C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 633–636, 2001
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Une nouvelle approche pour la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs

Aissa GUESMIA

Institut de recherche mathématique avancée, UFR de mathématique, Université Louis-Pasteur, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France
Courriel : guesmia@math.u-strasbg.fr

(Reçu le 24 janvier 2001, accepté le 12 février 2001)

Résumé. Nous proposons une nouvelle approche pour la stabilisation non linéaire (interne ou frontière) de certains systèmes distribués d'évolution non dissipatifs (l'énergie usuelle est non décroissante). Cette approche est directe et souple ; elle permet d'obtenir des estimations de stabilisation (connues dans le cas dissipatif) quand la méthode des inégalités intégrales dûe à Haraux (1985) et Komornik (1994) tombe en défaut en l'absence de dissipativité. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

A new approach of stabilization of nondissipative distributed systems

Abstract. *We propose a new approach to prove the nonlinear* (*internal or boundary*) *stabilization of certain nondissipative distributed evolutionary systems* (*the usual energy is not decreasing*). *This approach is direct and very flexible; it leads to decay estimates* (*known in the dissipative case*) *when the integral inequalities method due to Haraux* (1985) *and Komornik* (1994) *cannot be applied due to the lack of dissipativity.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ assez régulière, $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ trois fonctions de classe C^1 telles que f et g sont croissantes et $f(0) = g(0) = 0$. Nous nous intéressons ici au problème de stabilisation de l'équation des ondes semi-linéaire non dissipative.

1. Feedback interne

$$\text{(P1)} \qquad \begin{cases} u'' - \Delta u + h(\nabla u) + f(u) + g(u') = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

S0764-4442(01)01896-1/FLA

Supposons que $g,\ f$ et h vérifient les hypothèses suivantes : il existe des réels $c_1, c_2,\ \alpha, \beta > 0,\ q \geqslant 0$ et $r, p \geqslant 1$ avec $(n-2)q \leqslant n$ et $(n-2)p \leqslant n+2$, tels que

$$\begin{aligned} &c_1 \min\{|s|, |s|^r\} \leqslant |g(s)| \leqslant c_2 \max\{|s|^{1/r}, |s|^p\}, \quad \forall s \in \mathbb{R};\\ &|h(\zeta)| \leqslant \beta|\zeta|, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n;\\ &|f(s_1) - f(s_2)| \leqslant \alpha\big(1 + |s_1|^q + |s_2|^q\big)|s_1 - s_2|, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

On vérifie par des méthodes habituelles (la méthode de point fixe ou la méthode de Faedo–Galerkin) que, pour $\{u_0, u_1\} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega)$ donné quelconque, (P1) a une solution unique

$$u \in \mathrm{C}\big(]0,\infty]; \mathrm{H}_0^1(\Omega)\big) \cap \mathrm{C}^1\big(]0,\infty[; \mathrm{L}^2(\Omega)\big).$$

Dans le cas $h \equiv 0$, la stabilisation de (P1) est largement étudiée par nombreux auteurs (*voir* par exemple Lagnese [8], Triggiani [11], Haraux [4], Komornik [6] (feedback interne ou frontière), Komornik et Zuazua [7], Nakao [10] (choix particulier de f et g), Lasiecka et Tataru [9].

Dans tous ces travaux, (P1) est dissipatif : l'énergie des solutions introduite par la formule habituelle ($F(s) = \int_0^s f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$, pour tout $s \in \mathbb{R}$) :

$$E(t) = \int_\Omega \big(|u'|^2 + |\nabla u|^2 + 2F(u)\big)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

est décroissante :

$$E'(t) = -2\int_\Omega u' g(u')\,\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

et les estimations de stabilisation suivantes ont été obtenues ($c,\ \omega > 0$) :

$$\begin{cases} E(t) \leqslant c\,E(0)\mathrm{e}^{-\omega t} & \text{si } r = 1,\\ E(t) \leqslant c(1+t)^{-2/(r-1)} & \text{si } r > 1. \end{cases} \tag{3}$$

La preuve est basée sur la méthode des multiplicateurs (on multiplie (P1) par $u\,E^{(r-1)/2}(t)$ et après des intégrations par parties et différentes majorations), on montre

$$\int_S^\infty E^{(r+1)/2}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant c\,E(S), \quad \forall S \in \mathbb{R}^+. \tag{4}$$

Le lemme de Haraux et Komornik ([6], lemme 9.1) donne alors les estimatons (3). La décroissance de l'énergie est cruciale dans la preuve de (4).

Quand $h \not\equiv 0$, (P1) n'est pas nécessairement dissipatif :

$$E'(t) = -2\int_\Omega u' g(u')\,\mathrm{d}x - 2\int_\Omega u' h(\nabla u)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Le lemme précédent ne peut pas être appliqué.

On donne une méthode directe qui permet de montrer les estimations (3), en distinguant deux cas :

1. *La fonction h est linéaire* : $h(\nabla u) = -\nabla\phi \cdot \nabla u$ avec $\phi \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)$. On introduit l'énergie équivalente

$$E_0(t) = \int_\Omega \mathrm{e}^{\phi(x)}\big(|u'|^2 + |\nabla u|^2 + 2F(u)\big)\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

THÉORÈME 1. – *L'énergie équivalente* (6) *vérifie les estimations* (3).

Démonstration. – On a $E_0'(t) = -2\int_\Omega \mathrm{e}^{\phi(x)} u' g(u')\,\mathrm{d}x \leqslant 0$. Donc on suit la preuve standard (en utilisant le multiplicateur $\mathrm{e}^{\phi(x)} u\, E_0^{(r-1)/2}(t)$) et on montre (4) sans aucune restriction sur ϕ. □

2. *La fonction h est non linéaire* : nous ne considérons que le cas où g est sous-linéaire. Dans le cas échéant, on ne sait pas si (P1) est polynomialement stable.

THÉORÈME 2. – *Supposons que β est assez petit et $p = r = 1$ (g est dite sous-linéaire). Alors* (P1) *est uniformément stable* :

$$E(t) \leqslant c\,E(0)\mathrm{e}^{-\omega t}.$$

Démonstration abrégée. – On montre qu'il existe $d \in]0,1[$ et $T_0 > 0$:

$$E(S+T_0) \leqslant d\,E(S), \quad \forall S \in \mathbb{R}^+. \tag{7}$$

Cette inégalité donne le résultat du théorème 2. Au début on suit la démonstration connue dans le cas dissipative. On multiplie (P1) par u et on intègre par parties sur $\Omega \times [S,T]$, on arrive à montrer que, pour tout $0 \leqslant S \leqslant T < \infty$,

$$\int_S^T E(t)\,\mathrm{d}t \leqslant a_0\big(E(S) + E(T)\big) + a_1\big(E(S) - E(T)\big), \tag{8}$$

où $a_0, a_1 > 0$. Si $h \equiv 0$ ((P1) est dissipatif), (8) implique (4) pour $r = 1$, et la preuve est donc terminée. D'après (1), (2) et (5) on montre que $E'(t) \leqslant \beta E(t)$. Le lemme de Gronwall implique que, pour tout $0 \leqslant S \leqslant t < \infty$,

$$E(t) \leqslant \mathrm{e}^{\beta(t-S)} E(S).$$

On suppose que $2a_0\beta < 1$ et on fixe $T_0 > \frac{-1}{\beta}\ln(1 - 2a_0\beta)$. On note

$$I := \int_S^{S+T_0} E(t)\,\mathrm{d}t + (a_1 - a_0)E(S+T_0).$$

En remarquant que $E(t) \geqslant \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial t}\big((1 - \mathrm{e}^{-\beta(t-S)})E(t)\big)$, pour tout $0 \leqslant S \leqslant t < \infty$, on montre que $I \geqslant a_2 E(S+T_0)$ avec $a_2 > a_0 + a_1$. On combine avec (8) en prenant $T = S + T_0$ on obtient (7). D'où la stabilité uniforme de (P1).

Nos résultats restent vrais si on considère le cas plus général suivant :

$$u'' - \Delta u + q_1(x)h(\nabla u) + q_2(x)f(u) + q_3(x)g(u') = 0,$$

avec $q_i : \Omega \to \mathbb{R}$ bornées telles que $q_2(x) \geqslant 0$, $q_3(x) \geqslant b_0 > 0$.

Si $h(\nabla u) = -\nabla\phi \cdot \nabla u$ avec $\phi \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)$, alors on définit l'énergie équivalente par ($\varphi \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)$ vérifie $\nabla\varphi = q_1(x)\nabla\phi$)

$$E_0(t) = \int_\Omega \mathrm{e}^{\varphi(x)}\big(|u'|^2 + |\nabla u|^2 + 2q_2(x)F(u)\big)\,\mathrm{d}x.$$

2. Feedback frontière

$$(\mathrm{P2}) \qquad \begin{cases} u'' - \Delta u + q_1(x)h(\nabla u) + q_2(x)f(u) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\nu u + a(x)u + q_3(x)g(u') = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où $0 \leqslant a(x) \leqslant M < \infty$ et $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ est la partition usuelle de Γ.

Les estimations (3) restent vraies où, si $h(\nabla u) = -\nabla\phi \cdot \nabla u$ avec $\phi \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)$, l'énergie équivalente est définie par ($\varphi \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)$ vérifiant $\nabla\varphi = q_1(x)\nabla\phi$)

$$E_0(t) = \int_\Omega \mathrm{e}^{\varphi(x)}\big(|u'|^2 + |\nabla u|^2 + 2q_2(x)F(u)\big)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} \mathrm{e}^{\varphi(x)}a(x)|u|^2\,\mathrm{d}\Gamma. \tag{9}$$

Si h est non linéaire, alors on suppose que g est sous linéaire et $\beta\|q_1\|_\infty$ est assez petit et on obtient la décroissance exponentielle de l'énergie usuelle définie par (9) avec $\varphi \equiv 0$.

La méthode présentée dans cette Note est directe et très souple ; elle peut être appliquée sur les systèmes non dissipatifs (élasticité, thermoelasticité, Petrovsky, couplé...) et généraliser les résultats de stabilisation connus dans le cas dissipatif, nous renvoyons le lecteur à [3] pour les preuves détaillées et les applications générales de cette méthode.

Références bibliographiques

[1] Guesmia A., On linear elasticity systems with variable coefficients, Kyushu J. Math. 52 (1998) 227–248.
[2] Guesmia A., Energy decay for a damped nonlinear coupled system, J. Math. Anal. Appl. 239 (1999) 38–48.
[3] Guesmia A., A new approach of stabilization of nondissipative distributed systems (en préparation).
[4] Haraux A., Two remarks on dissipative hyperbolic problems, in: Research Notes in Mathematics, Pitman, 1985, pp. 161–179.
[5] Haraux A., Zuazua E., Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems, Arch. Rational Mech. Anal. 100 (1988) 191–206.
[6] Komornik V., Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method, Masson–John Wiley, Paris, 1994.
[7] Komornik V., Zuazua E., A direct method for boundary stabilization of the wave equation, J. Math. Pures Appl. 69 (1990) 33–54.
[8] Lagnese J.E., Decay of solution of wave equations in a bounded region with boundary dissipation, J. Differ. Eq. 50 (1983) 163–182.
[9] Lasiecka I., Tataru D., Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping, Differ. Integ. Eq. 6 (1993) 507–533.
[10] Nakao M., On the decay of solutions of some nonlinear dissipative wave equations in higher dimensions, Math. Z. 193 (1986) 227–234.
[11] Triggiani R., Wave equation on a bounded domain with boundary dissipation: an operator approach, J. Math. Anal. Appl. 137 (1989) 438–461.