Le problème infrarouge pour l'électron habillé non relativiste dans un champ magnétique

Laurent Amour[*], Jérémy Faupin[†], Benoît Grébert[‡], Jean-Claude Guillot[§]

Résumé

Nous considérons un électron non relativiste interagissant avec un champ magnétique classique dans la direction x_3 et un champ électromagnétique quantifié. Le système est invariant par translation suivant x_3 et l'Hamiltonien correspondant admet une décomposition $H \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H(P_3)dP_3$. Pour une impulsion P_3 fixée suffisamment petite, nous montrons que $H(P_3)$ possède un état fondamental dans la représentation Fock si et seulement si $E'(P_3) = 0$, où $P_3 \mapsto E'(P_3)$ est la dérivée de l'application $P_3 \mapsto E(P_3) = \inf \sigma(H(P_3))$. Lorsque $E'(P_3) \neq 0$, nous obtenons l'existence d'un état fondamental dans une représentation non équivalente à la représentation Fock. Ce résultat est valable pour des valeurs suffisamment petites de la constante de couplage.

Abstract

The infrared problem for the dressed non-relativistic electron in a magnetic field.

We consider a non-relativistic electron interacting with a classical magnetic field pointing along the x_3-axis and with a quantized electromagnetic field. The system is translation invariant in the x_3-direction and the corresponding Hamiltonian has a decomposition $H \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H(P_3)dP_3$. For a fixed momentum P_3 sufficiently small, we prove that $H(P_3)$ has a ground state in the Fock representation if and only if $E'(P_3) = 0$, where $P_3 \mapsto E'(P_3)$ is the derivative of the map $P_3 \mapsto E(P_3) = \inf \sigma(H(P_3))$. If $E'(P_3) \neq 0$, we obtain the existence of a ground state in a non-Fock representation. This result holds for sufficiently small values of the coupling constant.

Abridged english version

We consider a non-relativistic electron of charge e and mass m interacting with a classical magnetic field pointing along the x_3-axis, an electrostatic potential, and the quantized electromagnetic field in the Coulomb gauge. The position and the momentum of the electron are denoted respectively by $x = (x_1, x_2, x_3)$ and $p = (p_1, p_2, p_3) = -i\nabla_x$. The classical magnetic field is of the form $(0, 0, b(x'))$, where $x' = (x_1, x_2)$ and $b(x') = (\partial a_2/\partial x_1)(x') - (\partial a_1/\partial x_2)(x')$. Here $a(x')$ is a vector potential. The electrostatic potential is denoted by $V(x')$. The quantized electromagnetic field in the Coulomb gauge is defined by (1.2), where ρ is a real ultraviolet cutoff function satisfying (1.3),

[*]Laboratoire de Mathématiques EDPPM, FRE-CNRS 3111, Université de Reims, Moulin de la Housse - BP 1039, 51687 REIMS Cedex 2, France. laurent.amour@univ-reims.fr

[†]Institut for Matematiske Fag, Aarhus Universitet, Ny Munkegade, 8000 Aarhus C, Denmark. faupin@imf.au.dk. Supported by the Centre for Theory in Natural Science

[‡]Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, UMR-CNRS 6629, Université de Nantes, 2, rue de la Houssinière, 44072 Nantes Cedex 3, France. benoit.grebert@univ-nantes.fr

[§]Centre de Mathématiques Appliquées, UMR-CNRS 7641, Ecole polytechnique, 99128 Palaiseau Cedex, France. guillot@cmapx.polytechnique.fr

$\epsilon_1(k)$ and $\epsilon_2(k)$ are polarization vectors orthogonal to each other and to k, and $a_\lambda^*(k)$ and $a_\lambda(k)$ are the usual creation and annihilation operators obeying the canonical commutation relations (1.5). The Pauli Hamiltonian H_g associated to the system we consider acts on $\mathcal{H}_{\rm el} \otimes \mathcal{H}_{\rm ph}$, where $\mathcal{H}_{\rm el} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ is the Hilbert space for the electron, and $\mathcal{H}_{\rm ph}$ is the symmetric Fock space constructed over $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ for the photons. The Hamiltonian H_g is then formally given by (1.1), where the charge of the electron e is replaced by a coupling parameter g in the terms containing the quantized electromagnetic field. The Hamiltonian for the photons in the Coulomb gauge is given by (1.4), and $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ is the 3-component vector of the Pauli matrices. Noting that H_g formally commutes with the operator of total momentum in the direction x_3, $P_3 = p_3 + \mathrm{d}\Gamma(k_3)$, one can show (see [3]) that H_g has a decomposition

$$H_g = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_g(P_3) dP_3.$$

If P_3 is fixed, $H_g(P_3)$ acts on $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}_2) \otimes \mathcal{H}_{\rm ph}$ and is formally given by (1.6). The infrared cutoff Hamiltonian $H_{g,\sigma}(P_3)$ is defined by replacing the integral over $\{k \in \mathbb{R}^3\}$ in (1.2) by the integral over $\{k \in \mathbb{R}^3, |k| \geq \sigma\}$. We set $E_g(P_3) = \inf \sigma(H_g(P_3))$ and $E_{g,\sigma}(P_3) = \inf \sigma(H_{g,\sigma}(P_3))$. The electronic Hamiltonian is $h(b, V) = \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m}(p_j - e a_j(x'))^2 - \frac{e}{2m}\sigma_3 b(x') + V(x')$, and we define $e_0 = \inf \sigma(h(b, V))$ and $e_1 = \inf[\sigma(h(b, V)) \setminus \{e_0\}]$. We make the following hypothesis:

($\mathbf{H_0}$) e_0 is an isolated eigenvalue of multiplicity 1.

Proposition *Assume that* ($\mathbf{H_0}$) *holds. Then there exist $g_0 > 0$ and $P_0 > 0$ such that for all $0 < |g| \leq g_0$, for all $P_3, k_3 \in \mathbb{R}$ such that $|P_3| \leq P_0$, $|P_3 + k_3| \leq P_0$, for all $0 \leq \sigma \leq (e_1 - e_0)/2$, for all $\delta > 0$,*

$$\left| E'_{g,\sigma}(P_3 + k_3) - E'_{g,\sigma}(P_3) \right| \leq \mathrm{C}_\delta |k_3|^{\frac{1}{4} - \delta}, \qquad (*)$$

where C_δ is a positive constant depending on δ but independent of σ.

Remark *Our proof follows the scheme of [16, 8].*

Let us define a function $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}$ by

$$f(k, \lambda) = \frac{g}{2m} \frac{\rho(k)\epsilon_\lambda^3(k)}{k_3 |k|^{1/2}} \frac{E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3)}{E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3) + |k|}.$$

We note that if $P_3 \mapsto E_g(P_3)$ is of class $\mathrm{C}^{1+\delta}$ with $\delta > 0$, the property $E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3) \geq -3|k|/4$ (see [3]) implies that the function f is in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ if and only if the derivative $E'_g(P_3)$ vanishes. As in [4], we consider a renormalized Hamiltonian $H_g^{\rm ren}(P_3)$, defined by the formal expression $H_g^{\rm ren}(P_3) = W(if) H_g(P_3) W(if)^*$, where for $h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$, $W(h)$ is the Weyl operator, $W(h) = e^{i\Phi(h)}$, with $\Phi(h) = (a^*(h) + a(h))/\sqrt{2}$. We then obtain the equation (2.3) which defines $H_g^{\rm ren}(P_3)$ no matter whether f is in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ or not. Note that in (2.3) we have set $A_j(x', 0) = \Phi(h_j(x'))$. Our main result is

Theorem *Assume that* ($\mathbf{H_0}$) *holds. Then there exist $g_0 > 0$ and $P_0 > 0$ such that for all $0 < |g| \leq g_0$ and $0 < |P_3| \leq P_0$,*

(i) $H_g(P_3)$ has a ground state if and only if $E'_g(P_3) = 0$.

(ii) $H_g^{\rm ren}(P_3)$ has a ground state.

Remark

1. *The previous proposition is used both in the proof of (i) and in the proof of (ii). More precisely, we use* $(*)$ *with* $\sigma = 0$ *to show the absence of a ground state for* $H_g(P_3)$ *when* $E_g'(P_3) \neq 0$*: arguing as in [10, Lemma 2.6], the key point of our proof is to obtain a contradiction when assuming the existence of a ground state* $\Phi_g(P_3)$*, thanks to the property (2.4). On the other hand, to prove the existence of a ground state for* $H_g^{\mathrm{ren}}(P_3)$*, and for* $H_g(P_3)$ *in the case* $E_g'(P_3) = 0$*, we follow [3], using* $(*)$ *with* $\sigma > 0$ *in order to bound the number of photons in the state* $\Phi_{g,\sigma}(P_3)$ *uniformly in* σ*. Here* $\Phi_{g,\sigma}(P_3)$ *denotes a ground state of the infrared cutoff Hamiltonian* $H_{g,\sigma}(P_3)$*.*
2. *Our result extends to the Pauli-Fierz model describing dressed mobile atoms and ions (see [1, 2, 14]), replacing the condition* $E_g'(P_3) = 0$ *in the theorem by* $Q\nabla E_g(P) = 0$*, where* Q *is the total charge of the atomic system, and* $E_g(P)$ *is the infimum of the spectrum of the reduced Hamiltonian* $H_g(P)$ *at a fixed total momentum* P*.*

1 Définition du modèle et hypothèses

Nous considérons un électron, traité comme une particule quantique non relativiste, en interaction avec un champ magnétique classique dans la direction x_3 et le champ électromagnétique quantifié en jauge de Coulomb. L'espace de Hilbert pour l'électron est $\mathcal{H}_{\mathrm{el}} := \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$. L'espace de Hilbert pour le champ de photons est l'espace de Fock symétrique construit à partir de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$, c'est-à-dire $\mathcal{H}_{\mathrm{ph}} := \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} S_n \left[\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)^{\otimes^n} \right]$, où S_n désigne la projection orthogonale sur l'espace des fonctions symétriques. Le système que l'on considère est associé à l'opérateur hamiltonien de Pauli H_g agissant dans $\mathcal{H}_{\mathrm{el}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{ph}}$, défini formellement par

$$H_g = \frac{1}{2m}\Big(p - ea(x') - gA(x)\Big)^2 - \frac{e}{2m}\sigma_3 b(x') - \frac{g}{2m}\sigma \cdot B(x) + V(x') + H_{\mathrm{ph}}. \tag{1.1}$$

Dans cette définition, les unités sont choisies de telle façon que $\hbar = c = 1$, où $\hbar$ est la constante de Planck divisée par 2π et c est la vitesse de la lumière. Les paramètres e et m représentent respectivement la charge et la masse de l'électron, et dans les termes contenant le champ électromagnétique quantifié, e est remplacé par une constante de couplage notée g. Les opérateurs position et impulsion de l'électron sont notés respectivement $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $p = (p_1, p_2, p_3) = -i\nabla_x$. La variable x' est définie par $x' = (x_1, x_2)$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ désigne le vecteur des matrices de Pauli, et $V(x')$ est un potentiel électrique. Le champ magnétique classique est de la forme $(0, 0, b(x'))$, où $b(x') = (\partial a_2/\partial x_1)(x_1, x_2) - (\partial a_1/\partial x_2)(x_1, x_2)$ et $a(x')$ est un potentiel vecteur. Le champ électromagnétique quantifié en jauge de Coulomb s'écrit

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{\epsilon_\lambda(k)}{|k|^{1/2}} \rho(k) \Big[e^{-ik\cdot x} a_\lambda^*(k) + e^{ik\cdot x} a_\lambda(k) \Big] d^3k, \\ B(x) &= -\frac{i}{2\pi} \sum_{\lambda=1,2} \int |k|^{1/2} \left(\frac{k}{|k|} \wedge \epsilon_\lambda(k) \right) \rho(k) \Big[e^{-ik\cdot x} a_\lambda^*(k) - e^{ik\cdot x} a_\lambda(k) \Big] d^3k, \end{aligned} \tag{1.2}$$

où $\epsilon_1(k), \epsilon_2(k)$ sont des vecteurs de polarisation, $\epsilon_\lambda = (\epsilon_\lambda^1, \epsilon_\lambda^2, \epsilon_\lambda^3)$, satisfaisant $\epsilon_\lambda(k) \cdot \epsilon_{\lambda'}(k) = \delta_{\lambda\lambda'}$ et $k \cdot \epsilon_\lambda(k) = 0$. La fonction ρ est une fonction de troncature ultraviolette, choisie à valeurs réelles, et telle que

$$\int_{|k|\leq 1} \frac{|\rho(k)|^2}{|k|^2} d^3k + \int_{|k|\geq 1} |k||\rho(k)|^2 d^3k < \infty. \tag{1.3}$$

Enfin l'opérateur hamiltonien pour les photons en jauge de Coulomb est donné par

$$H_{\mathrm{ph}} = \sum_{\lambda=1,2} \int |k| a_\lambda^*(k) a_\lambda(k) d^3k. \tag{1.4}$$

Dans (1.2) et (1.4), $a_\lambda^*(k)$ et $a_\lambda(k)$ sont les opérateurs usuels de création et d'annihilation obéissant aux relations canoniques de commutation ($a^\# = a^*$ ou a) :

$$\left[a_\lambda^\#(k), a_{\lambda'}^\#(k')\right] = 0 \quad , \quad [a_\lambda(k), a_{\lambda'}^*(k')] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(k-k'). \tag{1.5}$$

L'opérateur H_g est invariant par translation dans la direction x_3, dans le sens où il commute formellement avec l'opérateur $P_3 = p_3 + \mathrm{d}\Gamma(k_3)$, où $\mathrm{d}\Gamma(k_3)$ est la seconde quantification de l'opérateur de multiplication par $k_3 \in \mathbb{R}$. Aussi H_g admet une décomposition en intégrale directe, $H_g \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_g(P_3) dP_3$, où $H_g(P_3)$ opère dans $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}_2) \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{ph}}$, et (voir [3])

$$\begin{aligned} H_g(P_3) = & \frac{1}{2m} \sum_{j=1,2} \Big(p_j - e a_j(x') - g A_j(x',0)\Big)^2 + \frac{1}{2m}\Big(P_3 - \mathrm{d}\Gamma(k_3) - g A_3(x',0)\Big)^2 \\ & - \frac{e}{2m}\sigma_3 b(x') - \frac{g}{2m}\sigma \cdot B(x',0) + V(x') + H_{\mathrm{ph}}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Soient $h(b,V) = \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m}(p_j - e a_j(x'))^2 - \frac{e}{2m}\sigma_3 b(x') + V(x')$ et $e_0 = \inf \sigma(h(b,V))$. Nous supposons que b et V sont choisis de telle façon que e_0 est une valeur propre isolée et de multiplicité finie (nous renvoyons à [5, 13, 17, 18] pour des choix possibles de couples (b,V) satisfaisant cette propriété). Nous faisons de plus l'hypothèse suivante :

($\mathbf{H_0}$) e_0 est une valeur propre isolée de multiplicité 1.

Nous posons également $e_1 = \inf[\sigma(h(b,V)) \setminus \{e_0\}]$. Définissons $H_{g,\sigma}(P_3)$ l'opérateur obtenu en introduisant dans $H_g(P_3)$ une troncature infrarouge, c'est-à-dire en remplaçant l'intégrale sur $\mathbb{R}^3$ définissant $A(x)$ dans (1.2) par l'intégrale sur $\{k \in \mathbb{R}^3, |k| \geq \sigma\}$. Il est établi dans [3] que, pour g et P_3 suffisamment petits, et pour tout $\sigma \geq 0$, $H_{g,\sigma}(P_3)$ est auto-adjoint et semi-borné inférieurement. Nous notons $E_{g,\sigma}(P_3) = \inf \sigma(H_{g,\sigma}(P_3))$ l'infimum du spectre de $H_{g,\sigma}(P_3)$ pour $\sigma > 0$, et $E_g(P_3) = \inf \sigma(H_g(P_3))$ pour $\sigma = 0$. D'après [3], pour tout $\sigma > 0$, $H_{g,\sigma}(P_3)$ possède un état fondamental $\Phi_{g,\sigma}(P_3)$, et, si l'on suppose de plus l'hypothèse **($\mathbf{H_0}$)** vérifiée, $\Phi_{g,\sigma}(P_3)$ est non dégénéré.

2 Résultats et remarques

Notre résultat principal (voir le théorème 2.3 plus bas) fournit une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'un état fondamental pour $H_g(P_3)$. L'une des propriétés cruciales que nous utilisons pour obtenir ce résultat est la régularité de l'application $P_3 \mapsto E_g(P_3)$.

Proposition 2.1 *Supposons l'hypothèse* **($\mathbf{H_0}$)** *satisfaite. Alors il existe $g_0 > 0$ et $P_0 > 0$ tels que pour tout $0 < |g| \leq g_0$, pour tous $P_3, k_3 \in \mathbb{R}$ tels que $|P_3| \leq P_0$, $|P_3 + k_3| \leq P_0$, pour tout $0 \leq \sigma \leq (e_1 - e_0)/2$, pour tout $\delta > 0$,*

$$\left|E'_{g,\sigma}(P_3 + k_3) - E'_{g,\sigma}(P_3)\right| \leq \mathrm{C}_\delta |k_3|^{\frac{1}{4}-\delta}, \tag{2.1}$$

où C_δ est une constante dépendant de δ mais ne dépendant pas de σ.

Remarques 2.2

1. *Le cas d'un électron libre interagissant avec le champ électromagnétique quantifié a été étudié récemment (cf [7, 8]). Le modèle correspondant présente des similarités avec le nôtre, dans la mesure où il est invariant par translation et conduit à l'étude d'un Hamiltonien $H_g(P)$ pour une impulsion totale fixée $P \in \mathbb{R}^3$. Il est toutefois à noter que pour ce modèle où un seul électron est considéré, $H_g(P)$ ne contient pas de partie électronique $h(b,V)$ ($H_g(P)$ agit dans $\mathcal{H}_{\mathrm{ph}}$ uniquement), ce qui, dans une certaine mesure, simplifie l'étude par rapport au modèle envisagé ici. Dans [7], pour un électron avec spin, le caractère C^2 de l'application $P \mapsto E_g(P) = \inf \sigma(H_g(P))$ est obtenu à partir d'une méthode basée sur l'utilisation d'un groupe de renormalisation (voir aussi [6]). L'auteur montre de plus que $\nabla E_g(P) = 0$ si et seulement si $P = 0$. Dans [8], à partir du travail antérieur de A. Pizzo sur le modèle de Nelson, [16], il est établi que $P \mapsto E_g(P)$ est de classe $\mathrm{C}^{1+\delta}$ pour tout $0 \leq \delta < 1/4$. Nous avons pu adapter cette dernière méthode à notre modèle.*
2. *La preuve de la proposition 2.1 s'adapte au cas des atomes et des ions habillés non relativistes en interaction avec le champ électromagnétique quantifié (voir [1]), mais toujours sous une hypothèse de simplicité du type de* $(\mathbf{H_0})$*. Le problème paraît plus difficile dans le cas dégénéré.*

Posons $\Phi(h) = (a^*(h) + a(h))/\sqrt{2}$ pour $h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$, où $a^*(h) = \sum_{\lambda=1,2} \int h(k,\lambda) a^*_\lambda(k) d^3k$ et $a(h) = \sum_{\lambda=1,2} \int \bar{h}(k,\lambda) a_\lambda(k) d^3k$. Le produit scalaire dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ est défini par $(h_1, h_2) = \sum_{\lambda=1,2} \int \bar{h}_1(k,\lambda) h_2(k,\lambda) d^3k$. Soit $W(h) = e^{i\Phi(h)}$ l'opérateur de Weyl, et soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(k,\lambda) = \frac{g}{2m} \frac{\rho(k)\epsilon^3_\lambda(k)}{k_3|k|^{1/2}} \frac{E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3)}{E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3) + |k|}. \tag{2.2}$$

Notons que, si $P_3 \mapsto E_g(P_3)$ est de classe $\mathrm{C}^{1+\alpha}$ avec $\alpha > 0$, en utilisant le fait que pour g et P_3 suffisamment petits, $E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3) \geq -3|k|/4$ (cf. [3, Lemma 4.3]), on a $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ si et seulement si $E'_g(P_3) = 0$. Introduisons, de la même façon que dans [4], un opérateur "renormalisé" $H^{\mathrm{ren}}_g(P_3)$ à partir de l'expression formelle $H^{\mathrm{ren}}_g(P_3) = W(if) H_g(P_3) W(if)^*$. Nous obtenons (voir par exemple [9]) :

$$\begin{aligned} H^{\mathrm{ren}}_g(P_3) =& \frac{1}{2m} \sum_{j=1,2} \Big(p_j - e a_j(x') - g A_j(x',0) + g\mathrm{Re}(h_j(x'), f) \Big)^2 \\ &+ \frac{1}{2m} \Big(P_3 - \mathrm{d}\Gamma(k_3) + \Phi(k_3 f) + \frac{1}{2}(k_3 f, f) - g A_3(x',0) + g\mathrm{Re}(h_3(x'), f) \Big)^2 \\ &- \frac{e}{2m}\sigma_3 b(x') - \frac{g}{2m}\sigma \cdot B(x',0) + V(x') + H_{\mathrm{ph}} - \Phi(|k|f) - \frac{1}{2}(|k|f, f), \end{aligned} \tag{2.3}$$

où l'on a posé $A_j(x',0) = \Phi(h_j(x'))$. Remarquons que $H^{\mathrm{ren}}_g(P_3)$ est unitairement équivalent à $H_g(P_3)$ si et seulement si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$. Notre principal résultat est alors :

Théorème 2.3 *Supposons l'hypothèse* $(\mathbf{H_0})$ *satisfaite. Alors il existe $g_0 > 0$ et $P_0 > 0$ tels que pour tous $0 < |g| \leq g_0$ et $0 < |P_3| \leq P_0$,*

(i) $H_g(P_3)$ possède un état fondamental si et seulement si $E'_g(P_3) = 0$.

(ii) $H^{\mathrm{ren}}_g(P_3)$ possède un état fondamental.

Remarques 2.4

1. *L'inégalité* (2.1) *est utilisée à la fois dans la preuve de* (i) *et dans celle de* (ii). *Plus précisément, nous utilisons* (2.1) *avec* $\sigma = 0$ *afin d'obtenir l'absence d'état fondamental de* $H_g(P_3)$ *lorsque* $E'_g(P_3) \neq 0$ *: nous basant sur [10, Lemme 2.6], nous obtenons une contradiction en supposant l'existence d'un état fondamental* $\Phi_g(P_3)$, *grâce à la propriété*

$$(k,\lambda) \mapsto \left\| [a_\lambda(k) - f(k,\lambda)]\Phi_g(P_3) \right\| \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2). \tag{2.4}$$

L'existence d'un état fondamental pour $H_g^{\mathrm{ren}}(P_3)$, *ou pour* $H_g(P_3)$ *lorsque* $E'(P_3) = 0$, *s'obtient quant à elle de la même façon que dans [3], en utilisant de plus* (2.1) *avec* $\sigma > 0$ *pour contrôler le nombre de photons dans l'état fondamental de* $H_{g,\sigma}(P_3)$.

2. *La preuve du théorème 2.3 s'adapte au cas des atomes et des ions (voir [1]), en remplaçant la condition* $E'_g(P_3) = 0$ *dans* (i) *par* $Q\nabla E_g(P) = 0$, *où* Q *représente la charge totale du système atomique. Le cas des atomes,* $Q = 0$, *est traité dans [2]. Pour toute valeur de la constante de couplage, l'existence d'un état fondamental pour* $Q = 0$ *est également obtenue dans [14], en adaptant la méthode de [11], mais sous l'hypothèse* $E_g(P) \geq E_g(0)$ *qui, jusqu'à maintenant, n'a pas pu être vérifiée pour une valeur quelconque de* g. *Dans [12], les auteurs montrent l'absence d'état fondamental pour* $H_g(P)$ *dans le cas* $Q < 0$, *en supposant que* $\nabla E_g(P)$ *est différent de 0. Ainsi, par rapport à ces résultats, la méthode que nous employons permet en plus d'obtenir l'existence d'un état fondamental pour* $H_g^{\mathrm{ren}}(P)$ *et pour* $H_g(P)$ *lorsque* $\nabla E_g(P) = 0$.

3. *Si* $E'_g(P_3) \neq 0$, (ii) *fournit l'existence d'un état fondamental dans une représentation non équivalente à la représentation Fock des relations canoniques de commutation, comme dans le cas du modèle de Nelson (pour un système atomique non invariant par translation, voir [4], [10], [15]).*

References

[1] L. Amour, J. Faupin, B. Grébert, and J.-C. Guillot. The infrared problem for the dressed mobile ions. In preparation.

[2] L. Amour, B. Grébert, and J.-C. Guillot. The dressed mobile atoms and ions. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 86(3):177–200, 2006.

[3] L. Amour, B. Grébert, and J.-C. Guillot. The dressed nonrelativistic electron in a magnetic field. *Math. Methods Appl. Sci.*, 29(10):1121–1146, 2006.

[4] A. Arai. Ground state of the massless Nelson model without infrared cutoff in a non-Fock representation. *Rev. Math. Phys.*, 13(9):1075–1094, 2001.

[5] J. Avron, I. Herbst, and B. Simon. Schrödinger operators with magnetic fields. I. General interactions. *Duke Math. J.*, 45(4):847–883, 1978.

[6] V. Bach, T. Chen, J. Fröhlich, and I. M. Sigal. The renormalized electron mass in non-relativistic quantum electrodynamics. *J. Funct. Anal.*, 243(2):426–535, 2007.

[7] T. Chen. Infrared renormalization in non-relativistic qed and scaling criticality. *J. Funct. Anal.*, 2008. doi:10.1016/j.jfa.2008.01.001.

[8] T. Chen, J. Fröhlich, and A. Pizzo. Infraparticle Scattering States in Non-Relativistic QED II. Mass Shell Properties. arxiv.org, math-ph/07092812, 2007.

[9] J. Dereziński and C. Gérard. Asymptotic completeness in quantum field theory. Massive Pauli-Fierz Hamiltonians. *Rev. Math. Phys.*, 11(4):383–450, 1999.

[10] J. Dereziński and C. Gérard. Scattering theory of infrared divergent Pauli-Fierz Hamiltonians. *Ann. Henri Poincaré*, 5(3):523–577, 2004.

[11] M. Griesemer, E. H. Lieb, and M. Loss. Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics. *Invent. Math.*, 145(3):557–595, 2001.

[12] D. Hasler and I. Herbst. Absence of Ground States for a Class of Translation Invariant Models of Non-relativistic QED. arxiv.org, math-ph/0702096, 2007.

[13] A. Iwatsuka and H. Tamura. Asymptotics distribution of eigenvalues for Pauli operators with non constant magnetic fields. *Duke Math. J.*, 93:535–574, 1998.

[14] M. Loss, T. Miyao, and H. Spohn. Lowest energy states in nonrelativistic QED: atoms and ions in motion. *J. Funct. Anal.*, 243(2):353–393, 2007.

[15] A. Panati. Existence and non existence of a ground state for the massless Nelson model under binding condition. arxiv.org, math-ph/0609065, 2006.

[16] A. Pizzo. One-particle (improper) states in Nelson's massless model. *Ann. Henri Poincaré*, 4(3):439–486, 2003.

[17] G.D. Raikov. Eigenvalue asymptotics for the Pauli operator in strong non-constant magnetic fields. *Ann. Inst. Fourier*, 49:1603–1636, 1999.

[18] A. V. Sobolev. On the Lieb-Thirring estimates for the Pauli operator. *Duke Math. J.*, 82(3):607–635, 1996.