Afrika Matematika
Série 3. vol. 10 (1999)

Stabilisation de l'équation des ondes avec condition aux limites de type mémoire

AISSA GUESMIA

Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Université Louis Pasteur et CNRS,
7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cédex, France.
E-mail: guesmia@math.u-strasbg.fr

RÉSUMÉ. Dans cette note, on montre la stabilité uniforme de l'équation des ondes $u'' - \Delta u = 0$ sur $\Omega \times I\!R^+$ où, Ω est un ouvert borné dans $I\!R^n\,(n = 1, 2, \cdots)$, avec les conditions au bord $u = 0$ sur $\Gamma_0 \times I\!R^+$, $\partial_\nu u(t,x) + \int_o^t k(t-s,x)u'(s,x)ds + b(x)u'(t,x) = 0$ sur $\Gamma_1 \times I\!R^+$ où, Γ_0, Γ_1 sont des parties disjointes de la frontière Γ de Ω et k, b sont des fonctions données. On utilise la méthode des inégalités d'intégrales dûe à F. Conrad and B. Rao [1], V. Komornik [2, 3] et E. Zuazua [7].

1991 Mathematics Subject Classification: 35L05, 35B40.

Key words and phrases: Wave equation, boundary conditions of memory type, uniform stabilization, integral inequality.

1. Introduction

Soit, dans toute la suite, Ω un ouvert borné non vide de $I\!R^n\,(n = 1, 2, \cdots)$ de classe C^2 et de frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ où, Γ_0, Γ_1 sont des parties disjointes de Γ. Soient $b : \Gamma_1 \longrightarrow I\!R^+$ une fonction appartenant à $L^\infty(\Gamma_1)$ et $k : \Gamma_1 \times I\!R^+ \longrightarrow I\!R$ une fonction de classe $C^2(I\!R^+; L^\infty(\Gamma_1))$ vérifiant les conditions suivantes:

$$k \geq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times I\!R^+, \tag{1.1}$$

$$k' \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times I\!R^+ \tag{1.2}$$

et

$$\exists \alpha > 0 : k'' \geq -\alpha k' \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times I\!R^+. \tag{1.3}$$

On peut prendre comme exemple la fonction

$$k(t,x) = f(x)e^{-\alpha t} + g(x) \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times I\!R^+ \tag{1.4}$$

où, $f,\, g \in L^\infty(\Gamma_1; I\!R^+)$.

On considère le système suivant:

$$u'' - \Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times I\!R^+, \tag{1.5}$$

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \times I\!R^+, \tag{1.6}$$

$$\partial_\nu u + \int_0^t k(t-s)u'(s)ds + bu' = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times I\!R^+, \tag{1.7}$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{et} \quad u'(0) = u_1 \quad \text{sur} \quad \Omega. \tag{1.8}$$

Ce système a été étudié par G. Propst et J. Prüss [5] (dans un cadre plus général), ils ont démontré que le problème (1.5)-(1.8) est bien bosé, plus précisément, ils ont obtenu le résultat suivant:

THÉORÈME 1.1. *Pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, le système (1.5)-(1.8) admet une solution unique u (définie au sense faible) vérifiant*

$$u \in C^1(I\!R^+; L^2(\Omega)) \cap C(I\!R^+; H_{\Gamma_0}(\Omega)). \tag{1.9}$$

De plus, si $(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \times H^1_0(\Omega)$, alors la solution u (dite forte) a la régularité suivante:

$$u \in C^2(I\!R^+; L^2(\Omega)) \cap C^1(I\!R^+; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \cap C(I\!R^+; H^2(\Omega)). \tag{1.10}$$

Le but de cette note est d'obtentir la stabilité uniforme de la solution u du système (1.5)-(1.8) par l'utilisation de la méthode des multiplicateurs.

On va transformer la condition (1.7), on suppose que

$$u_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1. \tag{1.11}$$

Par intégration par parties on obtient

$$\int_0^t k(t-s,x)u'(s,x)ds = [k(t-s,x)u(s,x)]_0^t + \int_0^t k'(t-s,x)u(s,x)ds$$

$$= \int_0^t k'(t-s,x)u(s,x)ds + k(0)u - k(t,x)u_0 = \int_0^t k'(t-s,x)u(s,x)ds + k(0)u,$$

donc, sur Γ_1 on a la condition

$$\partial_\nu u + \int_0^t k'(t-s)u(s)ds + k(0)u + bu' = 0. \tag{1.12}$$

On définit l'énergie associée à la solution u par la formule

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega ((u')^2 + |\nabla u|^2)dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} ku^2 d\Gamma \tag{1.13}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'(t-s)(u(t)-u(s))^2 ds d\Gamma$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. D'après (1.1) et (1.2) on constate que E est une fonction positive.

On fixe un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et on pose

$$m(x) = x - x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad R = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{1.14}$$

On suppose que

$$\Gamma_0 \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad \inf_{\Gamma_1 \times \mathbb{R}^+} k \neq 0, \tag{1.15}$$

$$m.\nu \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \tag{1.16}$$

et

$$\exists \delta > 0 : m.\nu \geq \delta \quad \text{sur} \quad \Gamma_1, \tag{1.17}$$

où, ν est le vecteur normal extérieur à Γ. Pour la fonction b on suppose que

$$\exists \beta > 0 : b \geq \beta \quad \text{sur} \quad \Gamma_1. \tag{1.18}$$

On a le résultat de stabilité suivant:

THÉORÈME 1.2 *Supposons que les conditions (1.1)-(1.3), (1.15)-(1.18) sont satisfaites. Si*

$$\alpha \inf_{\Gamma_1} k(0) > -2 \inf_{\Gamma_1} k'(0), \tag{1.19}$$

alors pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ la solution du système (1.5)-(1.8) vérifie l'estimation

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t}, \quad \forall t \geq 0 \tag{1.20}$$

où, ω est une constante positive ne dépendant pas de (u_0, u_1).

REMARQUES. * La condition (1.15) implique que la formule $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma_1} ku^2 dx$ définit une norme sur $H^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle.

* Les conditions (1.16) et (1.17) impliquent que $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$, la condition (1.17) peut être affaiblit (voir V. Komornik and E. Zuazua [3]).

2. Démonstration du théorème 1.2

On va montrer l'existence d'une constante positive c dépendant seulement de Ω vérifiant $\int_S^\infty E(t)dt \leq cE(S)$ pour tout $S > 0$ et toute solution faible du système (1.5)-(1.8). Comme la constante c ne dépend pas de (u_0, u_1), il suffit de montrer cette inégalité pour les solutions fortes et par arguments de densité, le résultat se généralise pour les solutions faibles.

Soit $(u_0, u_1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, donc la solution u a la régularité (1.10). On commence par démontrer les deux identités suivantes:

LEMME 2.1. *La fonction $E : I\!R^+ \to I\!R^+$ est décroissante et pour tout $0 \leq S < T < \infty$ on a*

$$\frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} \int_0^t k''(t-s)(u(t)-u(s))^2 ds d\Gamma dt + \int_S^T \int_{\Gamma_1} b(u')^2 d\Gamma dt \tag{2.1}$$
$$-\frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} k' u^2 d\Gamma dt = E(S) - E(T) \leq E(S).$$

DÉMONSTRATION. Soit $0 \leq S < T < \infty$, On dérive (1.13) par raport à t et on intègre sur $[S, T]$, on obtient

$$E(T) - E(S) = \int_S^T E'(t)dt$$
$$= \int_S^T \int_\Omega (u'u'' + \nabla u . \nabla u')dxdt + \int_S^T \int_{\Gamma_1} kuu' d\Gamma dt$$
$$+\frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} k' u^2 d\Gamma dt - \int_S^T \int_{\Gamma_1} \int_0^t k'(t-s)(u(t)-u(s))u'(t) ds d\Gamma dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''(t-s)(u(t)-u(s))^2 ds d\Gamma dt - \frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1} k'(0)(u(t)-u(t))^2 d\Gamma dt.$$

On remplace u'' par Δu, on utilise la formule de Green et les conditions au bord (1.6), (1.12), on trouve

$$E(T)-E(S) = -\int_S^T\int_{\Gamma_1} b(u')^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1} k'u^2 d\Gamma dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''(t-s)(u(t)-u(s))^2 ds d\Gamma dt$$

$$+\int_S^T\int_{\Gamma_1} uu'(k'-k(0)-\int_0^t k'(t-s)ds)d\Gamma dt,$$

et par suite

$$E(S)-E(T) = \int_S^T\int_{\Gamma_1} b(u')^2 d\Gamma dt \tag{2.2}$$

$$+\frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''(t-s)(u(t)-u(s))^2 ds d\Gamma dt - \frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1} k'u^2 dx dt.$$

D'après (1.2), (1.3), (1.18) et l'égalité (2.2) on constate que E est décroissante. De plus, comme E est positive, alors (2.2) donne aussi (2.1).

LEMME 2.2. *On pose*

$$M := 2m.\nabla u + (n-1)u. \tag{2.3}$$

Alors pour tout $0 \leq S < T < \infty$ *on a*

$$\int_S^T\int_\Omega((u')^2+|\nabla u|^2)dx dt = -[\int_\Omega Mu'dx]_S^T \tag{2.4}$$

$$+\int_S^T\int_{\Gamma_0} m.\nu|\nabla u|^2 d\Gamma dt + \int_S^T\int_{\Gamma_1} m.\nu((u')^2-|\nabla u|^2)d\Gamma dt + \int_S^T\int_{\Gamma_1} M\partial_\nu u d\Gamma dt.$$

DÉMONSTRATION. Soit $0 \leq S < T < \infty$. On multiplie l'équation (1.5) par $(n-1)u$, on intègre sur $[S,T]\times\Omega$, on utilise la condition (1.6) et on obtient

$$(1-n)\int_S^T\int_\Omega((u')^2-|\nabla u|^2)dx dt \tag{2.5}$$

$$= (n-1)\int_S^T\int_{\Gamma_1} u\partial_\nu u d\Gamma dt - (n-1)[\int_\Omega uu'dx]_S^T.$$

D'autre part, on multiplie (1.5) par $2m.\nabla u$, on intègre sur $[S,T]\times\Omega$ et on utilise l'identité de Rellich

$$2\int_\Omega (m.\nabla u)\Delta u dx = (n-2)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + 2\int_\Gamma (m.\nabla u)\partial_\nu u d\Gamma - \int_\Gamma m.\nu|\nabla u|^2 d\Gamma,$$

on obtient

$$\int_S^T\int_\Omega (n(u')^2-(n-2)|\nabla u|^2)dxdt \tag{2.6}$$

$$= -2[\int_\Omega u'(m.\nabla u)dx]_S^T + 2\int_S^T\int_{\Gamma_1}\partial_\nu u(m.\nabla u)d\Gamma dt$$

$$+\int_S^T\int_{\Gamma_1} m.\nu((u')^2-|\nabla u|^2)d\Gamma dt + \int_S^T\int_{\Gamma_0}(2\partial_\nu u(m.\nabla u)-m.\nu|\nabla u|^2)d\Gamma dt.$$

Or

$$u=0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \Longrightarrow \nabla u = \partial_\nu u\nu \quad \text{sur} \quad \Gamma_0,$$

donc la dernière intégrale dans (2.6) est égale à

$$\int_S^T\int_{\Gamma_0} m.\nu|\nabla u|^2 dxdt,$$

et par conséquent la somme de (2.5) et (2.6) donne (2.4).

LEMME 2.3. *On a*

$$\int_S^T\int_\Omega ((u')^2+|\nabla u|^2)dxdt \tag{2.7}$$

$$\le cE(S) + \frac{R^2}{\delta}\int_S^T\int_{\Gamma_1}(\partial_\nu u)^2 d\Gamma dt + (n-1)\int_S^T\int_{\Gamma_1}\partial_\nu u u d\Gamma dt$$

pour tout $0\le S<T<\infty$.

A partir de ce lemme, c désigne une constante positive ne dépendant pas de (u_0,u_1).

DÉMONSTRATION. D'après la définition (1.13) de l'énergie et la condition (1.15) on a

$$\Big|\int_\Omega Mu'dx\Big| \le cE(t),$$

par la décroissance de E on obtient

$$-[\int_\Omega Mu'dx]_S^T \le cE(S).$$

Les propriétés (1.18) et (2.1) impliquent que

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} m.\nu (u')^2 d\Gamma dt \leq \frac{R}{\beta} \int_S^T \int_{\Gamma_1} b(u')^2 d\Gamma dt \leq \frac{R}{\beta} E(S).$$

D'autre part, par l'inégalité de Young on trouve

$$2\int_S^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u (m.\nabla u) d\Gamma dt \leq \delta \int_S^T \int_{\Gamma_1} |\nabla u|^2 d\Gamma dt + \frac{R^2}{\delta} \int_S^T \int_{\Gamma_1} (\partial_\nu u)^2 d\Gamma dt.$$

En remplaçant ces dernières inégalités dans (2.4) et en utilisant (1.16)-(1.17), on obtient (2.7).

LEMME 2.4. *On pose*

$$\gamma := \gamma(x) = \frac{\lambda}{k(0)} \quad et \quad \lambda > \max\{\frac{n-1}{2}, \frac{R^2}{\delta}\|k(0)\|_{L^\infty(\Gamma_1)}\}. \tag{2.8}$$

Alors on a

$$\int_S^T E(t)dt \leq cE(S) + \tag{2.9}$$

$$+(\frac{1}{2} - \lambda) \int_S^T \int_{\Gamma_1} k(0) u^2 d\Gamma dt + 2\int_S^T \int_{\Gamma_1} \gamma \Big(\int_0^t k'(t-s)u(s)ds\Big)^2 d\Gamma dt$$

pour tout $0 \leq S < T < \infty$.

DÉMONSTRATION. D'après (2.8) et la condition (1.12) on a

$$\frac{R^2}{\delta}(\partial_\nu u)^2 + (n-1)u\partial_\nu u \tag{2.10}$$

$$\leq \gamma((\partial_\nu u + k(0)u)^2 - k^2(0)u^2) + (n-1-2\gamma k(0))u\partial_\nu u$$

$$\leq \gamma\Big(bu' + \int_0^t k'(t-s)u(s)ds\Big)^2 - \lambda k(0)u^2 + (n-1-2\lambda)u\partial_\nu u$$

$$\leq 2\gamma b^2 (u')^2 + 2\gamma\Big(\int_0^t k'(t-s)u(s)ds\Big)^2 - \lambda k(0)u^2 + (n-1-2\lambda)u\partial_\nu u.$$

Or (1.18) et (2.1) impliquent que

$$2\int_S^T \int_{\Gamma_1} \gamma b^2 (u')^2 d\Gamma dt \leq c\int_S^T \int_{\Gamma_1} b(u')^2 d\Gamma dt \leq cE(S).$$

Donc on intégre l'inégalité (2.10) sur $\Gamma_1 \times [S,T]$, on utilise l'inégalité précédente et on conclut, d'après (2.7), que

$$(2.11) \qquad \int_S^T \int_\Omega ((u')^2 + |\nabla u|^2) dx dt \leq cE(S) - \lambda \int_S^T \int_{\Gamma_1} k(0) u^2 d\Gamma dt +$$

$$+2 \int_S^T \int_{\Gamma_1} \gamma \Big(\int_0^t k'(t-s) u(s) ds \Big)^2 d\Gamma dt + (n-1-2\lambda) \int_S^T \int_{\Gamma_1} u \partial_\nu u d\Gamma dt.$$

D'autre part, d'après (1.3) et (2.1) on a

$$-\frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Gamma_1} \int_0^t k'(t-s)(u(t)-u(s))^2 ds d\Gamma dt$$

$$\leq \frac{\alpha}{2} \int_S^T \int_{\Gamma_1} \int_0^t k''(t-s)(u(t)-u(s))^2 ds d\Gamma dt \leq \alpha E(S),$$

et (1.2) donne

$$\frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Gamma_1} k u^2 d\Gamma dt \leq \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Gamma_1} k(0) u^2 d\Gamma dt.$$

Par la définition (1.13) de l'énergie et ces deux dernières inégalités on conclut, d'après (2.11), que

$$(2.12) \qquad \int_S^T E(t) dt + \frac{1}{2} \int_S^T \int_\Omega (u')^2 dx dt \leq cE(S) + (\frac{1}{2} - \lambda) \int_S^T \int_{\Gamma_1} k(0) u^2 d\Gamma dt$$

$$+2 \int_S^T \int_{\Gamma_1} \gamma \Big(\int_0^t k'(t-s) u(s) ds \Big)^2 d\Gamma dt + (n-1-2\lambda) \int_S^T \int_{\Gamma_1} u \partial_\nu u d\Gamma dt.$$

Pour conclure (2.9) d'après (2.12) il suffit de choisir $\epsilon > 0$ tel que $(2\lambda + 1 - n)\epsilon = \frac{1}{2}$ dans le lemme suivant:

LEMME 2.5. *Soit $0 \leq S < T < \infty$. Pour tout $\epsilon > 0$ on a l'estimation*

$$(2.13) \qquad -\int_S^T \int_{\Gamma_1} u \partial_\nu u d\Gamma dt \leq \epsilon \int_S^T \int_\Omega (u')^2 dx dt + c(\epsilon) E(S).$$

DÉMONSTRATION. On utilise la méthode introduite par F. Conrad et B. Rao [1]. On note par φ la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ \varphi = u & \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases}$$

La fonction φ vérifie

$$\int_\Omega \nabla\varphi\nabla u dx = \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx \geq 0 \tag{2.14}$$

et il existe une constante $c' > 0$ telle que

$$\int_\Omega \varphi^2 dx \leq c' \int_\Gamma u^2 d\Gamma. \tag{2.15}$$

De même pour φ' on a

$$\int_\Omega (\varphi')^2 dx \leq c' \int_\Gamma (u')^2 d\Gamma. \tag{2.16}$$

On multiplie (1.5) par φ et on intègre sur $\Omega \times [S,T]$, on obtient

$$-\int_S^T \int_\Gamma \varphi\partial_\nu u d\Gamma dt = -\int_S^T \int_\Omega \nabla\varphi\nabla u dx dt + \int_S^T \int_\Omega \varphi' u' dx dt - [\int_\Omega \varphi u' dx]_S^T,$$

on utilise (2.14) et les condition au bord sur φ, u on trouve

$$-\int_S^T \int_{\Gamma_1} u\partial_\nu u d\Gamma dt \leq \int_S^T \int_\Omega \varphi' u' dx dt - [\int_\Omega \varphi u' dx]_S^T. \tag{2.17}$$

D'après (2.15) et la définition de l'énergie on a

$$\left|\int_\Omega \varphi u' dx\right| \leq \frac{1}{2}\int_\Omega (u')^2 dx + \frac{c'}{2}\int_{\Gamma_1} u^2 d\Gamma \leq cE(t),$$

et par suite, utilisant la décroissance de E,

$$-[\int_\Omega \varphi u' dx]_S^T \leq cE(S).$$

D'après (1.6), (2.1) et (2.16) on a pour $\epsilon > 0$

$$\int_S^T \int_\Omega \varphi' u' dx dt \leq \epsilon \int_S^T \int_\Omega (u')^2 dx dt + \frac{1}{4\epsilon}\int_S^T \int_\Omega (\varphi')^2 dx dt$$

$$\leq \epsilon \int_S^T \int_\Omega (u')^2 dx dt + c(\epsilon)\int_S^T \int_{\Gamma_1} (u')^2 d\Gamma dt \leq \epsilon \int_S^T \int_\Omega (u')^2 dx dt + c(\epsilon)E(S).$$

Donc on remplace par ces deux dernières inégalités dans (2.17) et on obtient (2.13).

On va maintenant majorer la dernière intégrale dans (2.9). On a le lemme suivant:

LEMME 2.6. *Soit $\epsilon > 0$ vérifiant*

$$\epsilon \inf_{\Gamma_1} k'(0) + 1 > 0. \tag{2.18}$$

Alors pour tout $0 \leq S < T < \infty$ on a

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} \gamma\Big(\int_0^t k'(t-s)u(s)ds\Big)^2 d\Gamma dt \leq cE(S) + \frac{\lambda}{\epsilon\alpha}\int_S^T \int_{\Gamma_1} u^2 d\Gamma dt. \tag{2.19}$$

DÉMONSTRATION. Soit $\epsilon > 0$ vérifiant (2.18). On pose

$$h := h(x) = \frac{k(0)}{\alpha(1+\epsilon k'(0))} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1, \tag{2.20}$$

la condition (2.18) implique que $h \geq 0$, de plus $h \in L^\infty(\Gamma_1)$. On pose

$$I = \Big(\int_0^t k'(t-s)u(s)ds\Big)^2 - h\int_0^t k''(s)((u(t)-u(s))^2 ds + hk'u^2. \tag{2.21}$$

On a

$$\begin{aligned} I \leq & \Big(\int_0^t -k'(t-s)ds\Big)\Big(\int_0^t -k'(t-s)u^2(s)ds\Big) - h\int_0^t k''(t-s)u^2(s)ds + \\ & +2hu\int_0^t k''(t-s)u(s)ds + hk'(0)u^2 - hk'u^2 + hk'u^2 \\ \leq & (k-k(0))\int_0^t k'(t-s)u^2(s)ds - h\int_0^t k''(t-s)u^2(s)ds \\ & +h(k'(0)+\frac{1}{\epsilon})u^2 + \epsilon h\Big(\int_0^t k''(t-s)u(s)ds\Big)^2. \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Hölder sur la dérnière intégrale et on remarque que

$$k\int_0^t k'(t-s)u^2(s)ds \leq 0 \quad \text{et} \quad \epsilon hk'\int_0^t k''(t-s)u^2(s)ds \leq 0$$

on obtient (on utilise aussi (1.3))

$$I \leq (\frac{1}{\alpha}k(0) - h(1+\epsilon k'(0)))\int_0^t k''(t-s)u^2(s)ds + h(k'(0)+\frac{1}{\epsilon})u^2.$$

D'après la définition (2.20) de h on constate que

$$I \leq \frac{1}{\epsilon\alpha}k(0)u^2. \tag{2.22}$$

Comme $h \in L^\infty(\Gamma_1)$, alors on multiplie (2.22) par γ, on intégre sur $\Gamma_1 \times [S,T]$, on utilise la définition (2.21) de I et la propriété (2.1) et on déduit (2.19).

Les estimations (2.9) et (2.19) impliquent, pour tout $0 \leq S < T < \infty$,

$$\int_S^T E(t)dt \leq cE(S) + \int_S^T \int_{\Gamma_1} ((\frac{1}{2} - \lambda)k(0) + \frac{2\lambda}{\epsilon\alpha})u^2 d\Gamma dt. \tag{2.23}$$

La condition (1.19) implique qu'il existe $\epsilon' > 0$ tel que $\alpha \inf_{\Gamma_1} k(0) \geq -(2+\epsilon') \inf_{\Gamma_1} k'(0)$, on choisit $\epsilon > 0$ tel que $-\epsilon \inf_{\Gamma_1} k'(0) = \dfrac{\epsilon' + 4}{2(\epsilon' + 2)}$ (remarquer que ϵ vérifie (2.18)). On a

$$(\frac{1}{2} - \lambda)k(0) + \frac{2\lambda}{\epsilon\alpha} = \frac{\lambda}{\epsilon\alpha}(2 - \epsilon\alpha k(0)) + \frac{1}{2}k(0)$$

$$\leq \frac{\lambda}{\epsilon\alpha}(2 + \epsilon(2+\epsilon')\inf_{\Gamma_1} k'(0)) + \frac{1}{2}k(0) = -\frac{\epsilon'}{2\epsilon\alpha}\lambda + \frac{1}{2}k(0).$$

Et par suite, on choisit $\lambda = \max\{n-1, (\frac{R^2}{\delta} + \frac{\epsilon\alpha}{\epsilon'})\|k(0)\|_{L^\infty(\Gamma_1)}\}$ (remarquer que (2.8) est vérifié) et on trouve

$$(\frac{1}{2} - \lambda)k(0) + \frac{2\lambda}{\epsilon\alpha} \leq 0.$$

Donc on conclut, d'après (2.23), que pour tout $0 \leq S < T < \infty$ on a

$$\int_S^T E(t)dt \leq cE(S). \tag{2.24}$$

Le lemme 2.1 et l'estimation (2.24) montrent que $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante et vérifie

$$\int_t^\infty E(s)ds \leq cE(t) \quad \forall t \geq 0,$$

alors on déduit l'estimation (1.20) par l'application de la proposition suivante

PROPOSITION 2.7 (V. KOMORNIK [2]). *Soit $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante et on suppose qu'il existe une constante $T > 0$ telle que*

$$\int_t^\infty E(s)ds \leq TE(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Alors on a

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\frac{1}{T}t} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

La démonstration du théorème 1.2 est terminée.

Références

[1] F. Conrad and B. Rao, Decay of solutions of the wave equation in a star- shaped domain with nonlinear boundary feedback, Asymptotic Anal. 7(1993), 159-177.

[2] V. Komornik, Decay estimates for the wave equation with internal damping, Proceedings of the conference on Control Theory, Vorau 1993, International Series Num. Analysis, vol. 118, Birkhauser Verlag, Basel, (1994), 253-266.

[3] V. Komornik and E. Zuazua, A direct method for the boundary stabilization of the wave equation, J. Math. Pures Appl. 69(1990), 33-54.

[4] J. E. Muñoz Rivera, Global solution on a quasilinear wave equation with Memory, Bollettino U. M. I., (7) 8-B (1994), 289-303.

[5] G. Propst and J. Prüss, On the wave equations with boundary dissipation of Memory Type, J. Inte. Equa. and Appl. 8(1996), 99-123.

[6] H. Tadayuki and M. Rinko, Equivalent condition for stability of a Volterra integro-differential equation, J. Math. Anal. and Appl. 174(1993), 298-316.

[7] E. Zuazua, Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems, Asymptotic Analysis, 1, (1988), 161-185.