Une note sur les fibrés holomorphes non-filtrables

Marian Aprodu, Matei Toma

Un théorème de structure pour les fibrés vectoriels stables de rang deux sur les surfaces elliptiques algébriques a été démontré dans [7]. Dans cette note, nous donnons une description des fibrés vectoriels holomorphes de rang deux sur une surface X complexe, compacte, elliptique, non-kählérienne.

Au-dessus d'une telle surface, il existe toujours des fibrés holomorphes de rang deux non-filtrables, c'est à dire, qui n'admettent pas de sous-faisceaux cohérents de rang un, *voir* [3], [13]. Les fibrés filtrables apparaissent comme termes d'une extension de Serre, tout comme dans le cas algébrique.

Il y a deux autres constructions classiques pour les fibrés de rang deux, les modifications élémentaires et les images directes de fibrés de rang un par des revêtements doubles de la surface X (*voir*, par exemple [8], p. 49). Notre résultat montre que tout fibré non-filtrable au-dessus de X est obtenu à l'aide de ces deux méthodes de construction.

Théorème 1 *Soient X une surface complexe, compacte, minimale, non-kählérienne, qui admet une fibration elliptique $X \xrightarrow{f} B$ sur une courbe lisse, et E un fibré vectoriel holomorphe non-filtrable de rang deux sur X. Alors, il existe un revêtement $C \xrightarrow{\mu} B$ à deux feuillets, par une courbe lisse, et un fibré en droites L sur la normalisée Y du produit fibré $X \times_B C$ tels que l'image directe $\nu_* L$ est une modification élémentaire de E, où $Y \xrightarrow{\nu} X$ est la projection.*

Démonstration. Toute surface minimale, elliptique, non-kählérienne X possède une structure de *quasi-fibré elliptique*, c'est à dire, toutes les fibres lisses de la fibration $X \to B$ sont isomorphes deux-à-deux, et les seules fibres singulières sont des multiples des courbes elliptiques, *voir* [4], p. 66. De plus, il existe un revêtement ramifié cyclique $B' \xrightarrow{\psi} B$ de degré m (ou m est le ppcm des multiplicités des fibres de f) et un relèvement $X' \xrightarrow{\varphi} X$ à un morphisme fini, où $X' \xrightarrow{f'} B'$ est une surface elliptique sans fibre multiple, plus précisément, un fibré elliptique principal (*cf.* [4], p. 67). D'après [11] (*voir* Section 14), on voit que le groupe $\mathbf{Z}_m$ agit trivialement sur la duale $F^\vee = \mathrm{Pic}_0(F)$ de la fibre de f'.

Rappelons aussi que la classe d'une fibre F_b de $X \to B$, avec $b \in B$, est un élément de torsion de $NS(X)$, donc orthogonal sur $c_1(E)$. En particulier, $\chi(E_{|F_b}) = 0$ pour tout $b \in B$.

Dans la démonstration, nous aurons besoin du résultat suivant, qui découle directement de la description du groupe de Picard d'un quasi-fibré elliptique de [6].

Lemme 1 *Avec les notation précédentes, pour toute application holomorphe $B \xrightarrow{\lambda} F^\vee$ il existe un fibré en droites $L \in \mathrm{Pic}(X)$ tel que $L|_{F_b} \cong \lambda(b)$ pour $b \in B$ général.*

En dehors d'un sous-ensemble fini M de B, la restriction de E à la fibre F_b au-dessus de $b \in B \setminus M$ est semi-stable. En effet, si $E|_{F_b}$ n'est pas semi-stable, il existe un faisceau quotient L_b déstablisant, et donc de degré $\deg(L_b) < 0$. La modification élémentaire E' de E donnée par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow L_b \longrightarrow 0$$

aura le discriminant $\Delta(E') < \Delta(E)$. Par définition, $\Delta(E) = \big(4c_2(E) - c_1^2(E)\big)/8$, et on a $\Delta(E) \geq 0$ pour tout fibré holomorphe de rang deux sur une surface non-algébrique (*cf.* [5], [3], [4]). Donc, il n'y a qu'un nombre fini de modifications élémentaires comme ci-dessus qui nous sont permises.

Soit M' l'ensemble des points de B' qui se projettent sur M. Alors, pour tout $b' \in B' \setminus M'$, le fibré $\varphi^* E|_{F_{b'}}$ est semi-stable. Par conséquent, pour tout $b' \in B' \setminus M'$, la restriction $\varphi^* E|_{F_{b'}}$ est soit une extension de deux fibrés en droites isomorphes, soit une somme directe de deux fibrés en droites non-isomorphes (*cf.* [2]), et de même est vrai pour les restrictions de E au-dessus des fibres F_b, pour $b \in B \setminus M$.

Sur un voisinage ouvert assez petit V d'un point arbitraire $b' \in B'$ la fibration f' est triviale. En utilisant le fibré de Poincaré de la fibre F on déduit l'existence d'une courbe analytique C'_V dans $V \times F^\vee$ qui paramètre les sous-faisceaux inversibles de degré zéro des restrictions de $\varphi^* E$ aux fibres de f'. Puisque f' est un fibré elliptique principal, les courbes analytiques C'_V obtenues de cette façon se recollent à un sous-espace analytique C' de $B' \times F^\vee$. En éliminant au besoin les composantes irréductibles de C' au-dessus de M' on se ramène au cas où le morphisme $C' \to B'$ est fini. Le degré de ce morphisme ne peut valloir que deux ou un.

Maintenant on utilise le fait que $\mathbf{Z}_m$ agit trivialemment sur $F^\vee$. On en déduit que l'image C'' de C' dans $B \times F^\vee$ est une courbe dont la projection sur B est un morphisme *fini* de degré un ou deux.

Soit C la normalisation de C'', et $C \xrightarrow{\mu} B$ le revêtement induit. Nous allons montrer que C ne contient pas de composante irréductible de degré un sur B. En appliquant le Lemme 1, on observe que l'existence d'une composante irréductible de degré un au-dessus de B entraîne l'existence d'un fibré $L \in \mathrm{Pic}(X)$ dont la restriction à une fibre *générique* F_b est un sous-faisceau de $E|_{F_b}$. Le faisceau $f_*\big(E \otimes L^{-1}\big)$ est non-nul, donc, en le tordant par un fibré en droites suffisamment ample A sur B, $f_*\big(E \otimes L^{-1}\big) \otimes A$ aura des sections non-nulles. Ceci implique l'existence de sections non-triviales de $E \otimes L^{-1} \otimes f^* A$, ce qui contredit la non-filtrabilité de E.

Par conséquent C est irréductible et $C \xrightarrow{\mu} B$ est un revêtement double. En particulier, il existe, pour $b \in B$ général, une décomposition en somme directe $E|_{F_b} \cong \lambda_1(b) \oplus \lambda_2(b)$, avec $\lambda_1(b), \lambda_2(b) \in \mathrm{Pic}_0(F_b)$, et $\lambda_1(b) \not\cong \lambda_2(b)$ (*comparer* avec [8], p. 238).

Dénotons par Y la normalisée du produit fibré $X \times_B C$, et par $Y \xrightarrow{\nu} X$ et $Y \xrightarrow{g} C$ les deux projections. Le Lemme 1 nous assure l'existence d'un fibré en droites L sur Y tel que, pour c général dans C, $L|_{F_c}$ est isomorphe au sommand direct de $E|_{F_{\mu(c)}}$ qui correspond au point $c \in \mu^{-1}(\mu(c))$.

L'image directe $g_*\big(\nu^* E \otimes L^{-1}\big)$ est non-nulle, et donc admet des sections non-triviales après tensorisation par un fibré en droites A suffisamment ample sur C. On en déduit un morphisme injectif

$$L \otimes g^* A^{-1} \to \nu^* E,$$

et encore

$$\nu_*\big(L \otimes g^* A^{-1}\big) \to \nu_* \nu^* E = E \oplus (E \otimes f^* \mathcal{L}^{-1}),$$

où $\mathcal{L}$ dénote le fibré en droites sur B qui induit le revêtement cyclique $C \to B$ (*voir*, par exemple, [8], p. 46-47).

Puisque les fibrés E et $E \otimes \mathcal{L}^{-1}$ sont non-filtrables, la composition du second morphisme avec la projection sur l'un des facteurs est injective, ce qui montre que $\nu_*\big(L \otimes g^* A^{-1}\big)$, ou $\nu_*\big(L \otimes g^*(A^{-1} \otimes \mu^* \mathcal{L})\big)$, est une modification élémentaire de E.

Remarque 1 Comme il nous a été signalé par le rapporteur, on peut donner une démonstration alternative de notre résultat en utilisant l'espace de Douady relatif $D(E/B)$ des faisceaux quotients de E, de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle. Voici l'esquisse de cette preuve. D'après [10], la restriction du morphisme naturel $D(E/B) \xrightarrow{\pi} B$ à chaque composante irréductible est propre. En utilisant le fait que la topologie de $D(E/B)$ est à base dénombrable (*voir* [9]), la propriété d'universalité de $D(E/B)$ et la non-filtrabilité de E, on voit que $D(E/B)$ contient une composante irréductible de dimension un dont la projection sur B est un morphisme fini de degré deux. Par normalisation on obtient la courbe attendue C avec un revêtement à deux feuillets sur B. La restriction du faisceau universel au-dessus de la courbe C induit un faisceau quotient de rang un de l'image réciproque de E sur la normalisation du produit fibré. Ceci implique le résultat.

Remarque 2 À partir de notre résultat on peut donner un énoncé similaire pour les surfaces elliptiques, non-kählériennes, pas nécessairement minimales. En effet, d'après le résultat de [16], tout fibré vectoriel holomorphe de rang deux sur l'éclatée d'une surface non-algébrique X est une suite de modifications élémentaires d'une image inverse d'un fibré sur X, éventuellement tordue par un fibré en droites.

Remarque 3 La difficulté principale du problème de l'existence des fibrés holomorphes sur une surface non-algébrique X consiste dans le manque de méthodes de construction de fibrés non-filtrables. Dans le cas où la surface X est kählérienne ou de la classe VII, cette difficulté a été essentiellement surmontée à l'aide de la théorie de Donaldson et de la théorie des déformations, [12], [14]. Notre Théorème peut servir d'ingrédient technique pour les seuls cas restants, à savoir ceux des surfaces elliptiques non-kählériennes ; *voir*, par exemple, la remarque suivante.

Remarque 4 Soit E un fibré non-filtrable de rang deux au-dessus d'un fibré elliptique principal $X \xrightarrow{f} B$. La première classe de Chern de E induit un morphisme de variétés abéliennes $J_B \xrightarrow{\widehat{c}_1} \mathrm{Pic}_0(F)$, où F est la fibre de f, *voir* [4], p. 64. Dans [1] on a montré que l'existence des fibrés holomorphes *de discriminant zéro* sur X qui sont des images directes de fibrés en droites par des revêtements doubles est déterminée par le comportement de $\widehat{c}_1$ sur les points de 2-torsion. Ceci et notre théorème donnent par la suite un critère d'existence pour les fibrés non-filtrables de rang deux sur X.

Remarque 5 Prenons de nouveau un fibré E non-filtrable de rang deux au-dessus d'un fibré elliptique principal $X \xrightarrow{f} B$. Si le discriminant de E est nul, alors E est isomorphe à une image directe d'un fibré en droites sur Y.

En effet, on a vu, dans la preuve du théorème, qu'il existe une modification élémentaire E' de E telle que $E'|_{F_b}$ est semi-stable pour tout $b \in B$. Puisque le discriminant de E est minimal, on a $E' = E$. En particulier, la modification élémentaire obtenue dans notre théorème est déterminée par un fibré quotient de degré zéro supporté sur une somme des fibres de f. Par réccurence, on peut supposer qu'il existe une image directe $\nu_* L$ obtenue par une modification élémentaire de E le long d'*une seule fibre* F_b de f. Alors, $E \otimes \mathcal{O}_X(-F_b)$ est une modification élémentaire de $\nu_* L$ par un fibré de $\mathrm{Pic}_0(F_b)$. Soit $c \in \mu^{-1}(b)$ un point et $\lambda(b) \in \mathrm{Pic}_0(F_b)$ le fibré associé à son image dans la bisection $C'' \subset B \times F^\vee$. Dans cette situation, on obtient une suite exacte sur X :

$$0 \longrightarrow \nu_*\big(L(-F_c)\big) \longrightarrow \nu_* L \longrightarrow \lambda(b) \longrightarrow 0.$$

Puisque les fibrés quotient de rang un et degré zéro de $(\nu_* L)_{|F_b}$ sont paramétrés par une variété connexe, la composante connexe de l'espace de modules de fibrés simples sur X, de rang deux, de déterminant fixé, qui contient $E \otimes \mathcal{O}_X(-F_b)$ contiendra aussi bien une image directe. Rappelons maintenant que l'espace de modules de fibrés simples de rang deux à discriminant nul et déterminant fixé est de dimension zéro (*voir* [15]), ce qui montre que E, lui aussi, est une image directe.

Remerciements : Nous remerçions le rapporteur et V. Brînzănescu pour avoir fait des remarques sur la version préliminaire de cette note. M. Aprodu a été financé par une bourse Marie Curie, contrat numéro HPMF-CT-2000-00895.

Références

[1] M. Aprodu, V. Brînzănescu, On the holomorphic rank-2 vector bundles with trivial discriminant over non-Kähler elliptic bundles, accepté à J. Math. Kyoto Univ.

[2] M. Atiyah, Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc. **7** (1957), 181-207.

[3] C. Bănică, J. Le Potier, Sur l'existence des fibrés vectoriels holomorphes sur les surfaces non-algébriques, J. Reine Angew. Math. **378** (1987), 1-31.

[4] V. Brînzănescu, Holomorphic vector bundle over compact complex surfaces, Lect. Notes in Math. **1624**, Springer-Verlag 1996.

[5] V. Brînzănescu, P. Flondor, Holomorphic 2-vector bundles on non-algebraic 2-tori, J. reine angew. Math. **363** (1985), 47-58.

[6] V. Brînzănescu, K. Ueno, Néron-Severi group for torus quasi bundles over curves. Moduli of vector bundles (Sanda, 1994; Kyoto, 1994), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **179**, Dekker, New York, 1996, 11-32.

[7] R. Friedman, Rank two vector bundles over regular elliptic surfaces, Invent. Math. **96** (1989), 283-332.

[8] R. Friedman, Algebraic surfaces and holomorphic vector bundles, Universitext, Springer-Verlag 1998.

[9] A. Fujiki, Countability of the Douady Space of a Complex Space, Japan J. Math. **5** (1979), 431-447.

[10] A. Fujiki, On the Douady space of a Compact Complex Space in the Category $\mathcal{C}$. II, Publ. RIMS **20** (1984), 461-489.

[11] K. Kodaira, On compact analytic surfaces. I, Ann. of Math. **71** (1960), 111-152, II, Ann. of Math. **77** (1963), 563-626, III, Ann. of Math. **78** (1963), 1-40.

[12] A. Teleman, M. Toma, Holomorphic vector bundles on non-algebraic surfaces, C. R. Acad. Sci. Paris **334** (2002), 1-6.

[13] M. Toma, Holomorphic vector bundles on non-algebraic surfaces, Dissertation, Bayreuth, 1992.

[14] M. Toma, Stable bundles with small c_2 over 2-dimensional complex tori, Math. Z. **232** (1999), 511-525.

[15] M. Toma, Compact Moduli Spaces of Stable Sheaves over Non-Algebraic Surfaces, Documenta Math. 6 (2001), 9-27.

[16] V. Vuletescu, Relating vector bundles on a nonalgebraic surface with those on its blow-up, An. Stiint. Univ. "Ovidius" Constanta, Ser. Mat. **5** (1997), 111-114.