dès à présent les quelques propriétés stochastiques suivantes pour la famille de variables aléatoires $W_s(A)$ (ces propriétés se révèleront par la suite essentielles):

Lemme 4.11. *Pour tous hyperrectangles* $A := [a_1^{(1)}, a_2^{(1)}[\times \ldots \times [a_1^{(d)}, a_2^{(d)}[$, $B := [b_1^{(1)}, b_2^{(1)}[\times \ldots \times [b_1^{(d)}, b_2^{(d)}[$, *et tous* $0 \leq s \leq t$, *on a:*
(i) $\mathbb{E}\big[W_s(A)\big] = 0$ *et* $\mathbb{E}\big[W_s(A)W_t(B)\big] = s\,\mu(A \cap B)$, *où* μ *désigne la mesure de Lebesgue dans* $\mathbb{R}^d$.
(ii) $W_t(A) - W_s(A) \sim \mathcal{N}\big(0, (t-s)\mu(A)\big)$.
(iii) La tribu générée par les variables $\{W_t(A) - W_s(A),\ A$ *hyperrectangle de* $\mathbb{R}^d\}$ *est indépendante de* $\mathcal{F}_s$.

Preuve. (i) En combinant (4.2) et (4.19), on déduit immédiatement

$$\mathbb{E}\big[W_s(A)W_t(B)\big] = s \prod_{k=1}^{d} \sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+j} R(a_i^{(k)}, b_j^{(k)}) ,$$

et l'on peut ensuite vérifier, à partir de la représentation (4.4), que

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+j} R(a_i^{(k)}, b_j^{(k)}) &= \int_{\mathbb{R}} \big\{\mathbf{1}_{[0,a_2^{(k)}]}(x) - \mathbf{1}_{[0,a_1^{(k)}]}(x)\big\}\big\{\mathbf{1}_{[0,b_2^{(k)}]}(x) - \mathbf{1}_{[0,b_1^{(k)}]}(x)\big\}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a_1^{(k)},a_2^{(k)}]}(x)\mathbf{1}_{[b_1^{(k)},b_2^{(k)}]}(x)\, dx \\ &= \mu\big(\big[a_1^{(k)}, a_2^{(k)}\big] \cap \big[b_1^{(k)}, b_2^{(k)}\big]\big) .\end{aligned}$$

Remarquons en effet qu'avec la convention $\mathbf{1}_{[0,a]} := -\mathbf{1}_{[a,0]}$ pour $a < 0$ (utilisée dans (4.4)), on a bien, pour tous $a_1 < a_2 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{1}_{[0,a_2]} - \mathbf{1}_{[0,a_1]} = \mathbf{1}_{[a_1,a_2]}$ p.p.
(ii) On peut écrire

$$W_t(A) - W_s(A) = \sum_{i_1,\ldots,i_d=1}^{2} (-1)^{i_1+\ldots+i_d}\big\{W_t\big(a_{i_1}^{(1)}, \ldots, a_{i_d}^{(d)}\big) - W_s\big(a_{i_1}^{(1)}, \ldots, a_{i_d}^{(d)}\big)\big\}.$$

Ainsi, comme W est un champ gaussien, la variable $W_t(A) - W_s(A)$ est de loi gaussienne. Il suffit donc de vérifier que $\mathbb{E}\big[W_t(A) - W_s(A)\big] = 0$ et $\mathbb{E}\big[\big(W_t(A) - W_s(A)\big)^2\big] = (t-s)\mu(A)$.

En utilisant (i), on constate en effet que $\mathbb{E}\big[W_t(A) - W_s(A)\big] = 0$, puis que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\big(W_t(A) - W_s(A)\big)^2\big] &= \mathbb{E}\big[W_t(A)^2\big] - 2\mathbb{E}\big[W_t(A)W_s(A)\big] + \mathbb{E}\big[W_s(A)^2\big] \\ &= t\,\mu(A) - 2s\,\mu(A) + s\,\mu(A) \\ &= (t-s)\mu(A) .\end{aligned}$$

(iii) On utilise une généralisation de la propriété classique: si (X, Y) est un vecteur gaussien centré, alors X et Y sont indépendantes $\Longleftrightarrow \mathbb{E}[XY] = 0$.

La généralisation en question correspond à l'énoncé de [4, Proposition 0.6.3]. On peut la résumer comme suit.

– –

Définition. Un *espace gaussien* est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$ composé uniquement de variables aléatoires gaussiennes centrées.

Proposition. Soit G_1, G_2 deux sous-espaces fermés d'un espace gaussien G. Alors les tribus $\sigma(G_1)$ et $\sigma(G_2)$ sont indépendantes $\Longleftrightarrow G_1$ et G_2 sont orthogonaux.

– –

On sait que les espaces

$$G_{1,(s,t)} := \overline{\mathrm{Span}\big(W_t(A) - W_s(A),\ A \text{ hyperrectangle de } \mathbb{R}^d\big)}$$

et

$$G_{2,s} := \overline{\mathrm{Span}\big(W_r(x),\ 0 \leq r \leq s,\ x \in \mathbb{R}^d\big)}$$

sont deux sous-espaces fermés de l'espace gaussien

$$G := \overline{\mathrm{Span}\big(W_r(x),\, 0 \le r \le T,\, x \in \mathbb{R}^d\big)}\ .$$

Ainsi, d'après la proposition ci-dessus, les tribus $\sigma\big(G_{1,(s,t)}\big)$ et $\sigma\big(G_{2,s}\big)(= \mathcal{F}_s)$ sont indépendantes si et seulement si les espaces $G_{1,(s,t)}$ et $G_{2,s}$ sont orthogonaux dans $L^2(\Omega)$.

Il s'agit donc de vérifier que pour tout hyperrectangle A de $\mathbb{R}^d$, tout $0 \le r \le s$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}\big[(W_t(A) - W_s(A))W_r(x)\big] = 0\ .$$

Et en effet

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[W_t(A)W_r(x)\big] &= \sum_{i_1,\dots,i_d=1}^{2} (-1)^{i_1+\dots+i_d}\mathbb{E}\big[W_t\big(a^{(1)}_{i_1},\dots,a^{(d)}_{i_d}\big)W_r(x)\big]\\
&= r\sum_{i_1,\dots,i_d=1}^{2} (-1)^{i_1+\dots+i_d}\prod_{k=1}^{d} R\big(a^{(k)}_{i_k},x^{(k)}\big)\\
&= \mathbb{E}\big[W_s(A)W_r(x)\big]\ .
\end{aligned}$$

□

Étape 2: Isométrie. Comme dans le cas classique (uni-paramétrique), l'extension de la définition (4.18) va être rendue possible par une propriété d'isométrie:

Lemme 4.12. *Pour tout champ simple adapté H, on a*

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\,\frac{\partial^{d+1}W}{\partial s\partial x_1\cdots\partial x_d}(s,x)\,ds\,dx\Big)^2\Big] = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}\big[\big|H_s(x)\big|^2\big]\,ds\,dx\,,$$

autrement dit l'application

$$H \longmapsto \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\,\frac{\partial^{d+1}W}{\partial s\partial x_1\cdots\partial x_d}(s,x)\,ds\,dx$$

est une isométrie de $(\mathcal{E},\|.\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\Omega)})$ dans $L^2(\Omega)$.

Preuve. Soit H de la forme (4.17). On a alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\,\frac{\partial^{d+1}W}{\partial s\partial x_1\cdots\partial x_d}(s,x)\,ds\,dx\Big)^2\Big]\\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i,j} X_i^j\,\big\{W_{t_{i+1}}(A_j) - W_{t_i}(A_j)\big\}\Big)^2\Big]\\
&= \sum_{i_1,i_2}\sum_{j_1,j_2}\mathbb{E}\Big[X_{i_1}^{j_1}X_{i_2}^{j_2}\,\big\{W_{t_{i_1+1}}(A_{j_1}) - W_{t_{i_1}}(A_{j_1})\big\}\big\{W_{t_{i_2+1}}(A_{j_2}) - W_{t_{i_2}}(A_{j_2})\big\}\Big]\,.
\end{aligned}$$

Pour $i_1 = i_2 = i$, on utilise les propriétés mises en évidence dans le lemme 4.11 pour affirmer successivement que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\underbrace{X_i^{j_1}X_i^{j_2}}_{\in\mathcal{F}_{t_i}}\,\underbrace{\big\{W_{t_{i+1}}(A_{j_1}) - W_{t_i}(A_{j_1})\big\}\big\{W_{t_{i+1}}(A_{j_2}) - W_{t_i}(A_{j_2})\big\}}_{\perp\!\!\!\perp\mathcal{F}_{t_i}}\Big]\\
&= \mathbb{E}\big[X_i^{j_1}X_i^{j_2}\big]\,\mathbb{E}\Big[\big\{W_{t_{i+1}}(A_{j_1}) - W_{t_i}(A_{j_1})\big\}\big\{W_{t_{i+1}}(A_{j_2}) - W_{t_i}(A_{j_2})\big\}\Big]\\
&= \mathbb{E}\big[X_i^{j_1}X_i^{j_2}\big](t_{i+1}-t_i)\mu(A_{j_1}\cap A_{j_2}) = \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}(t_{i+1}-t_i)\mu(A_{j_1})\mathbb{E}\big[(X_i^{j_1})^2\big]\ ,
\end{aligned}$$

tandis que, grâce à ces mêmes propriétés, on a, pour $i_1 < i_2$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\underbrace{X_{i_1}^{j_1}X_{i_2}^{j_2}\,\big\{W_{t_{i_1+1}}(A_{j_1}) - W_{t_{i_1}}(A_{j_1})\big\}}_{\in\mathcal{F}_{t_{i_2}}}\,\underbrace{\big\{W_{t_{i_2+1}}(A_{j_2}) - W_{t_{i_2}}(A_{j_2})\big\}}_{\perp\!\!\!\perp\mathcal{F}_{t_{i_2}}}\big]\\
&= \mathbb{E}\big[X_{i_1}^{j_1}X_{i_2}^{j_2}\,\big\{W_{t_{i_1+1}}(A_{j_1}) - W_{t_{i_1}}(A_{j_1})\big\}\big]\mathbb{E}\big[W_{t_{i_2+1}}(A_{j_2}) - W_{t_{i_2}}(A_{j_2})\big]\ =\ 0\ .
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\,\frac{\partial^{d+1}W}{\partial s\partial x_1\cdots\partial x_d}(s,x)\,ds\,dx\Big)^2\Big] = \sum_{i,j}(t_{i+1}-t_i)\mu(A_j)\mathbb{E}\big[(X_i^j)^2\big]$$
$$= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}\big[\big|H_s(x)\big|^2\big]\,ds\,dx\,.$$

□

Nous pouvons à présent nous tourner vers l'argument de densité qui clôt la procédure.

Étape 3: Argument de densité.

Lemme 4.13. *Soit $H : ([0,T]\times\mathbb{R}^d)\times\Omega\to\mathbb{R}$ un champ stochastique tel que:*
(i) pour tous $t\in[0,T]$ et $x\in\mathbb{R}^d$, $H_t(x)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable (“H adapté”);
(ii) p.s., la fonction $(t,x)\mapsto H_t(x)$ est continue presque partout (“H continu p.p.”);
(iii) on a $H\in L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\Omega)$, c'est-à-dire

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}\big[\big|H_s(x)\big|^2\big]\,ds\,dx \;<\; \infty\,.$$

Alors il existe une suite $H^{(n)}$ de champs simples adaptés telle que

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}\big[\big|H_s^{(n)}(x)-H_s(x)\big|^2\big]\,ds\,dx \;\to\; 0\,. \tag{4.20}$$

Preuve. Dans un souci de clarté, notons

$$\mathcal{H} := \{H \text{ champ adapté, continu p.p. et dans } L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\Omega)\}\,,$$

$$\mathcal{B} := \{H \text{ champ adapté, continu p.p., à support compact en } x\text{, dans } L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\Omega)\}\,,$$

et rappelons que $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des champs simples adaptés.

Densité de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{H}$. Étant donné $H\in\mathcal{H}$, il suffit de considérer la suite $(H^{(n)})_{n\geq1}$ donnée pour tout $n\geq1$ par

$$H_t^{(n)}(x) := \mathbf{1}_{\{|x|\leq n\}}\big\{H_t(x)\mathbf{1}_{\{|H_t(x)|<n\}} + n\mathbf{1}_{\{H_t(x)\geq n\}} - n\mathbf{1}_{\{H_t(x)\leq -n\}}\big\}\,. \tag{4.21}$$

On a bien $H^{(n)}\in\mathcal{B}$, et comme $|H_t^{(n)}(x)|\leq|H_t(x)|$, nous sommes en mesure d'invoquer le théorème de convergence dominée pour affirmer que $H^{(n)}$ converge vers H dans $L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\Omega)$.

Densité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{B}$. Étant donné $H\in\mathcal{B}$, on pose simplement

$$H_t^{(n)}(x) := \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j_1,\ldots,j_d\in\mathbb{Z}} H_{t_i^n}(x_{j_1}^n,\ldots,x_{j_d}^n)\,\mathbf{1}_{[t_i^n,t_{i+1}^n[}(t)\mathbf{1}_{[x_{j_1}^n,x_{j_1+1}^n[\times\ldots\times[x_{j_d}^n,x_{j_d+1}^n[}(x)\,,$$

où $t_i^n := \frac{iT}{n}$ et $x_j^n := \frac{j}{n}$. Pour tout $n\geq1$, $H^{(n)}$ définit clairement un champ simple adapté (car H est adapté, borné et à support compact en x), et la condition de continuité permet d'appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer que $H^{(n)}$ converge vers H dans $L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\Omega)$.

□

Il est clair que nous pouvons désormais reprendre mot pour mot les arguments du début de la section 3.1.3 pour obtenir la définition recherchée:

Définition 4.14. *Soit* $H : ([0,T]\times\mathbb{R}^d)\times\Omega\to\mathbb{R}$ *un champ stochastique vérifiant les conditions* (i)-(ii)-(iii) *du lemme 4.13. On appelle intégrale d'Itô de* H *contre* W*, et on notera*

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\,\dot W(ds\,dx)\ ,$$

la limite, dans $L^2(\Omega)$*, de la suite*

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} H_s^{(n)}(x)\,\frac{\partial^{d+1}W}{\partial s\partial x_1\cdots\partial x_d}(s,x)\,ds\,dx\,,$$

pour toute suite $(H^{(n)})_{n\geq 1}$ *de champs simples adaptés telle que*

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}\big[\big|H_s^{(n)}(x)-H_s(x)\big|^2\big]\,ds\,dx\ \to\ 0\ . \tag{4.22}$$

C'est cette interprétation de l'intégrale qui va nous permettre de donner sens à l'équation (4.1). Juste avant cela, soulignons rapidement quelques propriétés stochastiques de l'intégrale.

Proposition 4.15. *Sous les hypothèses de la définition 4.14, l'intégrale d'Itô est une variable aléatoire centrée, qui vérifie la propriété d'isométrie fondamentale:*

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\,\dot W(ds\,dx)\Big)^2\Big]=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}\big[\big|H_s(x)\big|^2\big]\,ds\,dx\,. \tag{4.23}$$

Proposition 4.16. *Pour tout champ* $H : ([0,T]\times\mathbb{R}^d)\times\Omega\to\mathbb{R}$ *vérifiant les conditions* (i)-(ii)-(iii) *du lemme 4.13, le processus*

$$t\mapsto\mathcal{J}_t:=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\,\dot W(ds\,dx)\quad\Big(=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)\,\dot W(ds\,dx)\Big)$$

est une martingale continue (relativement à $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$*) de crochet*

$$\langle\mathcal{J}\rangle_t=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\big|H_s(x)\big|^2\,ds\,dx\ .$$

Preuve. Il “suffit” de reprendre les arguments de la preuve de la proposition 3.8. □

En appliquant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy (corollaire 1.20), on obtient:

Corollaire 4.17. *Pour tout* $p\geq 1$*, il existe une constante* $c_p>0$ *telle que, pour tout champ* $H : ([0,T]\times\mathbb{R}^d)\times\Omega\to\mathbb{R}$ *vérifiant les conditions* (i)-(ii)-(iii) *du lemme 4.13,*

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\,\dot W(ds\,dx)\Big|^{2p}\Big]\leq c_p\,\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\big|H_s(x)\big|^2\,ds\,dx\Big)^p\Big]\ .$$

4.4. Interprétation de l'équation.

Rappelons que nous nous intéressons dans cette section au modèle dynamique

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sigma(u)\dfrac{\partial^2 W}{\partial t\partial x}\ , & t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R},\\ u(0,.)=\Phi\ ,\end{cases} \tag{4.24}$$

où $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue, $\sigma(u)_t(x):=\sigma(u_t(x))$ et $W:([0,T]\times\mathbb{R})\times\Omega\to\mathbb{R}$ est un champ brownien sur $[0,T]\times\mathbb{R}$.

Lemme 4.18. *Étant donnée $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, bornée et de carré intégrable, soit $\{\widetilde{w}_t(x),\, t \in [0,T], x \in \mathbb{R}\}$ la fonction définie par*

$$\widetilde{w}_0(x) = \Phi(x) \quad , \quad \widetilde{w}_t(x) := \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\Phi(y)\, dy \quad si \quad t > 0\, .$$

Alors $\widetilde{w}$ est continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}$. En outre, pour tout $T_0 \in (0,T]$, on a

$$\sup_{(s,x)\neq(t,y)\in[T_0,T]\times\mathbb{R}} \frac{\big|\widetilde{w}_t(y) - \widetilde{w}_s(x)\big|}{|t-s| + |y-x|} \ < \ \infty \, . \tag{4.25}$$

Preuve. Voir la section 4.6. □

Proposition-Définition 4.19. *Étant donné un champ stochastique*

$$v : [0,T] \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$$

adapté, continu et borné (c'est-à-dire $\sup_{(s,y,\omega)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\Omega} |v_s(y)(\omega)| < \infty$), on définit le champ $\{w_t(x),\, t \in [0,T], x \in \mathbb{R}\}$ par la formule

$$w_t(x) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y) v_s(y)\, \dot{W}(ds\, dy) \ .$$

où l'intégrale est comprise comme une intégrale d'Itô.

Alors w est bien défini et est adapté. En outre, il existe une modification continue de ce champ (que nous noterons encore w) telle que, pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ borné, tout $0 < \gamma < \frac{1}{4}$ et tout $0 < \beta < \frac{1}{2}$, on a p.s.

$$\sup_{(s,x)\neq(t,y)\in[0,T]\times I} \frac{|w_t(y) - w_s(x)|}{|t-s|^{\gamma} + |y-x|^{\beta}} \ < \ \infty \, . \tag{4.26}$$

Dans tout ce qui suit, la notation

$$(t,x) \mapsto \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y) v_s(y)\, \dot{W}(ds\, dy)$$

fera systématiquement référence à une telle modification continue.

Preuve. Voir la section 4.6. □

En combinant les considérations heuristiques de la section 4.2 et les constructions de la section 4.3, nous sommes désormais en mesure de fournir une interprétation naturelle et rigoureuse de cette équation:

Définition 4.20. *Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, bornée et de carré intégrable, et soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On appelle solution (au sens mild) de l'équation (4.24) tout champ $u : ([0,T] \times \mathbb{R}) \times \Omega \to \mathbb{R}$ adapté et continu tel que, pour tout $t \in [0,T]$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$u_t(x) = \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\Phi(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\sigma(u_s(y))\, \dot{W}(ds\, dy) \ , \tag{4.27}$$

où la dernière intégrale est comprise au sens d'Itô (via la proposition-définition 4.19), et où l'on rappelle que G désigne le noyau de la chaleur

$$G_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\Big(- \frac{x^2}{4t} \Big)\, \mathbf{1}_{\{t>0\}} \ .$$

4.5. **Résolution.**

On dispose du résultat général suivant:

Théorème 4.21. *Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, bornée et de carré intégrable. Par ailleurs, soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle qu'il existe une constante $c_\sigma > 0$ vérifiant*

$$|\sigma(x)| \leq c_\sigma \quad \text{et} \quad |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq c_\sigma |x - y| \ , \tag{4.28}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Alors l'équation (4.24) *admet une unique solution u (au sens mild).*

Remarque 4.22. Dans ce dernier énoncé, l'unicité doit être comprise *à indistinguabilité près.*

Preuve du théorème 4.21. La stratégie consiste naturellement à adapter les arguments de la preuve du cas uni-paramétrique (c'est-à-dire la preuve du théorème 3.12).

Existence. On s'appuie sur un procédé itératif de type "schéma de Picard". On considère ainsi la suite de champs stochastiques $u^{(n)}$ définie par $u_t^{(0)}(x) := \Phi(x)$ et

$$u_t^{(n+1)}(x) := \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\Phi(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\sigma\big(u_s^{(n)}(y)\big)\, \dot{W}(ds\, dy) \ . \tag{4.29}$$

La combinaison de la proposition-définition 4.19 et du lemme 4.18 nous garantit que cette suite est bien définie au sein de la classe des champs adaptés et (p.s.) continus.

Posons alors

$$H_t^{(n)}(x) := u_t^{(n+1)}(x) - u_t^{(n)}(x) \ .$$

On a par définition

$$H_t^{(n)}(x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\big[\sigma\big(u_s^{(n)}(y)\big) - \sigma\big(u_s^{(n-1)}(y)\big)\big]\, \dot{W}(ds\, dy)\,,$$

et par conséquent, en utilisant successivement l'isométrie d'Itô (4.23) et la condition de régularité (4.28), on obtient

$$\mathbb{E}\big[\big|H_t^{(n)}(x)\big|^2\big] \leq c_\sigma^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)^2 \mathbb{E}\big[\big|H_s^{(n-1)}(y)\big|^2\big]\, ds\, dy\,.$$

En posant $h_t^{(n)} := \sup_{0\leq s\leq t} \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\big[\big|H_s^{(n)}(x)\big|^2\big]$, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\big|H_t^{(n)}(x)\big|^2\big] &\leq c_\sigma^2 \int_0^t h_s^{(n-1)} \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)^2\, dy\, ds \\
&\leq \frac{c_\sigma^2}{4\pi} \int_0^t ds\, \frac{h_s^{(n-1)}}{(t-s)} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}\Big)\, dy \\
&\leq \frac{c_\sigma^2}{4\pi} \int_0^t ds\, \frac{h_s^{(n-1)}}{\sqrt{t-s}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\
&\leq c_1\, c_\sigma^2 \int_0^t \frac{h_s^{(n-1)}}{\sqrt{t-s}}\, ds\,,
\end{aligned}$$

pour une certaine constante $c_1 > 0$. En utilisant à présent l'inégalité de Hölder, on déduit

$$\mathbb{E}\big[\big|H_t^{(n)}(x)\big|^2\big] \leq c_1\, c_\sigma^2 \Big(\int_0^t \frac{ds}{|t-s|^{3/4}}\, ds\Big)^{2/3} \Big(\int_0^t (h_s^{(n-1)})^3\, ds\Big)^{1/3}$$

et ainsi

$$(h_t^{(n)})^3 \leq c_2\, T^{1/2}\, c_\sigma^6 \int_0^t (h_s^{(n-1)})^3\, ds\,,$$

pour une certaine constante $c_2 > 0$. En itérant le procédé, il vient

$$(h_t^{(n)})^3 \leq \Big(c_2\, T^{1/2}\, c_\sigma^6\Big)^n \int_{0\leq s_1<\ldots<s_n<t} (h_{s_1}^{(0)})^3\, ds_1 \ldots ds_n \ .$$

Or il est facile de constater (**exercice**) que

$$\mathbb{E}\big[|H_s^{(0)}(x)|^2\big] \leq c_3\big\{\|\Phi\|_\infty^2 + T^{1/2}c_\sigma^2\big\}\,,$$

pour une certaine constante $c_3 > 0$, et où $\|\Phi\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |\Phi(x)|$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}(h_t^{(n)})^3 &\leq \Big(c_2\, T^{1/2}\, c_\sigma^6\Big)^n \Big(c_3\big\{\|\Phi\|_\infty^2 + T^{1/2}c_\sigma^2\big\}\Big)^3 \int_{0\leq s_1<\ldots<s_n<t} ds_1 \ldots ds_n \\ &\leq \frac{\Big(c_2\, T^{3/2}\, c_\sigma^6\Big)^n}{n!} \Big(c_3\big\{\|\Phi\|_\infty^2 + T^{1/2}c_\sigma^2\big\}\Big)^3\,,\end{aligned}$$

ce qui garantit la convergence $\sum_{n\geq 0}(h_T^{(n)})^{1/2} < \infty$, autrement dit la convergence

$$\sum_{n\geq 0} \sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big(\mathbb{E}\Big[\big|u_t^{(n+1)}(x) - u_t^{(n)}(x)\big|^2\Big]\Big)^{1/2} < \infty\,.$$

Par conséquent, la suite $(u^{(n)})_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans l'espace $L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}; L^2(\Omega))$: elle converge donc dans cet espace, vers une limite que nous noterons u.

En associant cette propriété de convergence à l'isométrie d'Itô (4.23), on montre aisément que

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\sigma\big(u_s^{(n)}(y)\big)\, \dot{W}(ds\, dy) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\sigma\big(u_s(y)\big)\, \dot{W}(ds\, dy) \quad \text{dans } L^2(\Omega)\,.$$

Il suffit maintenant de faire tendre n vers l'infini dans la relation (4.29) pour obtenir le résultat escompté: le champ u est bien solution de l'équation (4.24).

Unicité. Soient u, v deux solutions de l'équation (de même condition initiale Φ) et notons

$$H_t(x) := u_t(x) - v_t(x)\,.$$

On a par définition

$$H_t(x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\big[\sigma\big(u_s(y)\big) - \sigma\big(v_s(y)\big)\big]\, \dot{W}(ds\, dy)\,.$$

En utilisant successivement l'isométrie d'Itô (4.23) et la condition de régularité (4.28) (comme précédemment), on déduit

$$\mathbb{E}\big[\big|H_t(x)\big|^2\big] \leq c_\sigma^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)^2\mathbb{E}\big[\big|H_s(y)\big|^2\big]\, ds\, dy\,.$$

Par suite, si $h_t := \sup_{0\leq s\leq t}\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\big[\big|H_s(x)\big|^2\big]$, on obtient, avec les mêmes arguments que ci-dessus,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\big|H_t(x)\big|^2\big] &\leq c_\sigma^2 \int_0^t h_s \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(y)^2\, dy\, ds \\ &\leq c_1\, c_\sigma^2 \int_0^t \frac{h_s}{\sqrt{t-s}}\, ds \;\leq\; c_1\, c_\sigma^2 \Big(\int_0^t \frac{ds}{|t-s|^{3/4}}\Big)^{2/3} \Big(\int_0^t (h_s)^3\, ds\Big)^{1/3}\,,\end{aligned}$$

et donc, pour tout $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}0 \leq h_t^3 &\leq c_2\, T^{1/2}\, c_\sigma^2 \int_0^t (h_s)^3\, ds \\ &\leq \big(c_2\, T^{1/2}\, c_\sigma^2\big)^m \int_{0<s_1<\cdots<s_m<t} (h_{s_1})^3\, ds_1 \ldots ds_m \;\leq\; \frac{\big(c_2\, T^{3/2}\, c_\sigma^2\big)^m}{m!} h_T^3\,.\end{aligned}$$

En faisant tendre m vers l'infini, on obtient $h_t = 0$, ce qui permet d'affirmer que u et v sont modifications l'un de l'autre.

Les champs u et v étant en outre continus, on en déduit qu'ils sont indistinguables (d'après le résultat de l'exercice 1.24, et plus exactement par la généralisation donnée par le lemme 4.23 ci-dessous). □

Lemme 4.23. *Soient X et Y deux champs stochastiques sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, $d \geq 0$. Si Y est une modification de X, et si X et Y sont continus sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ (p.s.), alors X et Y sont indistinguables l'un de l'autre.*

L'application de la proposition-définition 4.19 et du lemme 4.18 à l'équation (4.27) (que nous venons de résoudre) conduit immédiatement au résultat de régularité trajectorielle suivant:

Corollaire 4.24. *Supposons les hypothèses du théorème 4.21 vérifiées, et notons* $\{u_t(x),\, t\in[0,T], x\in\mathbb{R}\}$ *la solution de l'équation* (4.24)*.*

Alors on a p.s, pour tout $T_0\in(0,T]$ *et tout intervalle* $I\subset\mathbb{R}$ *borné,*

$$\sup_{(s,x)\neq(t,y)\in[T_0,T]\times I}\frac{\big|u_t(y)-u_s(x)\big|}{|t-s|^{\gamma}+|y-x|^{\beta}}\ <\ \infty\,, \tag{4.30}$$

pour tous $0<\gamma<\frac14$ *et* $0<\beta<\frac12$*.*

4.6. **Preuves du lemme 4.18 et de la proposition-définition 4.19.**

Preuve de la proposition-définition 4.19. Pour garantir la bonne définition de w, il suffit de vérifier que les conditions (i)-(ii)-(iii) du lemme 4.13 sont effectivement satisfaites par le champ

$$(s,y)\longmapsto G_{t-s}(x-y)v_s(y)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)\ .$$

Pour le point (i), nous savons, par hypothèse, que $v_s(y)\in\mathcal{F}_s$. Le produit $G_{t-s}(x-y)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)$ étant par ailleurs déterministe, on peut affirmer que $G_{t-s}(x-y)v_s(y)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)\in\mathcal{F}_s$, comme désiré.

Pour le point (ii), nous savons, par hypothèse, que la fonction $(s,y)\mapsto v_s(y)$ est continue (p.s). Par ailleurs, la fonction $(s,y)\mapsto G_{t-s}(x-y)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)$ est continue p.p. (les seules discontinuités potentielles se trouvent sur la droite $s=t$), et par conséquent la fonction $(s,y)\mapsto G_{t-s}(x-y)v_s(y)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)$ est continue p.p. (p.s).

Quant à la condition d'intégrabilité (iii), on a bien, en notant $M:=\sup_{(s,y,\omega)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\Omega}|v_s(y)(\omega)|$,

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\mathbb{E}\big[\big|G_{t-s}(x-y)v_s(y)\big|^2\big]\,ds\,dy &\le M^2\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\big|G_{t-s}(x-y)\big|^2\,ds\,dy\\ &\le \frac{M^2}{4\pi}\int_0^t\frac{ds}{(t-s)}\int_{\mathbb{R}}\exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}\Big)\,dy\\ &\le \frac{M^2}{4\pi}\int_0^t\frac{ds}{\sqrt{s}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\ <\ \infty\,.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Ainsi, le champ w est bien défini. Par construction de l'intégrale d'Itô, $w_t(x)$ correspond à une limite de variables aléatoires $\mathcal{F}_t$-mesurables (on intègre de 0 à t): $w_t(x)$ est donc elle-même $\mathcal{F}_t$-mesurable, et par conséquent w est bien adapté.

Pour établir l'existence d'une modification continue de w (et même le résultat de régularité (4.26)), nous allons faire appel au *critère de Kolmogorov* (théorème 2.5). Il s'agit donc d'estimer le moment

$$\mathbb{E}\big[\big|w_t(y)-w_s(x)\big|^{2p}\big]\,,$$

pour tous $p\ge1$ et $(t,y),(s,x)\in[0,T]\times I$, où I est un intervalle borné de $\mathbb{R}$ fixé.

Dans ce qui suit, nous noterons c_p (resp. $c_{p,\varepsilon},c_{p,\varepsilon,T},\ldots$) toute constante dépendant seulement du paramètre p (resp. $(p,\varepsilon),(p,\varepsilon,T),\ldots$). Notons par ailleurs

$$M:=\sup_{(s,y,\omega)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\Omega}\big|v_s(y)(\omega)\big|\ <\ \infty\,.$$

Nous nous appuierons sur la décomposition (immédiate): pour $0 \leq s \leq t \leq T$ et $x, y \in I$,

$$\begin{aligned} w_t(y) - w_s(x) &= \int_s^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-r}(y-z) v_r(z)\, \dot{W}(dr\, dz) \\ &\quad + \int_0^s \int_{\mathbb{R}} \big[G_{t-r}(y-z) - G_{s-r}(y-z)\big] v_r(z)\, \dot{W}(dr\, dz) \\ &\quad + \int_0^s \int_{\mathbb{R}} \big[G_{s-r}(y-z) - G_{s-r}(x-z)\big] v_r(z)\, \dot{W}(dr\, dz) \\ &=: \sum_{\ell=1}^{3} \mathcal{J}^{(\ell)}((s,x),(t,y)) . \end{aligned} \tag{4.32}$$

Estimation de $\mathcal{J}^{(1)}((s,x),(t,y))$. Appliquons ici l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, sous la forme présentée dans le corollaire 4.17. Grâce à ce dernier résultat, on sait en effet que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\Big[\Big| \int_s^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-r}(y-z) v_r(z)\, \dot{W}(dr\, dz) \Big|^{2p}\Big] \\ &\leq c_p\, \mathbb{E}\Big[\Big| \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \big|G_{t-r}(y-z) v_r(z)\big|^2\, dr\, dz \Big|^{p}\Big] \\ &\leq c_p M^{2p} \Big(\int_s^t \int_{\mathbb{R}} \big|G_{t-r}(y-z)\big|^2\, dr\, dz \Big)^p \leq c_p M^{2p} \Big(\int_s^t \frac{dr}{\sqrt{t-r}} \Big)^p , \end{aligned}$$

et ainsi

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\mathcal{J}^{(1)}((s,x),(t,y))\Big|^{2p}\Big] \leq c_{p,M}\, |t-s|^{p/2} . \tag{4.33}$$

Estimation de $\mathcal{J}^{(2)}((s,x),(t,y))$. En utilisant le corollaire 4.17 (comme précédemment), on a d'abord

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\Big[\Big| \int_0^s \int_{\mathbb{R}} \big[G_{t-r}(y-z) - G_{s-r}(y-z)\big] v_r(z)\, \dot{W}(dr\, dz) \Big|^{2p}\Big] \\ &\leq c_{p,M} \Big(\int_0^s \int_{\mathbb{R}} \big|G_{t-r}(z) - G_{s-r}(z)\big|^2\, dr\, dz \Big)^p . \end{aligned} \tag{4.34}$$

Utilisons ensuite le théorème de Plancherel: en notant $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier en espace ($\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath \xi x} f(x)\, dx$), on a, pour tout $r \in (0,s)$ et tout $\varepsilon \in (0, \frac14)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \big|G_{t-r}(z) - G_{s-r}(z)\big|^2\, dz &= c \int_{\mathbb{R}} \big|\mathcal{F}(G_{t-r})(\xi) - \mathcal{F}(G_{s-r})(\xi)\big|^2\, d\xi \\ &= c \int_{\mathbb{R}} \big|e^{-\xi^2(t-r)} - e^{-\xi^2(s-r)}\big|^2\, d\xi \\ &= c \int_{\mathbb{R}} \big|e^{-\xi^2(s-r)}\big|^2 \big|e^{-\xi^2(t-s)} - 1\big|^2\, d\xi \\ &\leq c\, |t-s|^{\frac12 - 2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \big|e^{-\xi^2(s-r)}\big|^2 |\xi|^{1-4\varepsilon}\, d\xi \leq c_\varepsilon \frac{|t-s|^{\frac12 - 2\varepsilon}}{|s-r|^{1-2\varepsilon}} . \end{aligned}$$

Ainsi, en revenant à (4.34), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[\Big|\mathcal{J}^{(2)}((s,x),(t,y))\Big|^{2p}\Big] &\leq c_{p,M,\varepsilon}\, |t-s|^{2p(\frac14 - \varepsilon)} \Big(\int_0^s \frac{dr}{|s-r|^{1-2\varepsilon}} \Big)^p \\ &\leq c_{p,M,\varepsilon} |t-s|^{2p(\frac14 - \varepsilon)} s^{2\varepsilon p} , \end{aligned}$$

et donc, finalement,

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\mathcal{J}^{(2)}((s,x),(t,y))\Big|^{2p}\Big] \leq c_{p,M,\varepsilon,T} |t-s|^{2p(\frac14 - \varepsilon)} , \tag{4.35}$$

pour tout $\varepsilon \in (0, \frac14)$.

Estimation de $\mathcal{J}^{(3)}((s,x),(t,y))$. À nouveau, commençons par écrire

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^s\int_{\mathbb{R}}\big[G_{s-r}(y-z)-G_{s-r}(x-z)\big]v_r(z)\,\dot{W}(dr\,dz)\Big|^{2p}\Big]$$
$$\leq c_{p,M}\Big(\int_0^s\int_{\mathbb{R}}\big|G_{s-r}(y-z)-G_{s-r}(x-z)\big|^2\,dr\,dz\Big)^p. \tag{4.36}$$

Ensuite, par le théorème de Plancherel, on a, pour tout $\varepsilon\in(0,\frac12)$,

$$\int_{\mathbb{R}}\big|G_{s-r}(y-z)-G_{s-r}(x-z)\big|^2\,dz = c\int_{\mathbb{R}}\big|e^{\imath\xi y}-e^{\imath\xi x}\big|^2\big|e^{-\xi^2(s-r)}\big|^2\,d\xi$$
$$\leq c\,|y-x|^{1-2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}|\xi|^{1-2\varepsilon}e^{-2\xi^2(s-r)}\,d\xi\leq c_\varepsilon\,\frac{|y-x|^{1-2\varepsilon}}{|s-r|^{1-\varepsilon}},$$

d'où, en revenant à (4.36),

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\mathcal{J}^{(3)}((s,x),(t,y))\Big|^{2p}\Big]\leq c_{p,M,\varepsilon}|y-x|^{2p(\frac12-\varepsilon)}\Big(\int_0^s\frac{dr}{|s-r|^{1-\varepsilon}}\Big)^p$$
$$\leq c_{p,M,\varepsilon,T}|y-x|^{2p(\frac12-\varepsilon)}. \tag{4.37}$$

Conclusion. En mettant bout à bout les bornes (4.33), (4.35) et (4.37) (tout en gardant la décomposition (4.32) à l'esprit), on obtient, pour tous $p\geq1$, $\varepsilon\in(0,\frac14)$ et $(t,y),(s,x)\in[0,T]\times I$,

$$\mathbb{E}\Big[\big|w_t(y)-w_s(x)\big|^{2p}\Big]\leq c_{p,M,T,\varepsilon}\Big\{|t-s|^{2p(\frac14-\varepsilon)}+|y-x|^{2p(\frac12-\varepsilon)}\Big\}.$$

Le résultat escompté découle à présent immédiatement du critère de Kolmogorov (théorème 2.5). □

Preuve du lemme 4.18. Établissons d'abord (4.25), pour tout $T_0\in(0,T]$ fixé. À cette fin, écrivons naturellement

$$\widetilde{w}_t(y)-\widetilde{w}_s(x)=\int_{\mathbb{R}}\big[G_t(y-z)-G_s(x-z)\big]\Phi(z)\,dz,$$

puis

$$\Big|\int_{\mathbb{R}}\big[G_t(y-z)-G_s(x-z)\big]\Phi(z)\,dz\Big|$$
$$\leq\|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R})}\Big(\int_{\mathbb{R}}\big|G_t(y-z)-G_s(x-z)\big|^2\,dz\Big)^{1/2}$$
$$\leq\|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R})}\Big[\Big(\int_{\mathbb{R}}\big|G_t(z)-G_s(z)\big|^2\,dz\Big)^{1/2}+\Big(\int_{\mathbb{R}}\big|G_s(y-z)-G_s(x-z)\big|^2\,dz\Big)^{1/2}\Big]. \tag{4.38}$$

Pour la première intégrale, on utilise les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition 4.19 (voir l'estimation de $\mathcal{J}^{(2)}$) pour affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}}\big|G_t(z)-G_s(z)\big|^2\,dz=c\int_{\mathbb{R}}\big|e^{-\xi^2s}\big|^2\big|e^{-\xi^2(t-s)}-1\big|^2\,d\xi$$
$$\leq c\,|t-s|^2\int_{\mathbb{R}}\big|e^{-\xi^2s}\big|^2|\xi|^4\,d\xi\leq c\,\frac{|t-s|^2}{s^{5/2}}\leq c\,T_0^{-5/2}|t-s|^2.$$

Pour la seconde intégrale, on utilise là encore les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition 4.19 (voir l'estimation de $\mathcal{J}^{(3)}$) pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}}\big|G_s(y-z)-G_s(x-z)\big|^2\,dz=c\int_{\mathbb{R}}\big|e^{\imath\xi y}-e^{\imath\xi x}\big|^2\big|e^{-\xi^2s}\big|^2\,d\xi$$
$$\leq c\,|y-x|^2\int_{\mathbb{R}}|\xi|^2e^{-2\xi^2s}\,d\xi\leq c\,\frac{|y-x|^2}{s^{3/2}}\leq c\,T_0^{-3/2}|y-x|^2.$$

En revenant à (4.38), on a ainsi montré le résultat escompté, à savoir: pour tout $T_0 \in (0,T]$ et tous $(s,x),(t,y) \in (T_0,T] \times \mathbb{R}$,

$$\big|\widetilde{w}_t(y) - \widetilde{w}_s(x)\big| \leq c_{\Phi,T_0} \big\{|t-s| + |y-x|\big\} .$$

Ce résultat garantit en particulier la continuité de $\widetilde{w}$ en tout point $(s,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}$. Quant à la continuité de $\widetilde{w}$ au point $(0,x)$ (pour $x \in \mathbb{R}$), il suffit d'écrire

$$\int_{\mathbb{R}} G_t(y-z)\Phi(z)\, dz - \Phi(x) = \Big[\int_{\mathbb{R}} G_t(y-z)\Phi(z)\, dz - \Phi(y)\Big] + \big[\Phi(y) - \Phi(x)\big] ,$$

puis d'appliquer (4.13) (la fonction Φ étant supposée continue bornée). □

4.7. Remarque sur les dimensions spatiales $d \geq 2$.

Un examen rapide de la preuve du théorème 4.21 (voir par exemple (4.31)) montre que l'un des ingrédients-clés de l'analyse dans ce chapitre (relative à l'équation (4.24), c'est-à-dire l'équation de la chaleur sur $[0,T] \times \mathbb{R}$, en présence d'un champ brownien) est l'intégrabilité espace-temps du carré de la solution fondamentale, autrement dit le fait que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |G_s(x)|^2 \, ds\, dx \ < \ \infty .$$

Malheureusement, en dimension (spatiale) $d \geq 2$, cette propriété n'est plus vérifiée. En effet, pour $d \geq 2$, la solution fondamentale de l'équation de la chaleur (sur $\mathbb{R}^d$) est donnée par

$$G_t^{(d)}(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{4t}\Big) \mathbf{1}_{\{t>0\}} ,$$

et l'on a alors

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \big|G_s^{(d)}(x)\big|^2 \, ds\, dx = \int_0^t \frac{ds}{(4\pi s)^d} \int_{\mathbb{R}^d} dx \, \exp\Big(-\frac{|x|^2}{2s}\Big) = c_d \int_0^t \frac{ds}{s^{d/2}} = \infty .$$

Ce constat nous empêche ainsi d'étendre l'analyse précédente en dimension spatiale $d \geq 2$. Une façon de surmonter le problème est d'envisager un modèle dans lequel le champ W, tout en restant gaussien et "brownien en temps", présenterait une régularité spatiale "supérieure à celle du champ brownien". Le début d'une autre histoire...

References

[1] I. Karatzas and S. Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer-Verlag New York, 2nd edition (1998).

[2] H. Kunita: Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations. Cambridge University Press, Cambridge (1991).

[3] G. Da Prato and J. Zabczyk: Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge University Press, 2nd edition (2014).

[4] D. Revuz and M. Yor: Continuous martigales and Brownian motion. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3rd edition (1999).

[5] M. Sanz-Solé and M. Sarrà: Hölder continuity for the stochastic heat equation with spatially correlated noise. In: Stochastic analysis, random fields and applications (R.C. Dalang, M. Dozzi & F. Russo, eds), pp. 259-268, Progress in Probability 52, Birkhäuser, Basel, 2002.

[6] J.B. Walsh: An introduction to stochastic partial differential equations. In: *Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour*, XIV-1984. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1180, pp. 265-439. Springer, Berlin (1986).