Chapitre 1

Quelques compléments d'analyse

1.1 Les symboles de Landau et de Vinogradov

Symbole de Landau : $f = O(g)$ quand x tend vers $+\infty$ indique qu'il existe K et x_0 tels que pour $x > x_0$, on ait $|f(x)| \leq K|g(x)|$.
Cette notation est parfois remplacée par $f \ll g$ qui est la notation de Vinogradov.
Exemples.
$1/x^2 = O(1/x)$, $2 - x^3 + 7x^2 = O(x^3)$ quand x tend vers ∞.
Par contre, quand x tend vers 0, $2-x^3+7x^2 = O(1)$ et $3/x+1/x^2+5+x^7 = O(1/x^2)$.

1.2 Intégrale de Stieltjes

Comment traiter une somme de la forme $\sum \alpha_n f(n)$ où f est une fonction agréable, par exemple dérivable ?
Pour cela on peut utiliser l'intégrale de Stieltjes. Soient $\alpha, f : [a, b] \to \mathbb{R}$. L'intégrale de Stieltjes

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\, \alpha x$$

est la limite si elle existe de

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)],$$

où $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq x_{i+1} - x_i < \delta$ lorsque δ tend vers 0.
Le cas $\alpha(x) = x$ correspond à Lebesgue ou Riemann.

Définition 1.2.1. *Une fonction f définie sur $[a,b]$ est dite à variation bornée s'il existe $C>0$ telle que pour toute subdvision du segment $[a,b]$ $\sigma : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, on ait*

$$V(f,\sigma) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C.$$

On notera également $V_{[a,b]}(f,\sigma)$ la quantité ci-dessus.

Théorème 1.2.2. *Avec les notations précédentes, on a :*
(i) Si f est continue sur $[a,b]$ et α est à variation bornée alors l'intégrale de Stieltjes existe.
(ii) Si f est à variation bornée et α est continue alors l'intégrale de Stieltjes existe et on a la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,\alpha(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)\,\mathrm{d}\,f(x). \tag{1.2.1}$$

Une série de résultats sur les fonctions à variation bornée
• Une fonction est à variation bornée sur $[a,b]$ si et seulement si elle est la différence de deux fonctions croissantes.
• L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction à variation bornée est au plus dénombrable.
• Toute fonction à variation bornée sur $[a,b]$ est dérivable presque partout sur $[a,b]$ et sa dérivée est intégrable sur $[a,b]$.
• Si f est une fonction réelle dérivable en tout point de $[a,b]$ et si f' est intégrable sur $[a,b]$ alors f est à variation bornée sur $[a,b]$.
• On peut étendre ces notions à des fonctions à valeurs complexes en considérant les parties réelles et imaginaires.
• La fonction définie par $f(x) = x^2\cos(\pi/x^2)$ pour $x \in]0,1]$ et $f(0)=0$ est dérivable sur $[0,1]$ mais n'est pas à variation bornée. On peut considérer des subdivisions données par des points $x_k = 1/\sqrt{k}$; $|f(x_k) - f(x_{k-1})| \geq 2/k$ qui est le terme d'une série divergente.
Exemple d'application. On utilisera souvent la formule

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \int_{1-1/2}^{N+1/2} a_t d[t]$$

où on a noté $a_t = a_{[t]}$. On vérifie en effet que le membre de gauche vaut bien la limite des sommes

$$\sum_{i=0}^{M} a_{[\xi_i]}([x_{i+1}] - [x_i]),$$

où on a repris les notations du début de ce paragraphe. Les bornes $1/2$, $N+1/2$ peuvent être remplacées $1-\varepsilon$, $N+\varepsilon$ et souvent par 1 et N quitte à remplacer a_n par une suite qui s'annule en dehors de $[1,N]$.

On a également
$$\sum_{n=1}^{N} a_n f(n) = \int_{1/2}^{N+1/2} a_t \,\mathrm{d}\, F(t)$$
où $F(t) = \sum_{n\le t} f(n)$.
En notant $S(t) = \sum_{A-\varepsilon<n\le t} a_n = \sum_{A\le n\le t} a_n$, on retrouve la formule de sommation d'Abel valable pour A et B entiers (quand f est dérivable)

$$\begin{aligned}\sum_{n=A}^{B} a_n f(n) &= \int_{A-\varepsilon}^{B+\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}\, S(t) = [S(t)f(t)]_{A-\varepsilon}^{B+\varepsilon} - \int_{A-\varepsilon}^{B+\varepsilon} S(t)f'(t)\,\mathrm{d}\, t \\ &= S(B)f(B) - S(A)f(A) - \int_{A}^{B} S(t)f'(t)\,\mathrm{d}\, t.\end{aligned}$$

Références

- Titchmarsh : The Theory of functions, Oxford University Press, pp. 355-371 ;
- Kolmogorov et Fomine : Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Ellipse, pp. 326-357 ;
- Rudin : Analyse réelle et complexe, Masson, pp. 154-162.
- Widder : The Laplace transform, chapitre 1.

1.3 La fonction Γ d'Euler.

On trouvera des démonstrations des résultats donnés dans ce paragraphe dans les deux ouvrages suivants :
Whittaker et Watson, Modern Analysis, chapitres 12 et 13.
Tenenbaum, Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres, 4ème édition, Belin 2015. (Tout un chapitre est consacré à cette fonction).

Définition 1.3.1. *Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re ez > 0$, on définit :*
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}\, t.$$
La fonction $z \mapsto 1/\Gamma(z)$ admet un prolongement analytique sur $\mathbb{C}$.

Théorème 1.3.2. (Produit de Weierstrass). *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :*
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\mathrm{e}^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)\mathrm{e}^{-z/n},$$
où $\gamma = 0,5772156649...$ est la constante d'Euler. La fonction Γ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, sans zéro et admet des pôles simples en $z = 0, -1, -2$, etc.

Proposition 1.3.3. *Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^-$, on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.*

Corollaire 1.3.4. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

Proposition 1.3.5. *Pour* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Corollaire 1.3.6. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Proposition 1.3.7. (Formule de duplication de Legendre) *Pour* $z \in \mathbb{C} \setminus (-\frac{1}{2}\mathbb{N})$, *on a*

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} 2^{1-2z} \Gamma(2z).$$

Sur l'angle $|\arg s| \leq \pi - \varepsilon$, la fonction Γ est holomorphe et ne s'annule pas, on peut définir $\log \Gamma(s)$ en prenant $\log \Gamma(1) = 0$. (On rappelle que $\Gamma(1) = 1$.)

Théorème 1.3.8. (Formule de Stirling). *Pour* $0 \leq \theta < \pi$ *fixé,* $|\arg(z)| < \theta$, *on a*

$$\log(\Gamma(z)) = (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O_\theta(|z|^{-1}), \quad |z| \to +\infty.$$

On a ainsi

$$\Gamma(s) = \big(\frac{2\pi}{s}\big)^{1/2} s^s \mathrm{e}^{-s} (1 + O_\theta(|s|^{-1})).$$

Pour $s = n+1$ on retrouve la formule de Stirling pour $n!$:

$$n! = n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + O(n^{-1})).$$

Enfin en écrivant $s = \sigma + it$, on obtient

$$\Gamma(\sigma + it) = \sqrt{2\pi} t^{\sigma - 1/2} \mathrm{e}^{-\frac{\pi t}{2}} \left(\frac{t}{e}\right)^{it} \big(1 + O(t^{-1})\big)$$

pour $t > 0$, la constante du O dépendant de σ.