C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, p. 1355-1360, 1997
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Stabilisation frontière d'un système d'élasticité

Aissa GUESMIA

Institut de recherche mathématique avancée, Université Louis Pasteur et CNRS,
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg CEDEX, France.
E-mail : guesmia@math.u-strasbg.fr

Résumé. Dans cette Note, on étudie l'existence, l'unicité et la stabilisation d'un système d'élasticité par un « feedback » frontière non linéaire. Ce travail généralise des résultats obtenus dans [1].

Boundary stabilization of an elasticity system

Abstract. *We prove in this Note the global existence, uniqueness and stabilization of an elasticity system with nonlinear boundary damping. This work extends results obtained by Alabau and Komornik in* [1]

Abridged English Version

Let Ω be a bounded open subset of $\mathbf{R}^n$ of boundary Γ of class C^2 and let $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be a non-decreasing continuous function such that $g(0) = 0$. Let $a_{ijkl} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $i, j, k, l = 1, \ldots, n$ such that

$$(1) \qquad a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl} \quad \text{and} \quad a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq \alpha\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \quad \text{on} \quad \Omega$$

for some fixed $\alpha > 0$ and for every symmetric tensor ε_{ij}, and let $a \geq 0$ be a real number.
Fix a point $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbf{R}^n$ and set $m(x) = x - x_0$, $R = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}$,

$$(2) \qquad \Gamma_0 = \{x \in \Gamma : m(x).\nu(x) \leq 0\} \quad \text{and} \quad \Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0.$$

For a given function $u = (u_1, \ldots, u_n) : \Omega \to \mathbf{R}^n$, we note $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ and $\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, where $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial u_j}$. We consider the following system:

$$(3) \qquad \begin{cases} u_i'' - \sigma_{ij,j} = 0 & \text{in} \quad \Omega \times \mathbf{R}^+, \\ u_i = 0 & \text{on} \quad \Gamma_0 \times \mathbf{R}^+, \\ \sigma_{ij}\nu_j + au_i + g(u_i') = 0 & \text{on} \quad \Gamma_1 \times \mathbf{R}^+, \\ u_i(0) = u_i^0 \quad \text{and} \quad u_i'(0) = u_i^1 & \text{in} \quad \Omega, \\ i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Note présentée par Jacques-Louis Lions.

For the existence and uniqueness of solutions of system (3), we assume that

$$\Gamma_0 \neq \emptyset \quad \text{or} \quad a > 0, \tag{4}$$

$$|g(x)| \leq c'(1 + |x|) \quad \forall x \in \mathbf{R}, \tag{5}$$

for some constant $c' > 0$. Then the system (3) is well-posed in the standard sense (*see* [5]).

We study then the asymptotic behaviour of the energy

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_i'u_i' + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij})dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} au_iu_i d\Gamma, \quad t \in \mathbf{R}^+, \tag{6}$$

of the system (3). We assume that there exists $\gamma \in]-\infty, 2[$ such that

$$(x_m - x_m^0)(\partial_m a_{ijkl})\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \leq \gamma a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \quad \text{on} \quad \Omega, \tag{7}$$

for every symmetric tensor ε_{ij}, where $\partial_m a_{ijkl} = \frac{\partial a_{ijkl}}{\partial x_m}$. We suppose that

$$|x - x_0| = R \quad \text{for all} \quad x \in \Gamma_1. \tag{8}$$

We prove the following stability result:

THEOREM 1. – *Assume that g is globally Lipschitz, $a < \frac{(2-\gamma)\alpha}{4R}$, and the conditions* (1), (2), (4), (7), *and* (8) *are satisfied. Let $c_1 > 0$ and $p \geq 1$ be two fixed constants.*

We suppose that g verifies the condition

$$c_1 \inf\{|x|, |x|^p\} \leq |g(x)| \quad \forall x \in \mathbf{R}, \tag{9}$$

then, for every $(u^0, u^1) \in (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n$, the energy E verifies the estimate

$$E(t) \leq c\, t^{\frac{-2}{p-1}} \quad \forall t \geq 0, \quad si \quad p > 1, \quad and \quad E(t) \leq E(0)\, e^{1-\omega t} \quad \forall t \geq 0, \quad si \quad p = 1, \tag{10}$$

where $c > 0$ depends on $E(0)$, Ω; and $\omega > 0$ depends only on Ω.

If the function g verifies

$$c_1|x|^p \leq |g(x)| \quad if \quad |x| \leq 1, \tag{11}$$

$$p \geq 1 \quad if \quad n = 1, \quad p > 1 \quad if \quad n = 2, \quad and \quad p \geq n - 1 \quad if \quad n \geq 3. \tag{12}$$

Then any strong solution u of (3) *verifies* (10) *with the constants c and ω depending on u.*

REMARKS. – * Theorem 1 holds true by replacing the boundary condition on Γ_1 by $\sigma_{ij}\nu_j + au_i + g_i(u_i') = 0$, where the functions g_i verify the supposed conditions on g.

* Theorem 1 generalises the results obtained in [1] for the study of system (3) for the case where a_{ijkl} are constants and $g(x) = bx$ with b being a positive constant.

Formulation des résultats

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ de frontière Γ de classe C^2 et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue croissante telle que $g(0) = 0$. Soient $a_{ijkl} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $i, j, k, l = 1, \ldots, n$ tels que

$$a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl} \quad \text{et} \quad a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq \alpha\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \quad \text{sur} \quad \Omega \tag{1}$$

pour un nombre $\alpha > 0$ fixé, et pour tout tenseur symétrique ε_{ij}. (Dans toute la Note, on utilisera la convention de sommation sur les indices répétés et $a \geq 0$.)

On désigne par ν le vecteur unitaire normal extérieur à Γ. On fixe $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbf{R}^n$ et on pose $m(x) = x - x_0$, $R = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}$,

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : m(x).\nu(x) \leq 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0. \tag{2}$$

Pour une fonction donnée $u = (u_1, \ldots, u_n) : \Omega \to \mathbf{R}^n$, on pose :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \text{sur} \quad \Omega,$$

où $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial u_j}$. Puis l'on considère le système suivant :

$$\begin{cases} u_i'' - \sigma_{ij,j} = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbf{R}^+, \\ u_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times \mathbf{R}^+, \\ \sigma_{ij}\nu_j + au_i + g(u_i') = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbf{R}^+, \\ u_i(0) = u_i^0 \quad \text{et} \quad u_i'(0) = u_i^1 & \text{sur} \quad \Omega, \\ i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{3}$$

Pour l'existence et l'unicité des solutions du système (3), on suppose que

$$\Gamma_0 \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad a > 0, \tag{4}$$

$$|g(x)| \leq c'(1 + |x|), \quad \forall x \in \mathbf{R}, \tag{5}$$

pour une constante $c' > 0$. On définit les espaces de Hilbert H, V et W par :

$$H = (L^2(\Omega))^n, \quad V = (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n \quad \text{et} \quad W = (H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n,$$

où $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$. Alors, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 1. – *On suppose que les conditions* (1), (2), (4) *et* (5) *sont satisfaites. Pour tout* $(u^0, u^1) \in V \times H$, *le système* (3) *admet une solution faible unique* u *vérifiant*

$$u \in C(\mathbf{R}^+; V) \cap C^1(\mathbf{R}^+; H). \tag{6}$$

Si $(u^0, u^1) \in W \times V$ *telle que :* $\sigma_{ij}(u^0)\nu_j + au_i^0 + g(u_i^1) = 0$ *sur* Γ_1, $i = 1, \ldots, n$, *alors la solution* u *(dite forte) a la régularité*

$$u' \in L^\infty(\mathbf{R}^+; V) \quad \text{et} \quad u'' \in L^\infty(\mathbf{R}^+; H). \tag{7}$$

Si, de plus, g est globalement Lipschitz, alors on a :

$$u \in L^\infty(\mathbf{R}^+; W) \quad \text{et} \quad (g(u_1'), \ldots, g(u_n')) \in L^\infty(\mathbf{R}^+; H). \tag{8}$$

On étudie ensuite la décroissance de l'énergie

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_i'u_i' + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij})dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} au_iu_i d\Gamma, \quad t \in \mathbf{R}^+, \tag{9}$$

de la solution du système (3). On désigne par γ le plus petit nombre de $\mathbf{R}$ tel que

$$(x_m - x_m^0)(\partial_m a_{ijkl})\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \leq \gamma a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \quad \text{sur} \quad \Omega, \tag{10}$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij}, où $\partial_m a_{ijkl} = \frac{\partial a_{ijkl}}{\partial x_m}$. (Remarquer que d'après les hypothèses supposées sur a_{ijkl} et Ω, γ existe toujours.) On suppose (comme dans Komornik (*voir* [8])) que

$$\gamma < 2, \tag{11}$$

$$|x - x_0| = R \quad \text{pour tout} \quad x \in \Gamma_1. \tag{12}$$

On démontre le résultat de stabilité suivant :

THÉORÈME 2. – *On suppose que g est globalement Lipschitz, $a < \frac{(2-\gamma)\alpha}{4R}$ et les conditions* (1), (2), (4), (11)-(12) *satisfaites. Soient $c_1 > 0$ et $p \geq 1$ deux constantes fixées. On suppose que g vérifie la condition*

$$c_1 \inf\{|x|, |x|^p\} \leq |g(x)| \quad \forall x \in \mathbf{R}, \tag{13}$$

alors, pour tout $(u^0, u^1) \in V \times H$, l'énergie de la solution u de (3) *vérifie l'estimation*

$$E(t) \leq c\, t^{\frac{-2}{p-1}} \quad \forall t \geq 0, \quad si \quad p > 1, \quad et \quad E(t) \leq E(0)\, e^{1-\omega t} \quad \forall t \geq 0, \quad si \quad p = 1, \tag{14}$$

où $c > 0$ dépend de $E(0)$, Ω; et $\omega > 0$ dépend seulement de Ω. Si la fonction g vérifie

$$c_1 |x|^p \leq |g(x)| \quad si \quad |x| \leq 1, \tag{15}$$

$$p \geq 1 \quad si \quad n = 1, \quad p > 1 \quad si \quad n = 2 \quad et \quad p \geq n - 1 \quad si \quad n \geq 3. \tag{16}$$

alors toute solution forte u de (3) *vérifie* (14) *avec des constantes c et ω dépendant de u.*

REMARQUES. – * Les théorèmes 1 et 2 restent vrais si on remplace la condition au bord sur Γ_1 par la suivante : $\sigma_{ij}\nu_j + au_i + g_i(u_i') = 0$, $i = 1, \ldots, n$, où les g_i sont des fonctions vérifiant les conditions supposées sur g.

* Les théorèmes 1 et 2 généralisent un résultat obtenu dans [1] pour l'étude du système (3) dans le cas où a_{ijkl} sont des constantes et $g(x) = bx$, avec b une constante positive donnée.

D'autre part, pour démontrer le théorème 1, on va utiliser la théorie des semi-groupes non linéaires (*voir* [2], [3] et [6]) et pour démontrer les estimations de stabilité on utilise la méthode des multiplicateurs basée sur des inégalités d'intégrales (*voir* [4], [7] et [13]).

Idées de la démonstration des théorèmes

Pour le théorème 1, On prend l'application du dual $A : V \to V'$ et l'application $B : V \to V'$ définie par $\langle Bu, v\rangle_{V',V} = \int_{\Gamma_1} g(u_i)v_i d\Gamma$, $u, v \in V$.

On écrit (3) sous la forme : $U' + \mathcal{A}U = 0$ sur $\mathbf{R}^+$, $U(0) = (u^0, u^1)$, où $U = (u, u')$ et $\mathcal{A}U = (-u', Au + Bu')$. On montre que l'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal monotone dans $\mathcal{H} := V \times H$, son domaine $D(\mathcal{A}) := \{(u, z) \in V \times V : Au + Bz \in H\}$ est dense dans $\mathcal{H}$, et si g est globalement Lipschitz, alors $D(\mathcal{A}) = \{(u, z) \in W \times V : \sigma_{ij}(u)\nu_j + au_i + g(z_i) = 0 \ \text{sur}\,\Gamma_1\}$.

On applique la théorie des semi-groupes non linéaires et on en déduit le théorème 1.

Esquisse de la démonstration du théorème 2

Par un calcul simple, on trouve

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} u_i' g(u_i') d\Gamma dt = E(S) - E(T) \leq E(S), \tag{17}$$

pour tout $0 \leq S < T < \infty$. Remarquons que $xg(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$; donc l'énergie est décroissante. On multiplie l'équation (3) par $M_i E^{\frac{p-1}{2}} = (2h_m u_{i,m} + (n - 1 + \frac{\gamma}{2} + \frac{2aR}{\alpha})u_i)E^{\frac{p-1}{2}}$, où $h_m = x_m - x_m^0$, et après des intégrations par parties, on obtient :

$$(18)\qquad \left(2-\gamma-\frac{4aR}{\alpha}\right)\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt+\frac{4aR}{\alpha}\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dxdt$$

$$=\frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)E'(t)\int_\Omega M_iu_i'dxdt-\left[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega M_iu_i'dx\right]_S^T$$

$$+\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_1}\left(\left(1-\frac{\gamma}{2}-\frac{2aR}{\alpha}\right)au_iu_i-M_i(au_i+g(u_i'))+(h\nu)(u_i'u_i'-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})\right)d\Gamma dt$$

$$+\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_0}(h.\nu)\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}d\Gamma dt+\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega(h_m(\partial_m a_{ijkl})\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\gamma\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})dxdt.$$

Les conditions (2) et (10) impliquent que la dernière partie de (18) est négative, et d'après la définition de E, la deuxième partie de (18) est majoré par $cE^{\frac{p+1}{2}}(S)$.

On utilise (12) et on montre, par des intégrations par parties, les deux identités suivantes :

$$(19)\qquad \int_{\Gamma_1}-2h_mu_{i,m}u_id\Gamma+\int_{\Gamma_1}(4aR\varepsilon_{mi}u_i\nu_m-2aR(\operatorname{div}u)(u\nu))d\Gamma$$

$$=\int_\Omega(4aR\varepsilon_{mi}\varepsilon_{mi}-2aRu_{i,m}u_{i,m}-2aR|\operatorname{div}u|^2)dx,$$

$$(20)\qquad \int_{\Gamma_1}-2h_mu_{i,m}g(u_i')d\Gamma=2R\int_\Omega(-u_{m,m}u_{i,i}'+u_{m,i}u_{i,m}')g'(u_i')dx$$

$$+\int_{\Gamma_1}(2R(\operatorname{div}u)g(u_i')\nu_i-4aR\varepsilon_{mi}g(u_i')\nu_m)d\Gamma.$$

((19) est l'identité nouvelle cruciale du travail de Alabau et Komornik (*voir* [1]). Comme $|\operatorname{div}u|^2\le\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$, g' est borné et $|g(x)|\le c_2|x|$, $\forall x\in\mathbf{R}$, pour une constante c_2, alors substituant (19) et (20) dans (18) et utilisant (1), (12), (17) et l'inégalité de Young pour séparer $\operatorname{div}u$ et $g(u_i')$ de u et ε_{mi}, on obtient, pour une constante $c>0$ ne dépendant pas de u,

$$(21)\qquad \left(2-\gamma-\frac{4aR}{\alpha}\right)\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt\le cE^{\frac{p+1}{2}}(S)$$

$$+c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_1}u_iu_id\Gamma dt+R\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_1}u_i'u_i'd\Gamma dt.$$

On multiplie (3) par η, la solution du système : $\sigma_{ij,j}(\eta)=0$ sur Ω et $\eta=u$ sur Γ (*voir* [4] pour une étude similaire de l'équation des ondes), pour montrer l'estimation

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_1}|u|^2d\Gamma dt\le cE^{\frac{p+1}{2}}(S)+\epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt+c\epsilon^{-1}\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_1}u_i'u_i'd\Gamma dt$$

pour tout $\epsilon\in]0,1[$. D'autre part, on utilise (13), (17) et l'inégalité de Young (*voir* [2], [7] et [13] dans une étude de l'équation des ondes), et on arrive à l'inégalité

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_1}u_i'u_i'd\Gamma dt\le\epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt+c(\epsilon)E(S)+cE^{\frac{p+1}{2}}(S)$$

pour tout $\epsilon > 0$. Si g et p vérifient (15) et (16), alors on utilise la régularité (7) et l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Gamma)$ si $n = 1$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2p}{p-1}}(\Gamma)$ si $n \geq 2$ (voir (16)). On choisit ϵ assez petit dans ces deux dernières inégalités, on remplace dans (21) et on fait tendre $T \to \infty$, on obtient

$$\int_S^\infty E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt \leq c(1 + E^{\frac{p-1}{2}}(0))E(S), \quad \forall S \geq 0 \tag{22}$$

avec $c > 0$. Donc on déduit de (22) l'estimation (14) (*voir* [6], theorem 8.1). Pour les démonstrations détaillées, nous renvoyons le lecteur à [5].

Note remise le 3 mars 1997, acceptée après révision le 7 avril 1997.

Références bibliographiques

[1] **Alabau F. and Komornik V.** Boundary observability, controllability and stabilization of linear elastodynamic systems, (to appear).

[2] **Ball J. M., 1978**. On the asymptotic behavior of generalized processes, with applications to nonlinear evolution equation, *J. Differential Equations* 27, p. 224-265.

[3] **Conrad F. and Pierre M., 1994**. Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedback, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 11, p. 485-515.

[4] **Conrad F. and Rao B., 1993**. Decay of solution of wave equation in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback, *Asymptotic An.* 7, p. 159-177.

[5] **Guesmia A.** En préparation.

[6] **Komornik V., 1994**. *Exact controllability and stabilization. The Multiplier Method*, Masson-John Wiley, Paris.

[7] **Komornik V., 1993**. On the nonlinear boundary stabilization of the wave equation, *Chinese Ann. Math*, Ser. B 14 : 2, p. 153-164.

[8] **Komornik V., 1989**. Exact controllability in short time for the wave equation, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 6, p. 153-164.

[9] **Lagnese J. E., 1991**. Boundary stabilization of linear elastodynamic systems, *SIAM J. Control Optim.* 21, p. 968-984.

[10] **Lagnese J. E., 1991**. Uniform asymptotic energy estimates for solution of the equation of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary, *Nonlinear Anal. TMA*, 16, 35-54.

[11] **Lions J.-L., 1988**. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems, *SIAM Rev.* 30, p. 1-68.

[12] **Nakao M., 1993**. On the decay of solutions of some nonlinear dissipative wave equations in higher dimensions, *Math. Z.*, 193, p. 227-234.

[13] **Zuazua E., 1990**. Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback, *SIAM J. Control Optim.* 28, p. 446-477.