Analele Universităţii Oradea
Fasc. Matematica, Tom XIV (2007), 221–236

PROBLÈME DE CONTACT SANS FROTTEMENT-DIRICHLET POUR LES ÉQUATIONS DE LAPLACE ET DE LAMÉ DANS UN POLYGONE

M. DILMI, H. BENSERIDI & A. GUESMIA

Abstract. In this article, we consider a problem of contact without friction-Dirichlet for the equations of Laplace and Lamé in a polygon. One shows necessary and sufficient conditions on the data and the field so that the variational solution is smooth. For that one will give an inequality a priori and by means of Fredholm alternative. We study the regularity of the solution of the problem to consider, and finally we will calculate index of these equations.

1. Introduction

Dans [5] P. Grisvard a étudié la régularité de la solution du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace dans un polygone. La solution variationnelle du problème considéré est régulière (c'est-à-dire dans H^2) si et seulement si tous les angles du polygone sont strictement inférieur à π. Autrement ce problème admet un nombre fini de solutions singulières. Ce résultat est connu dans le cas particulier où le domaine est convexe (cf. [8]).

Dans cette note on a étudié la régularité de la solution de l'équation de Laplace et du système de Lamé (Elasticité) avec des conditions de C.S.F-Dirichlet. Autrement dit, la régularité du déplacement d'un corps homogène élastique et isotrope occupant un domaine Ω borné de $\mathbb{R}^2$ à

2000 *Mathematics Subject Classification.* 34B60.

Key words and phrases. Contact problem, Fredholm alternative, Laplace and Lamé equation.

frontière polygonale rectiligne (dans le cas si Ω non homogène voir H. Benseridi et M. Dilmi [3]). Ce déplacement est nul sur certaines segment de la frontière $\partial\Omega$ et sur les segments restants le déplacement tangentiel est libre et la traction tangentielle est nulle.

L'étude de ce problème par des techniques de P. Grisvard [5] et de B. Merouani [10] est généralement basé sur les étapes suivantes.

Dans la première étape on établit une inégalité à priori valable pour u dans $(H^2(\Omega))^2$ vérifiant les mêmes conditions du problème considéré.

La seconde étape est consacrée à l'intérêt de l'inégalité à priori, qui nous permet d'utiliser l'alternative de Fredholm relative à notre problème et de construire l'espace d'image et son orthogonal. On démontrera qu'il est de dimension finie et on calculera sette dimension.

Enfin, en utilisant des techniques analogues à celles de P. Grisvard [6], nous calculerons l'indice du problème pour $(\Theta = L)$ par homotopie sur les coefficients de Lamé.

2. Notations et position du problème

Dans ce travail, Ω désigne un corps homogène élastique et isotrope occupant un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière polygonale rectiligne $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{N} \overline{\Gamma}_j$. Les Γ_j sont des segments de droites ouverts, s_j sera l'origine de Γ_{j+1} et s_{j+1} son extrémité suivant l'orientation usuelle (avec la convention $s_{N+1} = s_1$).

L'ouverture de l'angle que font Γ_j et Γ_{j+1} vers l'interieur de Ω sera noté ω_j avec $0 < \omega_j < 2\pi$ pour tout $j = 1$ à N . η^j(resp. τ^j) désigne la normale unitaire sortant (resp la tangente unitaire dans le sens positif)sur Γ_j. En coordonnées polaires d'origine s_j, on note par r_j la distance d'un point $M(x_j, y_j)$ de Ω à s_j et par θ_j l'angle de Γ_j à Ms_j; c'est -à-dire $x_j = r_j \sin(\theta_j)$ et $y_j = r_j \cos(\theta_j)$. On note aussi par $u = (u_1, u_2)$, $f = (f_1, f_2)$ et $\sum$ le vecteur déplacement, la densité des forces éxtérieures et le tenseur des contraintes respectivement, où $\sum$ matrice d'ordre 2, dont les éléments (σ_{ij}) sont donnés par la loi de Hook:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))\gamma_{ij},\ i,j = 1,2$$

où $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ sont les éléments de tenseur des déformations linéarisées associé à u.

λ, μ sont les coefficients de Lamé avec $\mu > 0$ et $\lambda + \mu \geq 0$.

On considére le problème suivant. Pour f donné dans $L^2(\Omega)^2$, on cherche u dans $H^2\left(\Omega\right)^2$ solution de:

$$(P)\begin{cases} \Theta u = f\,, & \text{dans } \Omega\,; \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_j,\ \ \forall j \in D\,; \\ u.\eta = (\sum(u).\eta).\tau = 0, & \text{sur } \Gamma_j,\ \ \forall j \in G\,; \end{cases}$$

où Θ désigne un opérateur différentiel qui sera le système de Lamé ou le Laplacien. D, G sont des ensembles sur lesquels sont portés les conditions de Dirichlet et les conditions de contact sans frottement respectivement.

Lemme 2.1. *Sur* Γ_j , $j \in G$, *les conditions aux limites* $u.\eta = (\sum(u).\eta).\tau$ $=0$ *sont équivalentes aux conditions* $u.\eta = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}.\tau = 0$.

Démonstration. On a

$$(\sum(u).\eta).\tau = \sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}.\eta_j.\tau_i + \sum_{i,j=1}^{2} \lambda tr(\varepsilon(u))\gamma_{ij}\eta_j.\tau_i$$

mais: $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \lambda tr(\varepsilon(u))\gamma_{ij}\eta_j.\tau_i = \lambda tr(\varepsilon(u))\sum_{i=1}^{2}\eta_i.\tau_i = 0.$

Ce qui donne:

$$(\sum(u).\eta).\tau = 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.\eta_j.\tau_i + \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.\eta_j.\tau_i = 0$$

et comme $u.\eta = 0$ sur Γ_j implique que $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}.\eta = 0$ sur Γ_j, on obtient donc:

$$\begin{cases} u.\eta = 0 \\ (\sum(u).\eta).\tau = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u.\eta = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}.\tau = 0 \end{cases}$$

$\square$

Pour montrer une majoration à priori des dérivées secondes par les techniques de P. Grisvard [5], on simplifie le problème (P) comme suit $(\Theta = \Delta)$:

$$(P)\begin{cases} \Delta u = f\,, & \text{dans } \Omega\,; \\ \gamma_j u = 0, & \text{sur}\,\Gamma_j,\ \ \forall j \in D\,; \\ \gamma_j\,(u.\eta^j) = \gamma_j(\dfrac{\partial u}{\partial \eta^j}.\tau^j) = 0., & \text{sur}\,\Gamma_j,\ \ \forall j \in G. \end{cases}$$

Un raisonnement classique, permet de donner la formulation variationnelle de ce problème, ainsi l'existence et l'unicité d'une solution u dans l'espace:

$$V = \left\{v \in H^1\,(\Omega)^2\,,\ \gamma_j v = 0,\ \forall\, j \in D\,,\ \gamma_j\,(v.\eta^j) = 0,\ \forall\, j \in G\right\}.$$

Le problème (P) n'admet pas généralement des solutions assez régulières, pour cela on essayera pour $f \in L^2(\Omega)^2$, de chercher des conditions sur Ω pour que u soit dans $H^2\,(\Omega)^2$.

3. Inégalité à priori

Ce paragraphe est consacré à la démonstration de l'inégalité:

$$\|u\|_{H^2(\Omega)^2} \leq c\,\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)^2}\,. \tag{3.1}$$

Cette inégalité résultera en fait de l'égalité de Caccioppoli.

On introduit maintenant l'espace où on cherche u:

$$W\,(\Omega) = \Big\{u \in H^2\,(\Omega)^2\ : \gamma_j u = 0\ \ \forall\, j \in D; \\ \gamma_j\left(\tfrac{\partial u}{\partial \eta^j}.\tau^j\right) = \gamma_j\,(u.\eta^j) = 0\ \ \forall\, j \in G\Big\}.$$

Lemme 3.1. *L'espace $W\,(\Omega) \cap (H^m\,(\Omega))^2$ est dense dans $W\,(\Omega)$ pour la norme induite par $(H^m\,(\Omega))^2$, $\forall m \geq 1$.*

Démonstration. Par partition de l'unité on se ramène facilement au cas où Ω est un secteur infini d'ouverture ω $(\neq \pi)$. En suite par un changement de variable affine on se ramène au cas où $\omega = \dfrac{\pi}{2}$. Pour cela les conditions aux limites qui définissent $W\,(\Omega)$ sont les conditions aux limites aux dérivées obliques et l'espace $W\,(\Omega)$ devient:

$$W(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega)^2 : \alpha_j D_x u_1 + \beta_j D_y u_1 = u_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_j \right\},$$

le résultat de densité est bien connu (voir [4]). □

Theorem 3.2. *Pour tout $u \in W(\Omega)$, on a:*

$$\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)^2} = \|\nabla^2 u\|^2_{\left(L^2(\Omega)^2\right)^2}.$$

Démonstration. Pour tout $u \in W(\Omega)$ tel que de plus $u \in H^3(\Omega)^2$, l'égalité de Caccioppoli donne:

$$\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)^2} - \|\nabla^2 u\|^2_{\left(L^2(\Omega)^2\right)^2} = \sum_{j \in D} \int_{\Gamma_j} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \eta^j} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau^j} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau^j} \right) - \frac{\partial u}{\partial \tau^j} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau^j} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta^j} \right) \right\} ds$$
$$+ \sum_{j \in G} \int_{\Gamma_j} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \eta^j} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau^j} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau^j} \right) - \frac{\partial u}{\partial \tau^j} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau^j} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta^j} \right) \right\} ds.$$

Ici, bien sûr on a posé:

$$|\nabla^2 u|^2 = \sum_{i,\, l=1}^{2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_l} \right|^2.$$

Maintenant si on tient compte de la condition $u = 0$ sur Γ_j pour $j \in D$ qui implique:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau^j} = \frac{\partial}{\partial \tau^j} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau^j} \right) = 0,$$

et par conséquent la première somme sur D est nulle.

Si on prend les conditions $u.\eta^j = 0$ et $\dfrac{\partial u}{\partial \eta^j}.\tau^j = 0$ sur Γ_j pour $j \in G$ on obtient:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta^j}.\tau^j = \frac{\partial u}{\partial \tau^j}.\eta^j = \frac{\partial}{\partial \tau^j} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau^j} \right).\eta^j = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^j \partial \eta^j}.\tau^j = 0$$

et par suit:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta^j} \frac{\partial}{\partial \tau^j} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau^j} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta^j}.\eta^j \right) \left(\frac{\partial}{\partial \tau^j} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau^j} \right).\eta^j \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta^j}.\tau^j \right) \left(\frac{\partial}{\partial \tau^j} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau^j} \right).\tau^j \right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau^j} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^j \partial \eta^j} = \left(\frac{\partial u}{\partial \tau^j}.\eta^j \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^j \partial \eta^j}.\eta^j \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \tau^j}.\tau^j \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^j \partial \eta^j}.\tau^j \right) = 0$$

on constate que les intégrales de bord sont toutes nulles, donc:

$$\left\|\nabla^2 u\right\|^2_{\left(L^2(\Omega)^2\right)^2} = \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)^2},$$

pour tout $u \in W(\Omega) \cap H^3(\Omega)^2$ et par suit pour $u \in W(\Omega)$ (lemme 3.1). $\square$

Corollary 3.3. *Il existe une constante c positive, telle que l'inégalité (3.1) ait lieu pour tout $u \in W(\Omega)$.*

4. Alternative de Fredholm

Dans ce paragraphe on tirera les conséquences de l'inégalité à priori (3.1) comme il est indiqué dans l'introduction. On désignera par $R(\Omega)$ l'image de $W(\Omega)$ par l'opérateur Δ, c'est à dire que:

$$R(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega)^2 \ ; \ f = \Delta u \, , \, u \in W(\Omega) \right\} .$$

Grâce à l'inégalité (3.1), $R(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)^2$ et par conséquent on cherchera son orthogonal dans l'espace $L^2(\Omega)^2$, où:

$$N(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega)^2 \ ; \ (v; f) = 0, \quad \forall f \in R(\Omega) \right\} .$$

Comme il est naturel on prouvera que les éléments de $N(\Omega)$ sont les solutions d'un problème de Dirichlet-contact sans frottement homogène, on a le:

Lemme 4.1. *Soit $v \in N(\Omega)$, alors v est solution du problème dual suivant:*

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad \textit{dans } \Omega \, ; \\ \gamma_j(v) = 0, \quad \textit{sur } \Gamma_j \quad \forall j \in D \, ; \\ \gamma_j(v.\eta^j) = \gamma_j\left(\dfrac{\partial v}{\partial \eta^j} . \tau^j \right) = 0, \quad \textit{sur } \Gamma_j \ \ \forall j \in G \, . \end{cases}$$

Démonstration. Soient v un élément de $N(\Omega)$ et $u \in \mathcal{D}(\Omega)^2$, puisque $\mathcal{D}(\Omega)^2$ est inclu dans $W(\Omega)$ alors: $\langle v; \Delta u \rangle = \langle \Delta v; u \rangle = 0$, ceci implique que

$$\Delta v = 0, \ \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)^2 ,$$

et par conséquent $v \in D\left(\Delta, L^2(\Omega)^2\right)$ l'espace maximale de Δ.

Il reste à montrer que v vérifie les mêmes conditions que le problème (P). Pour tout $\varphi_j = \left(\varphi_j^1, \varphi_j^2\right) \in D\left(\Gamma_j\right)^2 \ \forall \ j \in D$, $\psi_j \in D\left(\Gamma_j\right)$ et $\chi_j \in D\left(\Gamma_j\right) \ \forall \ j \in G$, il existe $u \in H^2\left(\Omega\right)^2$ tel que

$$\begin{cases} \gamma_j\left(u\right) = 0 \ , \ \gamma_j\left(\dfrac{\partial u}{\partial \eta^j}\right) = \varphi_j, \quad \forall \, j \in D\,; \\ \gamma_j\left(u.\eta^j\right) = 0\,, \ \gamma_j\left(u.\tau^j\right) = \psi_j, \ \ \forall \, j \in G\,; \\ \gamma_j\left(\dfrac{\partial u}{\partial \eta^j}.\tau^j\right) = 0\,, \ \gamma_j\left(\dfrac{\partial u}{\partial \eta^j}.\eta^j\right) = \chi_j, \ \ \forall \, j \in G\,. \end{cases}$$

de plus u est nulle aux voisinage de $s_j, \forall j = 1, ..., N$, et par conséquent, on peut appliquer la formule de Green généralisée pour cette fonction u et $v \in N\left(\Omega\right)$ on obtient

$$\sum_{j \in D} \left\langle \varphi_j ; \gamma_j v \right\rangle + \sum_{j \in G} \left\{ \left\langle \chi_j ; \gamma_j \left(v.\eta^j\right)\right\rangle - \left\langle \psi_j ; \gamma_j \left(\frac{\partial v}{\partial \eta^j}.\tau^j\right)\right\rangle \right\} = 0,$$

et comme φ_j, χ_j et ψ_j sont arbitraires dans $\mathcal{D}\left(\Gamma_j\right)^2$, $\mathcal{D}\left(\Gamma_j\right)$ et $\mathcal{D}(\Gamma_j)$ respectivement, cette égalité montre que:

$$\begin{cases} \gamma_j v = 0 \ , & \forall \, j \in D \ ; \\ \gamma_j\left(v.\eta^j\right) = \gamma_j\left(\dfrac{\partial v}{\partial \eta^j}.\tau^j\right) = 0, & \forall \, j \in G\,. \end{cases}$$

□

Le lemme 4.1 montre que pour tout $v \in N\left(\Omega\right)$ est une solution du problème homogène d'adjoint. Cependant le lemme 4.1 ne caractérise pas complètement $N\left(\Omega\right)$.

On peut remarque que pour tout $v \in N\left(\Omega\right)$ et si $\omega_j = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\omega_j = \dfrac{\pi}{2}$ on a:

(i) $\langle v, \Delta(y_j\zeta_j)\rangle = 0$ si $j \in D$ et $j+1 \in G$;

(ii) $\langle v, \Delta(x_j\zeta_j)\rangle = 0$ si $j \in G$ et $j+1 \in D$;

où $\zeta_j \in D\left(\overline{\Omega}\right)$ est une fonction de troncature qui dépend seulement de s_j, tel que $\zeta_j = 1$ au voisinage de s_j et nulle sur toute $\overline{\Gamma}_k$ sauf pour $k = j$ et $k = j+1$.

Lemme 4.2. *Soit $v \in D\left(\Delta, L^2\left(\Omega\right)^2\right)$ solution du problème dual tel que v vérifie les conditions (i) et (ii), alors $v \in N\left(\Omega\right)$.*

Démonstration. On va montrer que $\langle v;\Delta u\rangle = 0$, $\forall\ u \in W(\Omega)$. Actuelement d'après le lemme 3.1 on peut considérer $u \in (H^4(\Omega))^2 \cap W(\Omega)$ pourvu que $u \in (C^2(\overline{\Omega}))^2$, et on pose

$$\varpi = u - \sum_{j\in D,\ j+1\in G} D_{y_j}u(s_j)y_j\zeta_j - \sum_{j\in G,\ j+1\in D} D_{x_j}u(s_j)x_j\zeta_j.$$

Il est clair que $\langle v;\Delta u\rangle = \langle v;\Delta\varpi\rangle$.

Maintenant, on a $u(s_j) = 0, \forall\ j \in D$ ou $j+1 \in D$ cela implique que $\varpi(s_j) = 0 \forall j$. Donc $\bigtriangledown u.\mu_j = 0$ sur chaque Γ_j où $\mu_j = \eta^j$, pour $j \in G$ et $\mu_j = \tau^j$, pour $j \in D$, ceci implique que $\bigtriangledown u(s_j) = 0$ a moins que μ_j et μ_{j+1} soient paralleles. Cela se passe seulement quand $j \in G$ et $j+1 \in D$ ou $j \in D$ et $j+1 \in G$. Cependant quand $j \in G$ et $j+1 \in D$ on a $u = 0$ sur Γ_{j+1} et par conséquent $D_{x_j}u(s_j) = \bigtriangledown\varpi(s_j) = 0$. Le même chemin quand $j \in D$ et $j+1 \in G$, on trouve $\bigtriangledown\varpi(s_j) = 0$.

Finalement on a trouver $\varpi(s_j) = \bigtriangledown\varpi(s_j) = 0$ dans tout les cas, et par suite on peut appliquer la formule de Green généralisé pour ϖ et v on obtient $\langle v;\Delta\varpi\rangle = 0$, c'est- à-dire $v \in N(\Omega)$. □

Lemme 4.3. *Soit $v \in N(\Omega)$, alors $v \in C^\infty(\Omega\backslash S)$, où S est l'ensemble des sommets.*

Le lemme 4.3 exprime un résultat de régularité au voisinage des morceaux réguliers de la frontière, qui est assez bien connu; par la méthode de réflexions.

5. Régularité des dérivées secondes

Dant cette section nous allons déterminé la dimention de l'espace $N(\Omega)$, pour cela nous allons étudier la régularité de $v \in N(\Omega)$. D'après le lemme 4.3, v est C^∞ dans Ω et jusqu'au sommets de la frontière, il nous reste alors à étudier le comportement de v au voisinage de chaque sommet s_j.

Nous avons alors dans ce cas particulier le:

Theorem 5.1. *Si tout les angles ω_j de Ω sont strictement infèrieur à $\frac{\pi}{2}$ alors:*

i) $N(\Omega) \subset H^2(\Omega)^2$;

ii) $N(\Omega) = \{0\}$.

Démonstration. i) Il reste à prouver que pour tout $s_j \in S$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de s_j dans $\mathbb{R}^2$ tel que $v \in H^2(\Omega \cap \mathcal{V})^2$ dés que $v \in N(\Omega)$.

Pour s_j de type Dirichlet de part et d'autre on a la régularité H^2 (voir [5]).

Donc, il suffit de démontrer la régularité H^2 au voisinage de sommet de type mélé. On tarnslate le point s_j considéré en $(0,0)$ (ce qui ne change rien au problème) et on suppose que $\mathcal{V}$ est une boule de centre $(0,0)$ et de rayon ρ assez petit pour que $\Omega \cap \mathcal{V}$ soit un secteur fini d'ouverture ω. c'est-à-dire

$$\Omega \cap \mathcal{V} = \{x = r(\cos\theta, \sin\theta) \ \ 0 < r < \rho\,,\ \theta \in]0,\omega[\,\}\,.$$

En définissant l'opérateur non-borné Λ sur $H = L^2(]0,\omega[)^2$ Comme suit:

$$\Lambda\varphi = -\varphi'',$$

où $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in D(\Lambda)$, $D(\Lambda)$ représente le domaine de Λ défini par

$$D(\Lambda) = \left\{\varphi \in H^2(]0,\omega[)^2 \ \ \varphi_1'(0) = \varphi_1(\omega) = 0,\ \varphi_2(0) = \varphi_2(\omega) = 0\right\}.$$

L'opérateur Λ est un opérateur auto-adjoint et non négatif. Nous allons noter par $\varphi_m, m \geq 1$ les fonctions propres normalisées et par λ_m^2 leurs valeurs propres correspondantes dans l'ordre croissant de leurs modules. Nous avons

$$-\varphi_m'' = \lambda_m^2 \varphi_m,$$

et comme $\lambda_m, m \geq 1$ sont solution de l'équation transcendante $\sin(2\lambda_m\omega) = 0$ (voir [10], [2]) alors

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{2\omega}\ , \quad m \geq 1.$$

Soit maintenant $v \in N(\Omega)$, on a, $v \in L^2(]0,\omega[)^2$ pour presque tout $r \in]0,\rho[$ fixé:

$$v\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{k\geq 1} c_k(r)\,\varphi_k(\theta) \text{ avec } c_k(r) = \int_0^\omega v\left(re^{i\theta}\right)\varphi_k(\theta)\,d\theta;$$

on va calculer c_k en utilisant l'equation dont v est solution de:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Lambda v = 0\,,\ \ 0 < r < \rho\,,\ \ \theta \in]0,\omega[;$$

et par conséquent $c_k''(r) + \frac{1}{r}c_k'(r) - \frac{\lambda_k^2}{r^2}c_k(r) = 0\,,\ 0 < r < \rho.$

Donc $c_k(r) = a_k\, r^{\lambda_k} + b_k\, r^{-\lambda_k}$, $\lambda_k > 0$, a_k et b_k sont des constantes arbitraires telle que l'on ait:

$$\int_0^\omega \left|v\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \sum_{k\geq 1} |c_k(r)|^2 \quad p.p,$$

donc

$$\int_{\Omega\cap\mathcal{V}} |v(x)|^2\,dx = \sum_{k\geq 1}\int_0^\rho |c_k(r)|^2\,rdr < +\infty,$$

puisque $v \in L^2(\Omega)^2$, on voit imédiatement que $b_k = 0$ dés que $\int_0^\rho r^{1-2\lambda_k}dr = +\infty$ c'est-à-dire que: $2 - 2\lambda_k < 0 \Leftrightarrow \lambda_k > 1$.

Mais pour $\omega < \dfrac{\pi}{2}$, on aura que $\lambda_k \geq \dfrac{\pi}{2\omega} > 1$, il en résulte immédiatement que $b_k = 0$ pour tout k.

Donc $v\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{k\geq 1} a_k r^{\lambda_k}\varphi_k(\theta)$ avec $\int_0^\omega \left|v\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 r^{2\lambda_k}$ d'où $\int_\Omega |v(x)|^2\,dx \geq \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 \int_0^\rho r^{2\lambda_k+1}dr = \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 \frac{\rho^{2+2\lambda_k}}{2+2\lambda_k}$.

Il est maintenant aisé de vérifie que $v \in H^2(\Omega)^2$ au voisinage de zéro, c'est-à-dire pour ε assez petit on a:

$$\int_0^\varepsilon \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right\|^2_{L^2(]0,\omega[)^2} rdr + \int_0^\varepsilon \left\|\frac{\partial v}{\partial r}\right\|^2_{H^1(]0,\omega[)^2}\frac{dr}{r} + \int_0^\varepsilon \|v\|^2_{H^2(]0,\omega[)^2}\frac{dr}{r^3} < +\infty.$$

En effet, comme $\lambda_k > 1$ on a:

$$\begin{aligned}\int_0^\varepsilon \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right\|^2_{L^2(]0,\omega[)^2} rdr &= \sum_{k\geq 1} |a_k|^2\,\lambda_k^2\,(\lambda_k - 1)^2 \int_0^\varepsilon r^{2\lambda_k-3}dr \\ &= \sum_{k\geq 1} |a_k|^2\,\lambda_k^2\,(\lambda_k-1)^2\,\tfrac{\varepsilon^{2\lambda_k-2}}{2\lambda_k-2}.\end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $\lambda_k \sim Kk$ lorsque $k \to +\infty$, on en deduit que

$$\lambda_k^2 (\lambda_k - 1)^2 \frac{\varepsilon^{2\lambda_k - 2}}{2\lambda_k - 2} \sim \frac{(Kk)^3 \varepsilon^{2Kk}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\rho^{2+2\lambda_k}}{2+2\lambda_k} \sim \frac{\rho^{2Kk}}{2Kk},$$

donc pour $\varepsilon < \rho$ on a

$$\tfrac{\lambda_k^2 (\lambda_k-1)^2 \varepsilon^{2\lambda_k-2}}{2\lambda_k-2} = 0\left(\tfrac{\rho^{2+2\lambda_k}}{2+2\lambda_k}\right), \quad k \to +\infty.$$

Ceci prouve la convergence de la dernière série écrite. Pour estimer les autres intégrales, on utilise l'inégalité à priori:

$$\|\varphi\|^2_{H^2(]0,\omega[)^2} \leq c \left\|\varphi''\right\|^2_{L^2(]0,\omega[)^2}.$$

$$\|v\|^2_{H^2(]0,\omega[)^2} \leq c \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 r^{2\lambda_k} \lambda_k^4 \text{ donc } \int_0^\varepsilon \|v\|^2_{H^2(]0,\omega[)^2} \tfrac{dr}{r^3} \leq \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 \lambda_k^4 \tfrac{\varepsilon^{2\lambda_k-2}}{2\lambda_k-2},$$

avec l'équivalence: $\lambda_k^4 \frac{\varepsilon^{2\lambda_k-2}}{2\lambda_k-2} \sim \frac{(Kk)^3}{2}\varepsilon^{2Kk}$. D'où la convergence de la série.

On majore la troisième intégrale de la même manière.

ii) si $v \in N(\Omega)$, de i) $v \in W(\Omega)$ et l'unicité variationnelle implique que $v = 0$, c'est-à-dire que

$$N(\Omega) = \{0\}.$$

On cherche maintenant pour $\omega_j \geq \frac{\pi}{2}$ la contribution du sommet de type Dirichlet de part et d'autre, et la contribution du sommet de type mélé à l'epace des $N(\Omega)$. $\square$

Theorem 5.2. *La dimension de $N(\Omega)$ est $\sum_{j=1}^{N} \mu_j$ où:*

$$\mu_j = \begin{cases} \mathit{card}\left\{k \in \mathbb{N};\ 1 \leq k < \frac{\omega_j}{\pi}\right\} \text{ si } s_j \text{ de type Dirichlet} \\ \mathit{card}\left\{k \in \mathbb{N};\ 1 \leq k < \frac{2\omega_j}{\pi}\right\} \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration du théorème 5.2. On introduit l'opérateur non borné Λ_j sur $H_j = L^2(]0,\omega_j[)^2$ comme suit:

$$\Lambda_j \varphi = -\varphi'', \text{ dans } D(\Lambda_j),$$

où $D(\Lambda_j) = H^2(]0,\omega_j[)^2 \cap H_0^1(]0,\omega_j[)^2$ si s_j de type Dirichlet de part et d'outre, et

$D(\Lambda_j) = \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H^2(]0,\omega_j[)^2 \quad \varphi_1'(0) = \varphi_1(\omega_j) = 0;$

$$\varphi_2(0) = \varphi_2(\omega_j) = 0\}$$

sinon.

Nous allons noter par $\varphi_{j,m}$, $m \geq 1$, les fonctions propres normalisées et par $\lambda_{j,m}^2$, $m \geq 1$, les valeurs propres correspondantes.

Donc on a:

$$-\varphi_{j,m}'' = \lambda_{j,m}^2 \varphi_{j,m} \text{ où } \varphi_{j,m} \in D(\Lambda_j) \text{ et } \lambda_{j,m} = \begin{cases} \frac{m\pi}{\omega_j}, & \text{pour } j \in D\,; \\ \frac{m\pi}{2\omega_j}, & \text{pour } j \in G\,. \end{cases}$$

Soit maintenant $v \in M(\Omega) \subset L^2(\Omega)^2$, comme v est régulière, pour tout $r > 0$ (d'après le lemme 4.3 et la démonstration de théorème 5.1), alors: $v\left(re^{i\theta}\right) \in D(\Lambda_j)$, pour $0 < r < \rho$ et

$$v\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{m\geq 1} \alpha_{j,m} r^{\lambda_{j,m}} \varphi_{j,m}(\theta) + \sum_{0<\lambda_{j,m}<1} \beta_{j,m} r^{-\lambda_{j,m}} \varphi_{j,m}(\theta),$$

où $\alpha_{j,m}$ et $\beta_{j,m}$ sont des nombres réels.

Pour pouvoir continuer la démonstration, on admet provisoirement le lemme suivant:

Lemme 5.3. *Pour tout j et pour tout $\lambda_{j,m} \in]0,1[$, il existe $\sigma_{j,m} \in M(\Omega)$ tel que*

$$\sigma_{j,m} - \zeta_j r_j^{-\lambda_{j,m}} \varphi_{j,m}(\theta) \in H^1(\Omega)^2 .$$

Donc d'après le lemme 5.3, on a:

$$v\left(re^{i\theta}\right) - \sum_{m\geq 1} \alpha_{j,m} r^{\lambda_{j,m}} \varphi_{j,m}(\theta) - \sum_{0<\lambda_{j,m}<1} \beta_{j,m} \sigma_{j,m} \in H^1(D_\rho)^2 ,$$

où $D_\rho = \Omega \cap \{0 < r < \rho\}$ et $w = \sum_{m\geq 1} \alpha_{j,m} r^{\lambda_{j,m}} \varphi_{j,m}(\theta) \in H^1(D_\rho)^2$.

Donc $v\left(re^{i\theta}\right) - \sum_{0<\lambda_{j,m}<1} \beta_{j,m} \sigma_{j,m} \in H^1(D_\rho)^2$.

Et par conséquent: $w = v - \sum_{0<\lambda_{j,m}<1} \beta_{j,m} \sigma_{j,m}$ et de classe H^1 au voisinage de s_j.

Le lemme 4.3 montre que $w \in H^1(\Omega)^2$, et donc $w \in M(\Omega) \cap H^1(\Omega)^2$. D'après l'unicité de la solution variationnelle, on aura

$$M(\Omega) \cap H^1(\Omega)^2 = \{0\} .$$

Cela montre que: $v = \sum\limits_{j} \left\{ \sum\limits_{0<\lambda_{j,m}<1} \beta_{j,m}\sigma_{j,m} \right\}$.

En d'autre sens v est une combinaison linéaire des fonctions $\sigma_{j,m}$, $1 \leq j \leq N$ et $0 < \lambda_{j,m} < 1$.

Il est clair que ces fonctions sont linéairements indépendantes.

On déduit finalement que $M(\Omega)$ est un sous-espace de $L^2(\Omega)^2$ de dimension égale à $\sum\limits_{j=1}^{N} \mu_j$.

Démonstration du lemme 5.3. On note par $u_{j,m}$ la fonction

$$\zeta_j r_j^{-\lambda_{j,m}} \varphi_{j,m}(\theta),$$

on a:

$$\Delta u_{j,m} = f_{j,m} \in \mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right),$$

et de plus

$$\gamma_k u_{j,m} = 0\,,\ \forall k \in D \quad \text{et} \quad \gamma_k\left(u_{j,m}.\eta^k\right) = \gamma_k\left(\frac{\partial u_{j,m}}{\partial \eta^k}.\tau^k\right) = 0, \quad \forall k \in G\,.$$

Donc, il existe $v_{j,m} \in H^1(\Omega)^2$ solution variationnelle de:

$$\int\limits_\Omega \nabla v_{j,k}.\nabla h dx = -\int\limits_\Omega h \Delta u_{j,m} dx, \quad \forall\, h \in V.$$

On pose: $\sigma_{j,m} = u_{j,m} - v_{j,m}$. Il est clair que

$$\sigma_{j,m} \in M(\Omega) \text{ et } \sigma_{j,m} - \zeta_j r_j^{-\lambda_{j,m}} \varphi_{j,m}(\theta) = v_{j,m} \in H^1(\Omega)^2\ .$$

Corollary 5.4. *Δ est un opérateur à indice de $W(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)^2$, plus précisement:*

Δ est injectif et a une image fermée de codimension égale à $\sum\limits_{j=1}^{N} \mu_j$ dans $L^2(\Omega)^2$.

5.1. **Application au système de Lamé** ($\Theta = L$)**.** Le point central de ce paragraphe est l'obtention de la majoration (3.1) pour L, où c est une constante indépendante des coefficients de Lamé. La dimenstration de cette majoration se fait, comme dans B. Benabderrahmane, B. Merouani [1] et de P. Grisvard [6], par une intégration par partie, on retrouve la restriction sur les coefficients de Lamé $\lambda \leq \sqrt{3}\,|\mu|$ pour que (3.1) soit vérifiée.

Donc l'opérateur de Lamé est un opérateur de type semi-Fredholm. Comme l'opérateur L dépend continument de λ en tant qu'opérateur son indice est indépendant de λ.

5.2. **Les solutions singulières pour le système de Lamé.** Il résulte du calcul de l'indice qu'il existe un nombre fini des solutions singulières S_j pour les angles de Ω sont supérieur à $\frac{\pi}{2}$. On peut calculer explicitement ces fonctions singulières en cherchant S_j de la forme:

$$S_j(r\ ,\ \theta) = r_j^{\alpha}\Psi_{\alpha}(\theta),$$

où $LS_j = 0$ dans le secteur $\{0 < \theta < \omega_j\}$, on trouve alors que α doit être solution de l'equation transcendante:

1) $\sin^2(\alpha\omega_j) = \frac{\alpha^2}{(3-4\nu)^2}\sin^2(\omega_j)$, si $j \in D$ et $j+1 \in D$;

2) $\sin(2\alpha\omega_j) = \frac{\alpha}{3-4\nu}\sin(2\omega_j)$, si $j \in D$ et $j+1 \in G$ ou $j \in G$ et $j+1 \in D$;

3) $\sin^2(\alpha\omega_j) = \sin^2(\omega_j)$, si $j \in G$ et $j+1 \in G$;

où ν est le coefficient de poisson ($0 < \nu < \frac{1}{2}$).

Les fonctions $\Psi_{\alpha}(\theta)$ sont données par:

$$\begin{aligned}1)\ \Psi_{\alpha}(\theta) = {} & \{(\rho_0+\rho_1)\sin(\alpha-2)\omega_j + (\rho_0-3\rho_1)\sin\alpha\omega_j\} \\ & \times \left|\begin{array}{c} (\rho_0+\rho_1)\left[\cos(\alpha-2)\theta - \cos\alpha\theta\right] \\ -(\rho_0+\rho_1)\sin(\alpha-2)\theta + (3\rho_0-\rho_1)\sin\alpha\theta \end{array}\right| \\ & + (\rho_0+\rho_1)\{\cos(\alpha-2)\omega_j - \cos\alpha\omega_j\} \left|\begin{array}{l} -(\rho_0+\rho_1)\sin(\alpha-2)\theta \\ -(\rho_0+\rho_1)\cos(\alpha-2)\theta \\ \quad + (3\rho_1-\rho_0)\sin\alpha\theta \\ \quad + (\rho_0+\rho_1)\cos\alpha\theta \end{array}\right|;\end{aligned}$$

si le sommet s_j est de type Dirichlet de par et d'outre

$$2)\ \Psi_{\alpha}(\theta) = \left|\begin{array}{c} \left[(\rho_0+\rho_1)\cos\alpha\omega_j\right]\cos(\alpha-2)\theta \\ \left[-(\rho_0+\rho_1)\cos\alpha\omega_j\right]\sin(\alpha-2)\theta \end{array}\right.$$

$$\left. \begin{array}{r} +\left[-\left(\rho_0+\rho_1\right)\cos(\alpha-2)\omega_j\right]\cos\alpha\theta \\ +\left[-2(\rho_1-\rho_0)\cos\alpha\omega_j+\left(\rho_0+\rho_1\right)\cos(\alpha-2)\omega_j\right]\sin\alpha\theta \end{array} \right| ;$$

si le sommet s_j est de type C-S-F Dirichlet

$$3)\ \Psi_\alpha(\theta) = \left| \begin{array}{r} \left[\left(\rho_0+\rho_1\right)\sin(\alpha+1)\omega_j\right]\cos(\alpha-2)\theta \\ \left[-\left(\rho_0+\rho_1\right)\sin(\alpha+1)\omega_j\right]\sin(\alpha-2)\theta \\ -\left[(\rho_1-\rho_0)\sin(\alpha+1)\omega_j+2\rho_1\sin(\alpha-1)\omega_j\right]\cos\alpha\theta \\ -\left[(\rho_1-\rho_0)\sin(\alpha+1)\omega_j+2\rho_1\sin(\alpha-1)\omega_j\right]\sin\alpha\theta \end{array} \right| ;$$

si le sommet s_j est de type C.S.F de par et d'outre, avec $\rho_0 = \frac{\alpha-1}{1-2\nu} - 2$ et $\rho_1 = \frac{\alpha+1}{1-2\upsilon} + 2$.

Remarque 5.1. 1. On a trouver que $u \in H^2\left(\Omega\right)^2$ (la régularité de la solution) dans le seul cas où Ω est un triangle dont tous les angles sont $< \frac{\pi}{2}$

2. L'extension des résultat démontrés ici pour un polyèdre n'est pas une question de pure routine, c'est un travail qui paraîtra ulturieurement.

References

[1] B.Benabderrahmane et B. Merouani. *Compertement singulier des solutions du système de Lamé dans un polyèdre*, Rev. Roum.Sci. Tech. Méc. Appl., t. 44, n.2, p. 231-239, Boucarest, (1999).

[2] H.Benseridi et B. Merouani. *Quelques problèmes de transmission liés au système de Lamé dans un polyèdre pour une classe d'espaces de sobolev à doubles poids, Rev. roum. Sci. Techn - Méc. Appl., Tome 48, N 1-6, p 21-34, Bucarest 2003.*

[3] H.Benseridi et M. Dilmi. *régularité des solutions de quelques problèmes aux limites dans un domaine de $\mathbb{R}^2$ non homogène, An. Univ. Oradea, fasc. Mathematica, Tom XII (2005), 221-235.*

[4] P.Grisvard. *Singularités in boundary value problémes, masson1992.*

[5] P.Grisvard. *Alternative de Frédholm relative au problème de Dirichlet dans un polygone.* bollettion della*, unione mathemtica, Italiana, 5(1972), pp. 132-146.*

[6] P.Grisvard. *Le problème de Dirichlet pour les équations de Lamé, C.R.Acad.Sc, t.304, sérieI, no:3, 1987.*

[7] A.GUESMIA. *On the decay estimates for elasticity systems with some localized dissipation, asymptotic analysis, 22(2000), 1-13.*

[8] M.S.HANNA-K.T.SMITH. *Some remarks on the Dirichlet problem in piecewise smooth domains, Comm. Pure appl. Math., 20 (1967), pp. 575-593.*

[9] B.MEROUANI ET B.BENABDERRAHMANE. *Résultats numériques de régularité du système de Lamé dans un polygone, Partie I, Rev. Roum. Sci.Tech. Méc. Appl, t. 44, n3, p. 305-330, Boucarest, (1999).*

[10] B.MEROUANI. *Quelques problèmes aux limites pour le système de Lamé dans un secteur plan,C.R.A.S, t.304, serieI, no:13,1987.*

[11] MS.MOUSSAOUI. *problème de Neumanne dans un domaine de* $\mathbb{R}^2$ *à frotière polygonale, thèse de Doctorat de troisième sycle, Alger, Mai 1973.*

Received 12 January 2006

UNIVERSITÉ DE M'SILA, FACULTÉ DES SCIENCES, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, M'SILA, 28000, ALGÉRIE. FAX: 213-35551836.

E-mail address: mouraddil@yahoo.fr

UNIVERSITÉ DE SÉTIF, FACULTÉ DES SCIENCES, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, SÉTIF, ALGÉRIE.

E-mail address: m_benseridi@yahoo.fr