Estimations de la vitesse de propagation des photons et complétude asymptotique en QED non relativiste

Jérémy Faupin

Institut de Mathématiques de Bordeaux
Université de Bordeaux 1

J-F Bony, J F, J. Funct. Anal., 262, 850-888, (2012)
J-F Bony, J F, IM Sigal, Adv. Math., 231, 3054-3078, (2012)
J F, IM Sigal, arXiv:1202.6151

Plan de l'exposé

1. Opérateur de Schrödinger relativiste
2. Modèle standard en QED non relativiste
3. Résultats
   - Vitesse maximale
   - Vitesse minimale
   - Complétude asymptotique

Partie I

Opérateur de Schrödinger relativiste

Opérateur de Schrödinger relativiste

Opérateur de Schrödinger relativiste

$$H = \sqrt{-\Delta_y} + V(y), \quad V \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$$

- H auto-adjoint avec domaine $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(\sqrt{-\Delta})$
- $\sigma_{\mathrm{pp}}(H) \subset]-\infty, 0[$, $\sigma_{\mathrm{ac}}(H) = [0, +\infty[$, $\sigma_{\mathrm{sc}}(H) = \emptyset$
- Représentation impulsion : $H = |k| + V(\mathrm{i}\nabla_k)$

Fonctions de localisation

- Soient $f \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R};[0,1])$ telle que $\mathrm{supp}(f) \subset [1,2]$ et $F(s) = \int_{-\infty}^s f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. On note

$$F(\cdot \geq \mathrm{c}) := F(\cdot/\mathrm{c})$$

- On définit de même les fonctions

$$F(\cdot \leq \mathrm{c}) \quad \text{et} \quad F(\cdot \approx \mathrm{c})$$

Opérateur de Schrödinger relativiste

Opérateur de Schrödinger relativiste

$$H = \sqrt{-\Delta_y} + V(y), \quad V \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$$

- H auto-adjoint avec domaine $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(\sqrt{-\Delta})$
- $\sigma_{\mathrm{pp}}(H) \subset]-\infty, 0[$, $\sigma_{\mathrm{ac}}(H) = [0, +\infty[$, $\sigma_{\mathrm{sc}}(H) = \emptyset$
- Représentation impulsion : $H = |k| + V(\mathrm{i}\nabla_k)$

Fonctions de localisation

- Soient $f \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R};[0,1])$ telle que $\mathrm{supp}(f) \subset [1,2]$ et $F(s) = \int_{-\infty}^s f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. On note

$$F(\cdot \geq \mathrm{c}) := F(\cdot/\mathrm{c})$$

- On définit de même les fonctions

$$F(\cdot \leq \mathrm{c}) \quad \text{et} \quad F(\cdot \approx \mathrm{c})$$

Estimations de propagation

$$\psi_t = e^{-\mathrm{i}tH}\psi_0$$

Estimation de vitesse maximale

Soient $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathrm{c} > 1$. Pour tout $\psi_0 \in \chi(H)\mathcal{D}(|y|^{1/2})$,

$$\left\| F(|y| \geq \mathrm{c}t)^{\frac{1}{2}}\psi_t \right\| \lesssim t^{-\gamma} \|(|y|+1)^{\frac{1}{2}}\psi_0\|$$

Estimations de vitesse minimale

Soient $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ et $0 < \mathrm{c} < 1$. Pour tout $\psi_0 \in \chi(H)\mathcal{D}(|k|^{-1/2})$,

$$\int_1^\infty t^{-1} \left\| F(|y| \approx \mathrm{c}t)^{\frac{1}{2}}\psi_t \right\|^2 \mathrm{d}t \lesssim \|(|k|^{-1}+1)^{\frac{1}{2}}\psi_0\|^2$$

De plus, si $\mathrm{supp}(\chi) \subset]0, +\infty[$, alors pour tous $\beta < 1$, $\mathrm{c} > 0$ et $\psi_0 \in \chi(H)\mathcal{D}(|y|)$,

$$\left\| F(|y| \leq \mathrm{c}t^{\beta})^{\frac{1}{2}}\psi_t \right\| \lesssim t^{-\delta} \|(|y|+1)\psi_0\|$$

Estimations de propagation

$$\psi_t = e^{-\mathrm{i}tH}\psi_0$$

Estimation de vitesse maximale

Soient $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathrm{c} > 1$. Pour tout $\psi_0 \in \chi(H)\mathcal{D}(|y|^{1/2})$,

$$\left\| F(|y| \geq \mathrm{c}t)^{\frac{1}{2}} \psi_t \right\| \lesssim t^{-\gamma} \|(|y|+1)^{\frac{1}{2}}\psi_0\|$$

Estimations de vitesse minimale

Soient $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ et $0 < \mathrm{c} < 1$. Pour tout $\psi_0 \in \chi(H)\mathcal{D}(|k|^{-1/2})$,

$$\int_1^\infty t^{-1} \left\| F(|y| \approx \mathrm{c}t)^{\frac{1}{2}} \psi_t \right\|^2 \mathrm{d}t \lesssim \|(|k|^{-1}+1)^{\frac{1}{2}}\psi_0\|^2$$

De plus, si $\mathrm{supp}(\chi) \subset]0, +\infty[$, alors pour tous $\beta < 1$, $\mathrm{c} > 0$ et $\psi_0 \in \chi(H)\mathcal{D}(|y|)$,

$$\left\| F(|y| \leq \mathrm{c}t^{\beta})^{\frac{1}{2}} \psi_t \right\| \lesssim t^{-\delta} \|(|y|+1)\psi_0\|$$

Méthode des observables de propagation (I)

Dérivée de Heisenberg

Soit Φ_t une famille d'observables. On note

$$D\Phi_t = \partial_t \Phi_t - \mathrm{i}[\Phi_t, H], \quad \text{d'où} \quad \partial_t \langle \psi_t, \Phi_t \psi_t \rangle = \langle \psi_t, D\Phi_t \psi_t \rangle$$

Estimation de propagation forte

On suppose $\Phi_t \geq 0$,

$$D\Phi_t \leq -G_t + \mathrm{R}_t, \quad G_t \geq 0,$$

et

$$\int_0^\infty |\langle \psi_t, \mathrm{R}_t\, \psi_t \rangle| \mathrm{d}t \lesssim \|\psi_0\|_*^2$$

Alors

$$\langle \psi_t, \Phi_t \psi_t \rangle + \int_0^\infty \langle \psi_t, G_t \psi_t \rangle \, \mathrm{d}t \lesssim \|\psi_0\|_*^2 + \langle \psi_0, \Phi_0 \psi_0 \rangle$$

Méthode des observables de propagation (I)

Dérivée de Heisenberg

Soit Φ_t une famille d'observables. On note

$$D\Phi_t = \partial_t \Phi_t - \mathrm{i}[\Phi_t, H], \quad \text{d'où} \quad \partial_t \langle \psi_t, \Phi_t \psi_t \rangle = \langle \psi_t, D\Phi_t \psi_t \rangle$$

Estimation de propagation forte

On suppose $\Phi_t \geq 0$,

$$D\Phi_t \leq -G_t + \mathrm{R}_t, \quad G_t \geq 0,$$

et

$$\int_0^\infty |\langle \psi_t, \mathrm{R}_t \, \psi_t \rangle| \mathrm{d}t \lesssim \|\psi_0\|_*^2$$

Alors

$$\langle \psi_t, \Phi_t \psi_t \rangle + \int_0^\infty \langle \psi_t, G_t \psi_t \rangle \, \mathrm{d}t \lesssim \|\psi_0\|_*^2 + \langle \psi_0, \Phi_0 \psi_0 \rangle$$

Méthode des observables de propagation (II)

Estimation de propagation faible

On suppose $\sup_t |\langle \psi_t, \Phi_t \psi_t \rangle| \lesssim \|\psi_0\|_{**}^2$,

$$D\Phi_t \geq G_t + \mathrm{R}_t, \quad G_t \geq 0,$$

et

$$\int_0^\infty |\langle \psi_t, \mathrm{R}_t \, \psi_t \rangle| \mathrm{d}t \lesssim \|\psi_0\|_*^2$$

Alors

$$\int_0^\infty \langle \psi_t, G_t \psi_t \rangle \, \mathrm{d}t \lesssim \|\psi_0\|_*^2 + \|\psi_0\|_{**}^2$$

Estimation de vitesse maximale (I)

$$\left\| F(|y| \geq \mathrm{c}t)^{\frac{1}{2}} \psi_t \right\| \lesssim t^{-\gamma} \| (\langle y \rangle + 1)^{\frac{1}{2}} \psi_0 \|$$

Observable

Soient $J_\beta(s) = s^\beta F(s^{1/2})$, et

$$\Phi_t = t^{2\gamma} J_\beta(y^2/\mathrm{c}^2 t^2)$$

$(\beta \leq \beta_c)$

Dérivée de Heisenberg

$$\begin{aligned} D\Phi_t &= \partial_t \Phi_t - \mathrm{i}[\Phi_t, H] \\ &= 2t^{2\gamma-1}\Big(\gamma J_\beta(\frac{y^2}{\mathrm{c}^2 t^2}) - \frac{y^2}{\mathrm{c}^2 t^2} J_\beta'(\frac{y^2}{\mathrm{c}^2 t^2})\Big) - t^{2\gamma}\Big[J_\beta(\frac{y^2}{\mathrm{c}^2 t^2}), \mathrm{i}|k|\Big] \end{aligned}$$

Estimation de vitesse maximale (I)

$$\left\| F(|y| \geq \mathrm{c}t)^{\frac{1}{2}} \psi_t \right\| \lesssim t^{-\gamma} \|(\langle y \rangle + 1)^{\frac{1}{2}} \psi_0\|$$

Observable

Soient $J_\beta(s) = s^\beta F(s^{1/2})$, et

$$\Phi_t = t^{2\gamma} J_\beta(y^2/\mathrm{c}^2 t^2)$$

$(\beta \leq \beta_c)$

Dérivée de Heisenberg

$$\begin{aligned} D\Phi_t &= \partial_t \Phi_t - \mathrm{i}[\Phi_t, H] \\ &= 2t^{2\gamma-1}\Big(\gamma J_\beta(\frac{y^2}{\mathrm{c}^2 t^2}) - \frac{y^2}{\mathrm{c}^2 t^2} J'_\beta(\frac{y^2}{\mathrm{c}^2 t^2})\Big) - t^{2\gamma}\Big[J_\beta(\frac{y^2}{\mathrm{c}^2 t^2}), \mathrm{i}|k|\Big] \end{aligned}$$

Estimation de vitesse maximale (II)

Développement du commutateur

$$\begin{aligned}
&\Big[J_\beta\big(\frac{y^2}{c^2t^2}\big), \mathrm{i}|k|\Big] \\
&= \frac{1}{\pi}\int \frac{\partial \tilde{J}_\beta}{\partial \bar{z}}(z)\Big[(y^2/c^2t^2 - z)^{-1}, \mathrm{i}|k|\Big]\, \mathrm{d}\mathrm{Re}\, z\, \mathrm{d}\mathrm{Im}\, z \\
&= \frac{1}{\pi c^2 t^2}\int \frac{\partial \tilde{J}_\beta}{\partial \bar{z}}(z)(y^2/c^2t^2 - z)^{-1}\Big(y\cdot\frac{k}{|k|} + \frac{k}{|k|}\cdot y\Big) \\
&\qquad (y^2/c^2t^2 - z)^{-1}\, \mathrm{d}\mathrm{Re}\, z\, \mathrm{d}\mathrm{Im}\, z \\
&= \frac{1}{c^2t^2} J'_\beta\big(\frac{y^2}{c^2t^2}\big)^{\frac12}\Big(y\cdot\frac{k}{|k|} + \frac{k}{|k|}\cdot y\Big) J'_\beta\big(\frac{y^2}{c^2t^2}\big)^{\frac12} + \mathcal{R}_t,
\end{aligned}$$

avec

$$\big\| |k|^{\frac12}\mathcal{R}_t|k|^{\frac12}\big\| \lesssim t^{-2}$$

Estimation du commutateur

$$\pm\Big[J_\beta\big(\frac{y^2}{c^2t^2}\big), \mathrm{i}|k|\Big] \le \frac{2}{ct}\frac{y^2}{c^2t^2}J'_\beta\big(\frac{y^2}{c^2t^2}\big) + \mathrm{C}t^{-2}|k|^{-1}$$

Estimation de vitesse maximale (III)

Dérivée de Heisenberg

$$\begin{aligned}
D\Phi_t &= \partial_t \Phi_t - \mathrm{i}[\Phi_t, H] \\
&= 2t^{2\gamma-1}\Big(\gamma J_\beta\big(\frac{y^2}{\mathrm{c}^2 t^2}\big) - \frac{y^2}{\mathrm{c}^2 t^2} J'_\beta\big(\frac{y^2}{\mathrm{c}^2 t^2}\big)\Big) - t^{2\gamma}\Big[J_\beta\big(\frac{y^2}{\mathrm{c}^2 t^2}\big), \mathrm{i}|k|\Big] \\
&\leq 2t^{2\gamma-1}\Big(\gamma J_\beta\big(\frac{y^2}{\mathrm{c}^2 t^2}\big) - \Big(1 - \frac{1}{\mathrm{c}}\Big) \frac{y^2}{\mathrm{c}^2 t^2} J'_\beta\big(\frac{y^2}{\mathrm{c}^2 t^2}\big)\Big) + \mathrm{C} t^{-2+2\gamma} |k|^{-1} \\
&\leq 2t^{2\gamma-1}\Big(\gamma - \Big(1 - \frac{1}{\mathrm{c}}\Big)\beta\Big) J_\beta\big(\frac{y^2}{\mathrm{c}^2 t^2}\big) + \mathrm{C} t^{-2+2\gamma} |k|^{-1} \\
&\leq \mathrm{C} t^{-2+2\gamma} |k|^{-1},
\end{aligned}$$

pour

$$\gamma \leq \Big(1 - \frac{1}{\mathrm{c}}\Big)\beta$$

Estimation de vitesse maximale (IV)

Contrôle de l'évolution de $|k|^{-1}$

D'une part,

$$\langle \psi_t, |k|^{-1} F(|k| \geq t^{-\mu}) \psi_t \rangle \leq t^{2\mu} \langle \psi_t, |k| F(|k| \geq t^{-\mu}) \psi_t \rangle \lesssim t^{2\mu} \|\psi_0\|^2$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\langle \psi_t, |k|^{-1} F(|k| \leq t^{-\mu}) \psi_t \rangle \\
&\lesssim \langle \psi_0, (|k|^{-1} + 1) \psi_0 \rangle + \int_0^t \left| \langle \psi_s, \left[|k|^{-1} F(|k| \leq s^{-\mu}), V(y) \right] \psi_s \rangle \right| \mathrm{d}s \\
&\lesssim \langle \psi_0, (|k|^{-1} + 1) \psi_0 \rangle + \int_1^t s^{-\mu/2+\varepsilon} \|\psi_0\|^2 \mathrm{d}s \\
&\lesssim \||k|^{-\frac{1}{2}} \psi_0\|^2 + t^{1-\mu/2+\varepsilon} \|\psi_0\|^2
\end{aligned}$$

Conclusion : $\langle \psi_t, |k|^{-1} \psi_t \rangle$ croît moins vite que linéairement

Estimation de vitesse maximale (V)

Dérivée de Heisenberg

$$\langle \psi_t, D\Phi_t \psi_t \rangle \leq \mathrm{C} t^{-2+2\gamma} \langle \psi_t, |k|^{-1} \psi_t \rangle$$

Intégrable pour γ pas trop grand

Conclusion

$$t^{2\gamma} \langle \psi_t, F(|y| \geq \mathrm{c}t) \psi_t \rangle \leq \langle \psi_t, \Phi_t \psi_t \rangle \lesssim \|\psi_0\|_*^2$$

Partie II

Modèle standard de la QED non relativiste

Le modèle

Système physique

- Système atomique non relativiste (N particules quantiques, chargées, non relativistes)
- En interaction avec le champ électromagnétique quantifié

Système atomique

- Système le plus simple : atome d'hydrogène avec noyau infiniment lourd
- Opérateur de Schrödinger associé dans $\mathcal{H}_{\mathrm{el}} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$

$$H_{\mathrm{el}} = -\Delta_x + V(x),$$

où $V \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, et $\|V(x)\psi\| \leq \varepsilon \|\Delta_x \psi\| + C_\varepsilon \|\psi\|$. Par exemple

$$V(x) = -\frac{C}{|x|}$$

Le modèle

Système physique

- Système atomique non relativiste (N particules quantiques, chargées, non relativistes)
- En interaction avec le champ électromagnétique quantifié

Système atomique

- Système le plus simple : atome d'hydrogène avec noyau infiniment lourd
- Opérateur de Schrödinger associé dans $\mathcal{H}_{\mathrm{el}} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$

$$H_{\mathrm{el}} = -\Delta_x + V(x),$$

où $V \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$, et $\|V(x)\psi\| \leq \varepsilon\|\Delta_x\psi\| + C_\varepsilon\|\psi\|$. Par exemple

$$V(x) = -\frac{C}{|x|}$$

Espace de Fock (I)

Espace de Hilbert pour le champ de photons

- Espace de Hilbert pour 1 photon : $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$
- Espace de Fock symétrique pour le champ de photons :

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ph}} = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \mathcal{F}_s^{(n)} = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})^{\otimes_s^n}$$

$$\Psi = (\underbrace{\Psi^{(0)}}_{\in \mathbb{C}}, \underbrace{\Psi^{(1)}(K_1)}_{\in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})}, \underbrace{\Psi^{(2)}(K_1, K_2)}_{\in \mathrm{L}^2((\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})^2)}, \dots) \in \mathcal{H}_{\mathrm{ph}}$$

Opérateurs de création et d'annihilation

Pour $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$,

$$(a^*(f)\Psi)^{(n)}(K_1, \cdots, K_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} f(K_i) \Psi^{(n-1)}(K_1, \cdots, \hat{K}_i, \cdots, K_n)$$

$$(a(f)\Psi)^{(n)}(K_1, \cdots, K_n) = \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{R}^3 \times \{1,2\}} \bar{f}(K) \Psi^{(n+1)}(K, K_1, \cdots, K_n) \mathrm{d}K$$

Espace de Fock (I)

Espace de Hilbert pour le champ de photons

- Espace de Hilbert pour 1 photon : $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$
- Espace de Fock symétrique pour le champ de photons :

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ph}} = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \mathcal{F}_s^{(n)} = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})^{\otimes_s^n}$$

$$\Psi = (\underbrace{\Psi^{(0)}}_{\in\mathbb{C}}, \underbrace{\Psi^{(1)}(K_1)}_{\in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3\times\{1,2\})}, \underbrace{\Psi^{(2)}(K_1,K_2)}_{\in \mathrm{L}^2((\mathbb{R}^3\times\{1,2\})^2)}, \dots) \in \mathcal{H}_{\mathrm{ph}}$$

Opérateurs de création et d'annihilation

Pour $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$,

$$(a^*(f)\Psi)^{(n)}(K_1,\cdots,K_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} f(K_i)\Psi^{(n-1)}(K_1,\cdots,\hat{K}_i,\cdots,K_n)$$

$$(a(f)\Psi)^{(n)}(K_1,\cdots,K_n) = \sqrt{n+1}\int_{\mathbb{R}^3\times\{1,2\}} \bar{f}(K)\Psi^{(n+1)}(K,K_1,\cdots,K_n)\mathrm{d}K$$

Espace de Fock (II)

Opérateurs de champ

$$\Phi(f) = a^*(f) + a(f)$$

Opérateurs second quantifiés

Soit b un opérateur sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$. La seconde quantification de b est l'opérateur sur $\mathcal{H}_{\mathrm{ph}}$ défini par

$$\mathrm{d}\Gamma(b)|_{\mathcal{F}_s^{(n)}} = b \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes b \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} + \cdots + \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes b$$

$$\mathrm{d}\Gamma(b)\,\Omega = 0$$

où $\Omega = (1, 0, 0, \cdots)$ (vide)

Espace de Fock (II)

Opérateurs de champ

$$\Phi(f) = a^*(f) + a(f)$$

Opérateurs second quantifiés

Soit b un opérateur sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$. La seconde quantification de b est l'opérateur sur $\mathcal{H}_{\mathrm{ph}}$ défini par

$$\mathrm{d}\Gamma(b)|_{\mathcal{F}_s^{(n)}} = b \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes b \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} + \cdots + \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes b$$

$$\mathrm{d}\Gamma(b)\,\Omega = 0$$

où $\Omega = (1, 0, 0, \cdots)$ (vide)

Modèle standard de la QED non relativiste

Espace de Hilbert pour le système total (électron+champ de photons)

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{el}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{ph}} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}x) \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{ph}}$$

Hamiltonien de Pauli-Fierz agissant dans $\mathcal{H}$

$$H = \left(-\mathrm{i}\vec{\nabla}_x \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathrm{ph}}} - \alpha^{\frac{3}{2}} \vec{A}(\alpha x)\right)^2 + \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{el}} \otimes H_f + V(x) \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathrm{ph}}}$$

où

$$H_f = \mathrm{d}\Gamma(\omega), \quad \omega(k) = |k|,$$

$$\vec{A}_j(x) = \Phi(h_j(x)), \quad h_j(x,k,\lambda) = e^{\mathrm{i}k\cdot x}\chi(k)|k|^{-\frac{1}{2}}(\vec{\varepsilon}_\lambda(k))_j$$

Spectre, Seuil d'ionisation

Spectre ([Bach,Fröhlich,Sigal '99], [Griesemer,Lieb,Loss '01])

Sous une hypothèse de règle d'or de Fermi et pour couplage suffisamment petit, H possède une valeur propre simple E_{gs} au bas du spectre (associé à un état fondamental Φ_{gs}), et le spectre est absolument continu dans l'intervalle $(E_{\mathrm{gs}}, \Sigma)$

Seuil d'ionisation

Défini par

$$\Sigma = \lim_{R \to \infty} \inf_{\varphi \in D_R, \|\varphi\|=1} \langle \varphi, H\varphi \rangle,$$

où $D_R = \{\varphi \in \mathcal{D}(H);\ \varphi(x) = 0 \text{ si } |x| < R\}$

Décroissance exponentielle ([Bach,Fröhlich,Sigal '99], [Griesemer '02])

Pour tout $\delta, \xi \in \mathbb{R}$ tel que $\xi + \delta^2 < \Sigma$,

$$\left\| e^{\delta|x|} E_{(-\infty,\xi]}(H) \right\| < \infty$$

Dynamique

Equation de Schrödinger

On s'intéresse à la dynamique associée à l'équation de Schrödinger

$$\mathrm{i}\partial_t \psi_t = H\psi_t$$

Etats initiaux

On considère des états initiaux en dessous du seuil d'ionisation,

$$\psi_0 \in \mathrm{Ran}\, E_{(-\infty,\Sigma)}(H)$$

(Processus d'absorption et d'émission de photons, l'atome restant non ionisé)

Objectif

On souhaite étudier le comportement asymptotique lorsque $t \to +\infty$ de la dynamique associée au modèle

Résultats connus

Hamiltoniens avec une forme explicite

Arai '83, Spohn '97, Derezinski '04

Modèles massifs ou avec troncature infrarouge

Derezinski-Gérard '99, Fröhlich-Griesemer-Schlein '02

Résultats pour des modèles non massifs

Gérard '02

Retour à l'équilibre et borne uniforme sur le nombre de photons émis pour le modèle spin-bosons

De Roeck-Kupiainen '12

Opérateur de Schrödinger relativiste

Modèle standard en QED non relativiste

Résultats

Vitesse maximale

Vitesse minimale

Complétude asymptotique

Partie III

Résultats

III.1

Vitesse maximale

Vitesse maximale des photons

Théorème ([Bony,F,Sigal])

Soient $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(]-\infty,\Sigma[)$ et $\mathrm{c} > 1$. Pour tout $\psi_0 \in \chi(H)\mathcal{D}(\mathrm{d}\Gamma(\langle y \rangle)^{1/2})$,

$$\left\| \mathrm{d}\Gamma\big(F(|y| \geq \mathrm{c}t)\big)^{\frac{1}{2}} \psi_t \right\| \lesssim t^{-\gamma} \|(\mathrm{d}\Gamma(\langle y \rangle) + 1)^{\frac{1}{2}} \psi_0\|$$

Elements de preuve

- Transformation de Pauli-Fierz généralisée
- Versions second quantifiées des commutateurs/estimations précédentes
- Opérateurs de champ = termes de reste (intégrable)
- Décroissance exponentielle en dessous du seuil d'ionisation
- Contrôle de $\mathrm{d}\Gamma(|k|^{-\delta})$ le long de l'évolution

Vitesse maximale des photons

Théorème ([Bony,F,Sigal])

Soient $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(]-\infty,\Sigma[)$ et $\mathrm{c} > 1$. Pour tout $\psi_0 \in \chi(H)\mathcal{D}(\mathrm{d}\Gamma(\langle y \rangle)^{1/2})$,

$$\left\| \mathrm{d}\Gamma\big(F(|y| \geq \mathrm{c}t)\big)^{\frac{1}{2}}\psi_t \right\| \lesssim t^{-\gamma} \| (\mathrm{d}\Gamma(\langle y \rangle) + 1)^{\frac{1}{2}}\psi_0 \|$$

Elements de preuve

- Transformation de Pauli-Fierz généralisée
- Versions second quantifiées des commutateurs/estimations précédentes
- Opérateurs de champ $=$ termes de reste (intégrable)
- Décroissance exponentielle en dessous du seuil d'ionisation
- Contrôle de $\mathrm{d}\Gamma(|k|^{-\delta})$ le long de l'évolution

III.2

Vitesse minimale

Décroissance de l'énergie locale à basses énergies

Résultats préliminaires

- Inégalité de Mourre ([Fröhlich,Griesemer,Sigal '08])

$$\mathbb{1}_{J_\sigma}(H)[H, \mathrm{i}B_\sigma]\mathbb{1}_{J_\sigma}(H) \geq \mathrm{c}_0\sigma\mathbb{1}_{J_\sigma}(H)$$

  avec B_σ générateur des dilatations dans l'espace de Fock, restreint aux basses énergies

- [Hunziker,Sigal,Soffer '00] implique, pour $\chi_\sigma \in \mathrm{C}_0^\infty(J_\sigma)$,

$$\left\| \langle B_\sigma \rangle^{-s} e^{-\mathrm{i}tH} \chi_\sigma(H) \langle B_\sigma \rangle^{-s} \right\| \lesssim \langle \sigma t \rangle^{-s}$$

Décroissance de l'énergie locale uniforme à basses énergies

Théorème ([Bony,F])

Pour tous $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$, $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(]-\infty, e_1 - \delta[;\mathbb{R})$, $0 \leq s < 2$, et $t \in \mathbb{R}$,

$$\langle \mathrm{d}\Gamma(|y|)\rangle^{-s} e^{-\mathrm{i}tH} \chi(H) \langle \mathrm{d}\Gamma(|y|)\rangle^{-s}$$
$$= e^{-\mathrm{i}tE_{\mathrm{gs}}} \chi(E_{\mathrm{gs}}) \langle \mathrm{d}\Gamma(|y|)\rangle^{-s} \Pi_{\mathrm{gs}} \langle \mathrm{d}\Gamma(|y|)\rangle^{-s} + \mathcal{O}(\langle t\rangle^{-s}),$$

avec $\Pi_{\mathrm{gs}} = \mathbb{1}_{\{E_{\mathrm{gs}}\}}(H)$

Eléments de preuve

- Décomposition dyadique des basses énergies ([Bony,Häfner '10])
- Inégalités de Hardy dans l'espace de Fock

$$\left\| \langle \mathrm{d}\Gamma(|y|)\rangle^{-s} \chi_\sigma(H_\alpha) \langle B_\sigma\rangle^s \right\| \lesssim \sigma^s$$

Décroissance de l'énergie locale uniforme à basses énergies

Théorème ([Bony,F])

Pour tous $0 \le \alpha \le \alpha_c$, $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(]-\infty, e_1 - \delta[; \mathbb{R})$, $0 \le s < 2$, et $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{d}\Gamma(|y|)\rangle^{-s} e^{-\mathrm{i}tH}\chi(H)\langle \mathrm{d}\Gamma(|y|)\rangle^{-s}\\ &= e^{-\mathrm{i}tE_{\mathrm{gs}}}\chi(E_{\mathrm{gs}})\langle \mathrm{d}\Gamma(|y|)\rangle^{-s}\Pi_{\mathrm{gs}}\langle \mathrm{d}\Gamma(|y|)\rangle^{-s} + \mathcal{O}(\langle t\rangle^{-s}),\end{aligned}$$

avec $\Pi_{\mathrm{gs}} = \mathbb{1}_{\{E_{\mathrm{gs}}\}}(H)$

Eléments de preuve

- Décomposition dyadique des basses énergies ([Bony,Häfner '10])
- Inégalités de Hardy dans l'espace de Fock

$$\left\| \langle \mathrm{d}\Gamma(|y|)\rangle^{-s}\chi_\sigma(H_\alpha)\langle B_\sigma\rangle^{s} \right\| \lesssim \sigma^s$$

Propagation d'au moins un photon

$$\Gamma(b) = b \otimes \cdots \otimes b$$

(sur l'espace pour n photons)

Théorème ([F,Sigal])

Soient $\Delta \subset]E_{\mathrm{gs}}, \Sigma_{\mathrm{el}}[$ et $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(\Delta)$. On suppose que la règle d'or de Fermi est satisfaite dans Δ. Pour tout $0 \le \alpha \le \alpha_c$ et $\psi_0 \in \chi(H)\mathcal{D}(\mathrm{d}\Gamma(\langle y \rangle))$,

$$\|\Gamma(F(|y| \le \mathrm{c}t^\beta))\psi_t\| \lesssim t^{-\gamma}\big\|(\mathrm{d}\Gamma(\langle y \rangle) + 1)\psi_0\big\|,$$

pour certains $\beta < 1$

Remarque

A basses énergies, conséquence de la décroissance de l'énergie locale et du fait que $N = \mathrm{d}\Gamma(\mathbb{1})$ croît moins vite que linéairement

Vitesse minimale des photons

$$\langle \psi_t, \mathrm{d}\Gamma(|k|^{-\delta})\psi_t \rangle \lesssim t^{\nu(-\delta)} \|(\mathrm{d}\Gamma(|k|^{-\delta}) + 1)\psi_0\|^2$$

Théorème ([F,Sigal])

Soient $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(]-\infty, \Sigma[)$. Pour tout $\psi_0 \in \chi(H)\mathcal{D}(\mathrm{d}\Gamma(|k|^{-1})^{1/2})$,

$$\int_1^\infty t^{-\beta - a\nu(0)} \left\| \mathrm{d}\Gamma(F(|y| \approx \mathrm{c}t^\beta))^{\frac{1}{2}} \psi_t \right\|^2 \mathrm{d}t \lesssim \|(\mathrm{d}\Gamma(|k|^{-1}) + 1)^{\frac{1}{2}} \psi_0\|^2,$$

avec $(1 - \delta < \beta < 1$ et $\mathrm{c} > 0)$ ou $(\beta = 1$ et $0 < \mathrm{c} < 1)$, et $a > 1$

Elements de preuve

- Méthode des observables de propagation
- Observable $\mathrm{d}\Gamma(F(b_t/\mathrm{c}t^\beta))$ avec

$$b_t = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{k}{|k| + t^{-\kappa}} \cdot \nabla_k + \nabla_k \cdot \frac{k}{|k| + t^{-\kappa}}\right)$$

Vitesse minimale des photons

$$\langle \psi_t, \mathrm{d}\Gamma(|k|^{-\delta})\psi_t \rangle \lesssim t^{\nu(-\delta)} \|(\mathrm{d}\Gamma(|k|^{-\delta}) + 1)\psi_0\|^2$$

Théorème ([F,Sigal])

Soient $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(]-\infty, \Sigma[)$. Pour tout $\psi_0 \in \chi(H)\mathcal{D}(\mathrm{d}\Gamma(|k|^{-1})^{1/2})$,

$$\int_1^\infty t^{-\beta - a\nu(0)} \big\|\mathrm{d}\Gamma(F(|y| \approx \mathrm{c}t^\beta))^{\frac{1}{2}}\psi_t\big\|^2 \, \mathrm{d}t$$

$$\lesssim \|(\mathrm{d}\Gamma(|k|^{-1}) + 1)^{\frac{1}{2}}\psi_0\|^2,$$

avec $(1 - \delta < \beta < 1$ et $\mathrm{c} > 0)$ ou $(\beta = 1$ et $0 < \mathrm{c} < 1)$, et $a > 1$

Elements de preuve

- Méthode des observables de propagation
- Observable $\mathrm{d}\Gamma(F(b_t/\mathrm{c}t^\beta))$ avec

$$b_t = \frac{\mathrm{i}}{2}\Big(\frac{k}{|k| + t^{-\kappa}} \cdot \nabla_k + \nabla_k \cdot \frac{k}{|k| + t^{-\kappa}}\Big)$$

III.3

Complétude asymptotique

Complétude asymptotique (I)

Théorème ([F,Sigal])

Soit $\Delta \subset]-\infty, \Sigma_{\mathrm{el}}[$. On suppose que la règle d'or de Fermi est satisfaite dans Δ, que $0 \le \alpha \le \alpha_c$, et que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :

(i) Pour tout $\psi_0 \in \chi(H)\mathcal{D}(\mathrm{d}\Gamma(\mathbb{1})^{1/2})$ et $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(\Delta)$,

$$\|\mathrm{d}\Gamma(\mathbb{1})^{\frac{1}{2}}\psi_t\| \lesssim \|\mathrm{d}\Gamma(\mathbb{1})^{\frac{1}{2}}\psi_0\| + \|\psi_0\|$$

(i') Pour tout ψ_0 dans un certain ensemble $\mathcal{D}$ dense dans $\operatorname{Ran} \mathbb{1}_\Delta(H)$,

$$\|\mathrm{d}\Gamma(|k|^{-1})^{\frac{1}{2}}\psi_t\| \le C(\psi_0)$$

Alors la complétude asymptotique est satisfaite dans $\operatorname{Ran} \mathbb{1}_\Delta(H)$: pour tous $\psi_0 \in \operatorname{Ran} \mathbb{1}_\Delta(H)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in \mathcal{H}_{\mathrm{ph}}$ avec un nombre fini de photons, tel que

$$\limsup_{t\to\infty} \left\| e^{-\mathrm{i}tH}\psi_0 - e^{-\mathrm{i}tE_{\mathrm{gs}}}\Phi_{\mathrm{gs}} \otimes_s e^{-\mathrm{i}tH_f} f_\varepsilon \right\| \le \varepsilon$$

Complétude asymptotique (II)

Modèle spin-bosons

Hypothèse (i$'$) vérifiable ([De Roeck,Kupiainen '12])

Eléments de preuve

- Partition asymptotique de l'unité dans l'espace de Fock
- Existence des opérateurs d'onde inverse
- Utilisation des estimations de vitesse de propagation

Opérateurs de création et d'annihilation asymptotiques

Définition

Soit $h_t(k) = e^{-it|k|}h(k)$,

$$a^\#_\pm(h)\Phi := \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}a^\#(h_t)e^{-itH}\Phi,$$

pour tous $h \in \mathfrak{h}_0 = \{h \in L^2(\mathbb{R}^3), \int |h(k)|^2(|k|^{-1} + |k|^2)dk < \infty\}$ et $\Phi \in \mathrm{Ran}\, E_{(-\infty,\Sigma)}(H)$

Propriétés

1. Si Ψ est un vecteur propre de H, $a_\pm(h)\Psi = 0$
2. On vérifie que

$$\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}a^\#(h_{1,t})\cdots a^\#(h_{n,t})e^{-itH}\Phi = a^\#_\pm(h_1)\cdots a^\#_\pm(h_n)\Phi,$$

pour tous $h_1, \cdots, h_n \in \mathfrak{h}_0$ et $\Phi \in \mathrm{Ran}\, E_{(-\infty,\Sigma)}(H)$

Opérateurs de création et d'annihilation asymptotiques

Définition

Soit $h_t(k) = e^{-it|k|}h(k)$,

$$a^{\#}_{\pm}(h)\Phi := \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}a^{\#}(h_t)e^{-itH}\Phi,$$

pour tous $h \in \mathfrak{h}_0 = \{h \in L^2(\mathbb{R}^3), \int |h(k)|^2(|k|^{-1} + |k|^2)dk < \infty\}$ et $\Phi \in \mathrm{Ran}\, E_{(-\infty,\Sigma)}(H)$

Propriétés

1. Si Ψ est un vecteur propre de H, $a_{\pm}(h)\Psi = 0$
2. On vérifie que

$$\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}a^{\#}(h_{1,t})\cdots a^{\#}(h_{n,t})e^{-itH}\Phi = a^{\#}_{\pm}(h_1)\cdots a^{\#}_{\pm}(h_n)\Phi,$$

pour tous $h_1, \cdots, h_n \in \mathfrak{h}_0$ et $\Phi \in \mathrm{Ran}\, E_{(-\infty,\Sigma)}(H)$

Opérateur d'onde

Espace des vides asymptotiques

$$\mathcal{K}_+ = \{u \in \mathrm{Ran}\, E_{(-\infty,\Sigma)}(H),\ a_+(h)u = 0 \text{ pour tout } h \in \mathfrak{h}_0\}$$

On a $\mathrm{Ran}\,\Pi_{\mathrm{gs}} \subset \mathcal{K}_+$

Espace asymptotique

$$\mathcal{H}_+ = \mathcal{K}_+ \otimes \mathcal{F}_s$$

Opérateur d'onde

Défini sur $\mathcal{K}_+ \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{h}_0)$ par

$$\Omega_+(\Phi \otimes a^*(h_1)\cdots a^*(h_n)\Omega) = a_+^*(h_1)\cdots a_+^*(h_n)\Phi$$

Ω_+ est isométrique et se prolonge en une isométrie sur $\mathcal{H}_+$

Opérateur d'onde

Espace des vides asymptotiques

$$\mathcal{K}_+ = \{u \in \mathrm{Ran}\, E_{(-\infty,\Sigma)}(H), a_+(h)u = 0 \text{ pour tout } h \in \mathfrak{h}_0\}$$

On a $\mathrm{Ran}\, \Pi_{\mathrm{gs}} \subset \mathcal{K}_+$

Espace asymptotique

$$\mathcal{H}_+ = \mathcal{K}_+ \otimes \mathcal{F}_s$$

Opérateur d'onde

Défini sur $\mathcal{K}_+ \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{h}_0)$ par

$$\Omega_+(\Phi \otimes a^*(h_1) \cdots a^*(h_n)\Omega) = a_+^*(h_1) \cdots a_+^*(h_n)\Phi$$

Ω_+ est isométrique et se prolonge en une isométrie sur $\mathcal{H}_+$

Opérateur d'identification

Opérateur d'identification

Soit $\mathcal{H}_{\mathrm{fin}} = \mathcal{H}_{\mathrm{el}} \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{fin}} \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}$ (où $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}$ est l'espace est l'espace de Fock des vecteurs n'ayant qu'un nombre fini de particules). Opérateur d'identification $I : \mathcal{H}_{\mathrm{fin}} \to \mathcal{H}$ défini par

$$I : \Phi \otimes \prod_1^n a^*(h_i)\Omega \to \prod_1^n a^*(h_i)\Phi,$$

pour tout $\Phi \in \mathcal{H}_{\mathrm{el}} \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}$ et $h_1, \dots h_n \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$

Opérateur d'onde

Sur l'espace $\mathrm{Ran}\,\Pi_{\mathrm{gs}} \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{h}_0)$,

$$\Omega_+ = \mathrm{s-}\lim_{t\to\infty} e^{itH} I(e^{-itH} \otimes e^{-itH_f})$$

Complétude asymptotique

Théorème ([F, Sigal])

Sous les mêmes hypothèses que précédemment (théorème sur la complétude asymptotique), on a sur $\mathrm{Ran}\, E_{[E_{\mathrm{gs}},\Sigma)}(H)$:

$$\Omega_+(\Pi_{\mathrm{gs}} \otimes \bar{\Pi}_\Omega)W_+\bar{\Pi}_{\mathrm{gs}} + \Pi_{\mathrm{gs}} = \mathbb{1},$$

où W_+ est l'opérateur d'onde inverse de Deift-Simon, Π_Ω est la projection sur le vide dans l'espace de Fock, et $\bar{\Pi}_\# = \mathbb{1} - \Pi_\#$. En particulier,

$$\mathcal{K}_+ = \mathrm{Ran}\, \Pi_{\mathrm{gs}},$$

i.e. l'espace des vides asymptotiques coïncide avec l'état fondamental

Merci