Annales de Mathématiques 7 (2000) 15-26

Annales
de
Mathématiques

SUR LA STABILISATION NON LINÉAIRE D'UN SYSTÈME ISOTROPIQUE D'ÉLASTICITÉ

Aissa GUESMIA

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France.
E-mail: guesmia@math.u-strasbg.fr

Received: June 1998, accepted for publication: December 1999

Résumé. Dans cette note, on montre l'existence, l'unicité et la stabilisation uniforme d'un système isotrope d'élasticité par deux feedbacks non linéaires, frontière et interne. On précise le taux de décroissance par l'utilisation des inégalités intégrales.

AMS Classification: 35L05, 93D15, 35B40.

Key words: : Partial differential equation, elasticity, stabilization by nonlinear feedbacks, integral inequalities.

ISSN 1111-5556

1. Introduction

Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2\cdots$, de frontière Γ de classe C^2. On note par ν le vecteur unitaire normal extérieur à Γ. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et on pose

$$m(x) := x - x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad R = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{1}$$

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : \ m \cdot \nu \leq 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma_1 = \Gamma \backslash \Gamma_0. \tag{2}$$

Soient f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues croissantes telles que $f(0) = g(0) = 0$, soient λ, μ deux constantes positives (les constantes de Lamé dans l'interprétation physique du modèle) et $a \geq 0$. (Il est possible de généraliser tous les résultats de cette note au cas où a est une fonction positive dans $C(\bar{\Gamma}_1)$). On considère le système suivant:

$$u'' - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} u + f(u') = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{3}$$

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \tag{4}$$

$$\mu\partial_\nu u + (\lambda+\mu)(\operatorname{grad} u)\nu + (m\cdot\nu)(au + g(u')) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \tag{5}$$

$$u(0) = u^0 \quad \text{et} \quad u'(0) = u^1 \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{6}$$

où $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$, $u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ est la fonction inconnue, $u' = \dfrac{\partial u}{\partial t}$,

$$f(u') = (f(u'_1), \cdots, f(u'_n)), \quad g(u') = (g(u'_1), \cdots, g(u'_n))$$

et $u(0)$, $u'(0)$ désignent, respectivement, les fonctions $x \longmapsto u'(x,0)$ et $x \longmapsto u'(x,0)$

Le système (3)-(6) a été étudié par Komornik [6] dans le cas linéaire $f \equiv 0$, $g(u') = bu'$ où b est une cnstante positive donnée et $n \geq 3$. Il a prouvé la stabilité uniforme du système avec la précision du taux de décroissance. Le but de cette note est de généraliser ces résultats au cas non linéaire et pour tout $n \in \{1, 2, \cdots\}$.

On suppose que

$$\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset, \tag{7}$$

$$\Gamma_0 \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad a > 0 \text{ et } \inf_{\Gamma_1}(m\cdot\nu) > 0 \tag{8}$$

et qu'il existe une constante positive c' telle que

$$\left|f(x)\right| \leq c'(1 + |x|) \quad \text{et} \quad \left|g(x)\right| \leq c'(1 + |x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

On définit les espaces de Hilbert suivants:

$$H = (L^2(\Omega))^n, \quad \|u\|_H^2 = \int_\Omega |u|^2 dx,$$

$$V = (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^2, \quad \|u\|_V^2 = \int_\Omega \left(\mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)(\operatorname{div} u)^2\right)dx + a\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u|^2 d\Gamma$$

où, $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) :\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$ et

$$W = (H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n, \quad \|u\|^2_W = \int_\Omega \left|\Delta u\right|^2 dx + \|u\|^2_V.$$

On a le résultat d'existence et d'unicité suivant:

Théorème 1.1 *Supposons que les conditions* $(7) - (9)$ *sont satisfaites.*

Pour toute donnée initiale $(u^0, u^1) \in V \times H$*, le système* $(3) - (6)$ *admet une solution unique (défine au sens faible) u vérifiant*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; V) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H). \tag{10}$$

Si la donnée initiale $(u^0, u^1) \in W \times V$ *est telle que* $f(u^1) \in H$ *et*

$$\mu\partial_\nu u^0 + (\lambda+\mu)(\operatorname{div} u^0)\nu + (m\cdot\nu)(au^0 + g(u^1)) = 0 \quad sur \quad \Gamma_1, \tag{11}$$

alors la solution (dite forte) u vérifie

$$u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V) \quad et \quad u'',\ f(u') \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H). \tag{12}$$

Si de plus g est globalement Lipschitz, alors

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; W) \quad et \quad g(u') \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V). \tag{13}$$

On étudie maintenant la stabilité du système (3)-(6).

On définit l'énergie de la solution par la formule

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)(\operatorname{div} u)^2 + \left|u'\right|^2\right) dx + \frac{a}{2}\int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu)\left|u\right|^2 d\Gamma \tag{14}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. On remarque que l'énergie E est une fonction positive et, pour toute solution forte du système (3)-(6), on a

$$E'(t) = \int_\Omega \left(\mu\nabla u \cdot \nabla u' + (\lambda+\mu)(\operatorname{div} u)(\operatorname{div} u') + u'\cdot u''\right)dx + a\int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu) u \cdot u' d\Gamma.$$

On utilise l'équation (3), une inégration par parties et les conditions au bord nous donnent

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\int_\Omega u' \cdot f(u')dx + \int_{\Gamma_1} u' \cdot \left(\mu\partial_\nu u + (\lambda+\mu)(\operatorname{div} u)\nu + a(m\cdot\nu)u\right)d\Gamma \\ &= -\int_\Omega u'\cdot f(u')dx - \int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu)u'\cdot g(u')d\Gamma. \end{aligned}$$

Et par suite on a

$$E(S) - E(T) = \int_S^T \int_\Omega u'\cdot f(u')dx + \int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu)u' \cdot g(u')d\Gamma dt \tag{15}$$

pour tout $0 \leq S < T < \infty$. Cette identité se généralise aux solutions faibles par arguments de densité. Comme

$$m \cdot \nu > 0, \forall x \in \Gamma_1 \quad \text{et} \quad xf(x),\, xg(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

l'énergie E est décroissante.

On démontre le résultat de stabilité suivant:

Théorème 1.2 *Supposons que les conditions* $(2), (7)-(8)$ *sont satisfaites et qu'il existe deux constantes positives* c_1, c_2 *telles que*

$$c_1|x| \leq |g(x)| \leq c_2|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{2}(\frac{3aR^2}{\mu} - n)c_1|x| \leq |f(x)| \leq \frac{1}{2}(\frac{3aR^2}{\mu} - n)c_2|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{17}$$

et

$$\frac{\mu}{R^2} \max\{\frac{n}{3},\, n-2\} \leq a < \frac{\mu}{R^2}n. \tag{18}$$

Alors toute solution faible du système $(3)-(6)$ *vérifie l'estimation*

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{19}$$

où, $\omega = \dfrac{\mu n - aR^2}{\mu}(\dfrac{2R}{\sqrt{\mu}} + \dfrac{R^2}{\mu}c_2 + \dfrac{1}{c_1})^{-1}$.

Remarques.

* Par un calcule simple, on trouve que ω atteint son maximum pour $c_1 = c_2 = \dfrac{\sqrt{\mu}}{R}$ et $a = \dfrac{\mu}{R^2}\max\{\dfrac{n}{3},\, n-2\}$, (c'est à dire $g(x) = \dfrac{\sqrt{\mu}}{R}x$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{\mu}}{2R}(\dfrac{3aR^2}{\mu} - n)x$, $\forall x \in \mathbb{R}$). Dans ce cas là, et pour $n \geq 3$, le même résultat a été obtenu par Komornik [6].

** L'hypothèse (8) garantit que l'expression

$$\|u\|_V^2 = \int_\Omega \left(\mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)(\operatorname{div} u)^2\right)dx + a\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u|^2 d\Gamma$$

définit une norme sur V equivalente à la norme usuelle de $(H^1(\Omega))^n$; et par conséquent V est un espace de Hilbert.

*** Pour démontrer le théorème 1.1, on utilise la théorie des semi-groupes non linéaires. (Voir Ball [1], Conrad et Pierre [2] et Komornik [7]). Pour obtenir les estimations de décroissance, on applique la méthode de multiplicateur basée sur des inégalités intégrales utilisées par Guesmia [3], [4], [5], Komornik [6], [7], Komornik et Zuazua [8] et Lagnese [9].

2. Preuve du théorème 1.1

On identifie H avec son dual H'. On obtient

$$W \hookrightarrow V \hookrightarrow H = H' \hookrightarrow V' \hookrightarrow W'$$

avec injection compacte et dense. On prend l'application de dualité

$$A : V \to V'.$$

D'après la condition (9) et le théorème de trace, la formule

$$\langle Bu, v\rangle_{V',V} := \int_{\Omega} f(u) \cdot v dx + \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) g(u) \cdot v d\Gamma, \quad u,\, v \in V$$

définit une application $B : V \to V'$ (non linéaire en générale).

On multiplie (3) par $v \in V$, on intègre par parties sur Ω et on utilise les conditions au bord. On trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \big(u'' \cdot v + \mu \nabla u \cdot \nabla v + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} u)(\operatorname{div} v)\big) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} f(u') \cdot v dx + \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu)(au + g(u')) \cdot v d\Gamma \\ &= \langle u'' + Au + Bu', v\rangle_{V',V}, \end{aligned}$$

donc

$$u'' + Au + Bu' = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+ \tag{20}$$

pour toute solution faible du système (3)-(6).

On pose

$$u' := z, \quad U := (u, z) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}U := (-z, Au + Bz).$$

On peut écrire le système (3)-(6) sous la forme

$$\begin{cases} U' + \mathcal{A}U = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+, \\ U(0) = (u^0, u^1). \end{cases} \tag{21}$$

On définit l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = V \times H$ et on considère l'opérateur $\mathcal{A}$ défini dans $\mathcal{H}$ tel que

$$D(\mathcal{A}) = \{U = (u, z) \in V \times V : \; Au + Bz \in H\}.$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal monotone (pour plus de détails voir Conrad et Pierre [2] pour une étude générale du système de second ordre, et Komornik [7] pour une étude similaire de l'équation des ondes et plusieurs autres problèmes), on applique donc la théorie des semi-groupes non linéaires (voir aussi Ball [1] et Komornik [7]), on utilise (9) et on trouve les deux premiers résultats du théorème 1.1.

La preuve de ce théorème se termine par le lemme suivant:

Lemme 2.1 *Si g est globalement Lipschitz, alors il existe une constante positive c telle que pour tout $(u,z) \in W \times V$ vérifiant $f(z) \in H$ et*

$$\mu \partial_\nu u + (\lambda+\mu)(\operatorname{div} u)\nu + (m \cdot \nu)(au + g(z)) = 0 \quad sur \quad \Gamma_1 \tag{22}$$

on a l'estimation

$$\|u\|_W \leq c(\|Au + Bz\|_H + \|z\|_V). \tag{23}$$

Les propriétés (12) et (20) impliquent que

$$u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V) \quad \text{et} \quad Au + Bz \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H).$$

En utilisant (9) et (23), on obtient (13).

□

Preuve du lemme 2.1

Soit $(u,z) \in W \times V$ vérifiant (22) et $f(z) \in H$, montrons que $(u,z) \in D(\mathcal{A})$. Il suffit de montrer l'estimation

$$\left|\langle Au + Bz, v\rangle_{V',V}\right| \leq c\|v\|_H, \quad \forall v \in V \tag{24}$$

pour une constante c.
On utilise la définition de A et de B, on intègre par parties et on utilise (22). On obtient

$$\begin{aligned} \langle Au + Bz, v\rangle_{V',V} &= \langle u, v\rangle_V + \langle Bz, v\rangle_{V',V} \\ &= -\int_\Omega \big(\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} u - f(z)\big) \cdot v dx. \end{aligned}$$

On a $f(z) \in H$, et comme $u \in W$ alors Δu, $\operatorname{grad}\operatorname{div} u \in H$, et par suite on obtient (24), c'est à dire $Au + Bz \in H$. (On constate maintenant que $(H_0^2(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n \subset D(\mathcal{A})$, et par conséquent, $D(\mathcal{A})$ dense dans $\mathcal{H}$). Donc on a pour tout $v \in V$

$$\langle Au + Bz, v\rangle_{V',V} = \langle Au + Bz, v\rangle_H,$$

c'est à dire

$$\int_\Omega \big(\mu\nabla u \cdot \nabla v + (\lambda+\mu)(\operatorname{div} u)(\operatorname{div} v)\big)dx = \int_\Omega k \cdot v dx + \int_{\Gamma_1} h \cdot v d\Gamma$$

où, $k = Au + Bz - f(z)$ et $h = -(m \cdot \nu)(au + g(z))$.
Cette égalité implique que u est la solution faible du système suivant:

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} u = k \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \\ \mu\partial_\nu u + (\lambda+\mu)(\operatorname{div} u)\nu = h \quad \text{sur} \quad \Gamma_1. \end{cases} \tag{25}$$

On a $k \in H$, et comme g est globalement Lipschitz, alors

$$\int_\Omega \left|g(z)\right|^2 dx \leq c \int_\Omega \left|z\right|^2 dx = c\|z\|_H^2 < \infty$$

et

$$\int_\Omega \left|\nabla g(z)\right|^2 dx = \int_\Omega \left|g'(z)\cdot \nabla z\right|^2 dx \le c \int_\Omega \left|\nabla z\right|^2 dx \le c\|z\|_V < \infty.$$

Donc $g(z) \in (H^1(\Omega))^n$ et par suite h est aussi. On applique la théorie de la régularité elliptique (utiliser aussi (9)) et on conclut que

$$\|u\|_W \le c(\|k\|_H + \|h\|_V) \le c(\|Au + Bz\|_H + \|z\|_V),$$

d'où (23).

□

3. Preuve du théorème 1.2

On note qu'il est suffisant de prouver l'estimation (19) pour les solutions fortes, le résultat se généralise aux solutions faibles par arguments de densité et contraction du semi-groupe.

Soit u une solution forte du système (3)-(6) qui a la régularité (12). On pose[1]

$$M := 2m\cdot\nabla u + \frac{2aR^2}{\mu}u = 2m_k\partial_k u + \frac{2aR^2}{\mu}u. \tag{26}$$

On montre premièrement l'identité suivante:

Lemme 3.1 *Pour tout* $0 \le S < T < \infty$ *on a*

$$\begin{aligned}(27)\ \Big(n-\frac{2aR^2}{\mu}\Big)\int_S^T\!\!\int_\Omega |u'|^2 dxdt + \Big(\frac{2aR^2}{\mu}+2-n\Big)\int_S^T\!\!\int_\Omega \big(\mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)(\operatorname{div} u)^2\big)dxdt\\ = \int_S^T\int_{\Gamma_0}\big(\mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)(\operatorname{div} u)^2\big)(m\cdot\nu)d\Gamma dt\\ - \int_S^T\int_\Omega M\cdot f(u')dxdt + \Big[\int_\Omega M\cdot u' dx\Big]_T^S\\ + \int_S^T\int_{\Gamma_1}\big(|u'|^2 - M\cdot(au+g(u')) - \mu|\nabla u|^2 - (\lambda+\mu)(\operatorname{div} u)^2\big)(m\cdot\nu)d\Gamma dt.\end{aligned}$$

Preuve. On multiplie l'équation (3) par $2m\cdot\nabla u$ et on intègre par parties sur $\Omega\times[S,T]$. On obtient (comme dans [6])

$$\begin{aligned}0 &= \int_S^T\int_\Omega \big(2m_k\partial_k u_i\big)\big(u_i'' - \mu\partial_j^2 u_i - (\lambda+\mu)\partial_i\partial_j u_j + f(u_i')\big)dxdt\\ &= \Big[\int_\Omega (2m_k\partial_k u_i)u_i' dx\Big]_S^T + \int_S^T\!\!\int_\Omega\Big(-m_k\partial_k(u_i')^2 + \mu m_k\partial_k(\partial_j u_i)^2 + 2\mu\partial_j m_k\partial_k u_i\partial_j u_i\\ &\quad + (\lambda+\mu)m_k\partial_k(\partial_j u_j)^2 + 2(\lambda+\mu)(\partial_i m_k)(\partial_k u_i)(\partial_j u_j) + 2(m\cdot\nabla u_i)f(u_i')\Big)dxdt\end{aligned}$$

[1] On utilise la convention de somme sur les indices répétés.

$$
\begin{aligned}
&+\int_S^T\int_\Gamma\Big(-2\mu\nu_j m_k(\partial_k u_i)(\partial_j u_i)-2(\lambda+\mu)\nu_i m_k(\partial_k u_i)(\partial_j u_j)\Big)d\Gamma dt\\
=&\Big[\int_\Omega(2m_k\partial_k u_i)u_i'dx\Big]_S^T+\int_S^T\int_\Omega\Big((\partial_k m_k)\big((u_i')^2-\mu(\partial_j u_i)^2-(\lambda+\mu)(\partial_j u_j)^2\big)\\
&+2\mu(\partial_j m_k)(\partial_k u_i)(\partial_j u_i)+2(\lambda+\mu)(\partial_i m_k)(\partial_k u_i)(\partial_j u_j)+2(m\cdot\nabla u_i)f(u_i')\Big)dxdt\\
&+\int_S^T\int_\Gamma\Big(-2\mu\nu_j m_k(\partial_k u_i)(\partial_j u_i)-2(\lambda+\mu)\nu_i m_k(\partial_k u_i)(\partial_j u_j)\\
&\qquad+(m_k\nu_k)\big(-(u_i')^2+\mu(\partial_j u_i)^2+(\lambda+\mu)(\partial_j u_j)^2\big)\Big)d\Gamma dt.
\end{aligned}
$$

Or

$\partial_k m_k = n,$
$\partial_i m_k = \delta_{ik},$
$(u_i')^2 = \big|u'\big|^2,$
$(\partial_j u_i)^2 = \big|\nabla u\big|^2$, $\partial_j u_j = \operatorname{div} u$ et
$m_k\nu_k = m\cdot\nu,$

donc on conclut à partir de cette identité que

$$
\begin{aligned}
(28)\qquad &\int_S^T\int_\Omega\big(n\big|u'\big|^2+(2-n)\mu\big|\nabla u\big|^2+(2-n)(\lambda+\mu)(\operatorname{div} u)^2\big)dxdt\\
&=\Big[\int_\Omega 2(m\cdot\nabla u)\cdot u'dx\Big]_S^T-\int_S^T\int_\Omega 2(m\cdot\nabla u)\cdot f(u')dxdt\\
&\quad+\int_S^T\int_\Gamma\Big((m\cdot\nu)\big(\big|u'\big|^2-\mu\big|\nabla u\big|^2-(\lambda+\mu)(\operatorname{div} u)^2\big)\\
&\qquad+(2m_k\partial_k u_i)\big(\mu\partial_\nu u_i+(\lambda+\mu)\nu_i\operatorname{div} u\big)\Big)d\Gamma dt.
\end{aligned}
$$

D'autre part, on multiplie l'équation (3) par u et on intègre par parties sur $\Omega\times[S,T]$. On obtient

$$
\begin{aligned}
0=&\int_S^T\int_\Omega u_i\big(u_i''-\mu\partial_j^2 u_i-(\lambda+\mu)\partial_i\partial_j u_j+f(u_i')\big)dxdt\\
=&\Big[\int_\Omega u_i u_i'dx\Big]_S^T+\int_S^T\int_\Omega\big(-(u_i')^2+\mu(\partial_j u_i)^2+(\lambda+\mu)(\partial_i u_i)^2+u\cdot f(u_i')\big)dxdt\\
&+\int_S^T\int_\Gamma\big(-\mu u_i\partial_\nu u_i-(\lambda+\mu)(\nu_i u_i)\partial_j u_j\big)\mathrm{d}\Gamma dt,
\end{aligned}
$$

et par suite

$$
\begin{aligned}
&\int_S^T\int_\Omega\big(-\big|u'\big|^2+\mu\big|\nabla u\big|^2+(\lambda+\mu)(\operatorname{div} u)^2\big)dxdt\\
&\quad=-\int_S^T\int_\Omega u\cdot f(u')dxdt+\Big[\int_\Omega u\cdot u'dx\Big]_T^S\\
&\qquad+\int_S^T\int_\Gamma u_i\big(\mu\partial_\nu u_i+(\lambda+\mu)\nu_i\operatorname{div} u\big)d\Gamma dt.
\end{aligned}
$$

On multiplie cette égalité par $\dfrac{2aR^2}{\mu}$ et on combine avec l'identité (28) on trouve

$$(29)\quad \Big(\frac{2aR^2}{\mu}+2-n\Big)\int_S^T\!\!\int_\Omega\big(\mu\big|\nabla u\big|^2+(\lambda+\mu)(\operatorname{div}u)^2\big)dxdt+\Big(n-\frac{2aR^2}{\mu}\Big)\int_S^T\!\!\int_\Omega\big|u'\big|^2dxdt$$
$$=\Big[\int_\Omega M\cdot u'dx\Big]_T^S-\int_S^T\!\!\int_\Omega M\cdot f(u')dxdt$$
$$+\int_S^T\!\!\int_\Gamma\Big((m\cdot\nu)\big(\big|u'\big|^2-\mu\big|\nabla u\big|^2-(\lambda+\mu)(\operatorname{div}u)^2\big)$$
$$+M_i\big(\mu\partial_\nu u_i+(\lambda+\mu)\nu_i\operatorname{div}u\big)\Big)d\Gamma dt.$$

D'après la condition (4) on a $u=0$ sur Γ_0, ce qui implique que

$$u'=0,\quad M_i=2m\cdot\nabla u_i=2(m\cdot\nu)\partial_\nu u_i\ \text{ et }\ \operatorname{div}u=(\partial_\nu u)\nu.$$

Donc, on utilise aussi la condition (5), on trouve

$$M_i\big(\mu\partial_\nu u_i+(\lambda+\mu)\nu_i\operatorname{div}u\big)=2(m\cdot\nu)\big(\mu\big|\partial_\nu u\big|^2+(\lambda+\mu)(\operatorname{div}u)^2\big)\quad\text{sur}\quad\Gamma_0$$

et

$$M_i\big(\mu\partial_\nu u_i+(\lambda+\mu)\nu_i\operatorname{div}u\big)=-M\cdot(au+g(u'))(m\cdot\nu)\quad\text{sur}\quad\Gamma_1.$$

En utilisant ces deux dernières égalités dans (29) on obtient (27).

□

Lemme 3.2 *Pour tout $0\le S<T<\infty$ on a*

$$(30)\qquad \Big[\int_\Omega M\cdot u'dx\Big]_T^S\le\frac{2R}{\sqrt{\mu}}\big(E(S)+E(T)\big)$$

et pour tout $\varepsilon>0$,

$$(31)\quad \Big|\int_S^T\int_\Omega M\cdot f(u')dxdt\Big|$$
$$\le\varepsilon\int_S^T\!\!\int_\Omega\big|f(u')\big|^2dxdt+\frac{R^2}{\varepsilon\mu}\Big(\int_S^T\!\!\int_\Omega\mu\big|\nabla u\big|^2dxdt+\int_S^T\!\!\int_{\Gamma_1}a(m\cdot\nu)\big|u\big|^2d\Gamma dt\Big).$$

Preuve. On a (comme dans [6] et [7], lemme 3.2)

$$\int_\Omega\Big|2m_k\partial_ku_i+\frac{2aR^2}{\mu}u_i\Big|^2dx-\int_\Omega\big|2m_k\partial_ku_i\big|^2dx$$
$$=\int_\Omega\Big(\Big(\frac{2aR^2}{\mu}\Big)^2u_i^2+\frac{8aR^2}{\mu}m_ku_i\partial_ku_i\Big)dx$$
$$=\frac{4aR^2}{\mu}\int_\Gamma(m\cdot\nu)\big|u\big|^2d\Gamma+\frac{4aR^2}{\mu}\Big(\frac{aR^2}{\mu}-n\Big)\int_\Omega\big|u\big|^2dx$$
$$\le\frac{4aR^2}{\mu}\int_\Gamma(m\cdot\nu)\big|u\big|^2d\Gamma.$$

Dans la dernière majoration on a utilisé (18). On applique l'inégalité de Young, on utilise (14) et on conclut que

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega M\cdot u'dx\Big| &\le \frac{\sqrt{\mu}}{4R}\int_\Omega \big|2m_k\partial_k u_i+\frac{2aR^2}{\mu}u_i\big|^2dx+\frac{R}{\sqrt{\mu}}\int_\Omega\big|u'\big|^2dx\\ &\le \frac{\sqrt{\mu}}{4R}\int_\Omega\big|2m_k\partial_k u_i\big|^2dx+\frac{aR}{\sqrt{\mu}}\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)\big|u\big|^2d\Gamma+\frac{R}{\sqrt{\mu}}\int_\Omega\big|u'\big|^2dx\\ &\le \frac{R}{\sqrt{\mu}}\Big(\int_\Omega\big(\big|u'\big|^2+\mu\big|\nabla u\big|^2\big)dx+a\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)\big|u\big|^2d\Gamma\Big)=\frac{2R}{\sqrt{\mu}}E(t).\end{aligned}$$

Et par suite

$$\Big[\int_\Omega M\cdot u'dx\Big]_T^S\le\frac{2R}{\sqrt{\mu}}\big(E(S)+E(T)\big),$$

d'où (30).

D'autre part, on utilise l'inégalité de Young et on obtient, pour tout $\varepsilon>0$,

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega M\cdot f(u')dx\Big| &\le \varepsilon\int_\Omega\big|f(u')\big|^2dx+\frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega\big|M\big|^2dx\\ &\le \varepsilon\int_\Omega\big|f(u')\big|^2dx+\frac{1}{4\varepsilon}\Big(\int_\Omega\big|2m\cdot\nabla u\big|^2dx+\frac{4aR^2}{\mu}\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)\big|u\big|^2d\Gamma\Big)\\ &\le \varepsilon\int_\Omega\big|f(u')\big|^2dx+\frac{R^2}{\varepsilon\mu}\Big(\int_\Omega\mu\big|\nabla u\big|^2dx+a\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)\big|u\big|^2dx\Big),\end{aligned}$$

on intègre sur $[S,T]$ et on conclut (31), ce qui termine la preuve du lemme 3.2. □

Lemme 3.3 *Sur Γ_1 on a l'estimation*

$$(32)\quad -M\cdot(au+g(u'))-\mu\big|\nabla u\big|^2-(\lambda+\mu)(\operatorname{div}u)^2\le\frac{R^2}{\mu}\big|g(u')\big|^2-\frac{a^2R^2}{\mu}\big|u\big|^2.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}&-M\cdot(au+g(u'))-\mu\big|\nabla u\big|^2-(\lambda+\mu)(\operatorname{div}u)^2\\ &\quad\le 2\big|m_k\partial_k u\big|\big|au+g(u')\big|-\frac{2aR^2}{\mu}a\big|u\big|^2-\frac{2aR^2}{\mu}u\cdot g(u')-\mu\big|\nabla u\big|^2\\ &\quad\le 2R\big|\nabla u\big|\big|au+g(u')\big|-\frac{2aR^2}{\mu}a\big|u\big|^2-\frac{2aR^2}{\mu}u\cdot g(u')-\mu\big|\nabla u\big|^2\\ &\quad\le\frac{R^2}{\mu}\big(a^2\big|u\big|^2+\big|g(u')\big|^2+2au\cdot g(u')\big)-\frac{2aR^2}{\mu}a\big|u\big|^2-\frac{2aR^2}{\mu}u\cdot g(u')\\ &\quad\le\frac{R^2}{\mu}\big|g(u')\big|^2-\frac{a^2R^2}{\mu}\big|u\big|^2,\end{aligned}$$

d'où (32).

□

En utilisant (2), (16), (18) et la définition (14) de l'énergie et en appliquant ces deux derniers lemmes, on conclut à partir de l'égalité (27) que pour tout $0 \leq S < T < \infty$ et pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}(33)\quad \frac{2R^2}{\mu}\Big(a-\frac{1}{\varepsilon}\Big)\int_S^T E(t)dt \ \leq\ & \frac{2R}{\sqrt{\mu}}\big(E(S)+E(T)\big)+\varepsilon\int_S^T\!\!\int_\Omega \big|f(u')\big|^2 dxdt \\ &+\Big(\frac{1}{c_1}+\frac{R^2}{\mu}c_2\Big)\int_S^T\!\!\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)u'\cdot g(u')d\Gamma dt+\Big(\frac{3aR^2}{\mu}-n-\frac{R^2}{\varepsilon\mu}\Big)\int_S^T\!\!\int_\Omega \big|u'\big|^2 dxdt.\end{aligned}$$

On choisit[2] $\varepsilon = \dfrac{2R^2}{3aR^2-\mu n}$, à l'aide de la condition (17) et de l'identité (15) on conclut d'après (33) que

$$\Big(n-\frac{aR^2}{\mu}\Big)\int_S^T E(t)dt \leq \Big(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\frac{1}{c_1}+\frac{R^2}{\mu}c_2\Big)E(S)+\Big(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}-\frac{1}{c_1}-\frac{R^2}{\mu}c_2\Big)E(T).$$

Or $c_1 \leq c_2$ (voir (16)), ce qui implique

$$\frac{2R}{\sqrt{\mu}}-\frac{1}{c_1}-\frac{R^2}{\mu}c_2 \leq \frac{2R}{\sqrt{\mu}}-\frac{1}{c_1}-\frac{R^2}{\mu}c_1 \ = \ -\frac{1}{c_1}(1-\frac{R}{\sqrt{\mu}}c_1)^2 \leq 0.$$

donc

$$\Big(n-\frac{aR^2}{\mu}\Big)\int_S^T E(t)dt \leq \Big(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\frac{1}{c_1}+\frac{R^2}{\mu}c_2\Big)E(S)$$

pour tout $0 \leq S < T < \infty$, par suite

$$(34)\qquad \int_S^\infty E(t)dt \leq \frac{\mu}{\mu n - aR^2}\Big(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\frac{1}{c_1}+\frac{R^2}{\mu}c_2\Big)E(S), \quad \forall S \geq 0.$$

L'identité (15) et l'inégalité (34) montrent que la fonction

$$E:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

est décroissante et vérifie, pour une constante $T > 0$, l'estimation

$$\int_S^\infty E(t)dt \leq TE(S), \quad \forall S \geq 0.$$

On déduit l'estmation (19) par l'application de la proposition suivante:

Proposition 3.1 (V. Komornik [7]) *Soit $E\ :\ \mathbb{R}^+ \ \to\ \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante vérifiant, pour une constante $T > 0$, l'estimation*

$$\int_S^\infty E(t)dt \leq TE(S), \quad \forall S > 0,$$

alors on a

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\frac{1}{T}t}, \quad \forall t \geq 0.$$

□

[2] Si $n = \dfrac{3aR^2}{\mu}$, de (17) on a $f \equiv 0$, dans ce cas on fait tendre ε vers $+\infty$ dans (33).

Références

[1] J. B. Ball, *On the asymptotic behavior of generalized processes with applications to nonlinear evolution equations*, J. Diff. Equa., 27(1978), 224-265.

[2] F. Conrad and M. Pierre, *Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedback*, Ann. Inst. Henri Poincaré., 11(1994), 485-515.

[3] A. Guesmia, *Existence globale et stabilisation interne non linéaire d'un système de Petrovsky*, Bull. Belg. Math. Soc., 5(1998), 1-12.

[4] A. Guesmia, *On the nonlinear satbilization of the wave equation*, Anna. Polo. Math., 68(1998), 191-198.

[5] A. Guesmia, *Existence globale et stabilisatin interne non linéaire d'un système d'élasticité*, Portugaliae Mathematica, 55(1998), 333-347.

[6] V. Komornik, *Boundary stabilization of isotropic elasticity systems*, Lecture Notes in Pur and Appl. Math., 174 (1996), 135-146.

[7] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization, the multiplier method*, Masson-John Wiley, Paris, 1994.

[8] V. Komornik and E. Zuazua, *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation*, J. Math. Pures. Appl., 69(1990), 33-54.

[9] J. Lagnese, *Boundary stabilization of linear elastodynamic systems*, SIAM J. Control Opt., 21(1983), 968-984.

This article was processed using the LATEX macro package with ANNAMAT style