Feuille d'exercices I : révisions d'algèbre linéaire 1

Exercice 1

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

(a) Trouver les composantes du vecteur $w = (1, 1, 1)$ dans cette base.

(b) Trouver les composantes des vecteurs canoniques e_1, e_2, e_3 dans cette base.

2. Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple d'une famille libre qui n'est pas génératrice.

3. Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple d'une famille génératrice qui n'est pas libre.

Exercice 2

Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\{(1, 0, t), (1, 1, -t), (t, 0, 1)\}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Les familles de vecteurs suivants de E sont-elles des familles libres ou liées ? Sont-elles des bases ? Pour chacune de ces familles, donner son rang. Pour les familles liées en extraire une famille libre maximale et pour les familles libres les compléter par des vecteurs de $\mathcal{B}$ pour obtenir une base de E.

(a) $(e_1 + e_2 + e_3\ ,\ -e_1 + e_2 + e_3)$

(b) $(e_1 - e_3\ ,\ -e_1 + e_2\ ,\ -e_2 + e_3)$

(c) $(e_1 + e_2 + e_3\ ,\ 2e_1 - e_2 + 2e_3\ ,\ e_1 - 2e_2 - e_3)$.

Exercice 4

1. Est-ce que le sous-ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

2. Est-ce que le sous-ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 = 2x,\ z = 0\}$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5 (Extrait du partiel d'octobre 2017)

Dans $E = \mathbb{R}^4$, soit $F = \{(x, y, z, t) \in E : x + y + z - t = 0 \quad \text{et} \quad 2y + z + t = 0\}$.

1. Déterminer une base de F.

2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 6

Soient $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$, $c = (3, 7, 0)$, $d = (5, 0, -7)$. Soient $E =< a, b >$ et $F =< c, d >$. Montrer que $E = F$.

Exercice 7

Les fonctions $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \cos(2x)$ et $x \mapsto \cos(3x)$ sont-elles linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel réel $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$?

Exercice 8
Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Soient $a = (1, -2, 3)$ et $b = (2, 1, -1)$. On pose $F =< a, b >$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer $E \cap F$.

3. A-t-on $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$?

Exercice 9
Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \text{ et } z - t = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer une base de E.

3. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 10 (Extrait du partiel d'octobre 2018)
On muni l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ de sa base canonique. Soit

$$F_1 = \left\{ (x, y, z, t) \in E \quad \text{tels que} \quad \begin{cases} 4x - 2y - z - t = 0 \\ 2x - y - 2z + t = 0 \end{cases} \right\}$$

et F_2 le sous-espace vectoriel de E engendré par $(1, 1, 2, 1)$ et $(1, 2, -1, -1)$.

1. (a) Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de E. Trouver une base de F_1.

(b) Quelles sont les dimensions de F_1 et F_2 ?

(c) Montrer que $E = F_1 \oplus F_2$.

2. Pour tout $u \in E$, on note $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$ les vecteurs correspondants à la décomposition $u = u_1 + u_2$ dans $E = F_1 \oplus F_2$. Déterminer les coordonnées de u_2 dans la base canonique de E en fonction de celle de u et en déduire les coordonnées de u_1.

3. On définit l'application

$$p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \mapsto & u_2 \end{array}$$

(a) Montrer que p est un endomorphisme de E.

(b) Quelles sont les coordonnées de $p(u)$ dans la base canonique de E en fonction de celles de u ?

Exercice 11
On considère l'application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $h(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$.

1. Montrer que h est une application linéaire.

2. Montrer que h n'est ni injective ni surjective.

3. Donner une base de son noyau et une base de son image.

Exercice 12
On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + 2y + 3z + 4t)$.

1. Quelle est la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2$?

2. Déterminer le noyau de f. Est-ce que f est injective ?

3. Déterminer l'image de f. Est-ce que f est surjective ?

Exercice 13
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. On considère f l'application linéaire de E vers E telle que :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_2) &= 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) &= 4e_1 + e_2 + 4e_3 \end{aligned}$$

1. Quelle est la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$? Si $u \in E$ a pour coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$, quelles sont les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$?
2. Calculer $f(e_1 + 2e_2)$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.
4. Ces sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires ?
5. Quelle est la matrice de f^2 dans la base $\mathcal{B}$? En déduire $f^2(e_1)$, $f^2(e_2)$ et $f^2(e_3)$.

Exercice 14
Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base du noyau de f.
2. Déterminer une base de l'image de f. Quel est le rang de A ?

Exercice 15
Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 16
Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit u l'application linéaire qui à un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe le vecteur $u(x, y, z) = (y - 2z, 2x - y + 4z, x - y + 3z)$.

1. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique $\mathcal{B}$.
2. Déterminer une base (a, b) de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
3. Donner un vecteur c tel que $\mathrm{Ker}(u) = < c >$.
4. Montrer que $\mathcal{B}' = \{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$.
6. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
7. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 17 (Extrait du partiel d'octobre 2017)
Soient E un k-espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E. Déterminer le rang de f dans chacun des cas suivants :

1. $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.
2. $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

Exercice 18
On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3. Calculer $A^3 - A^2 + A - I$.

2. Exprimer A^{-1},en fonction de A^2, A et I.

3. Exprimer A^4 en fonction de A^2, A et I.

Exercice 19
Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit u l'application linéaire dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est
$$\begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$
Soient a, b, c, d les quatre vecteurs
$$a = -2e_1 - e_2 - e_3 - e_4, \quad b = e_2 - e_4, \quad c = 2e_1 + e_3 + e_4, \quad d = 3e_1 + e_3 + 2e_4$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = \{a, b, c, d\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Calculer $u(a), u(b), u(c), u(d)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

3. En déduire la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$.

4. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

5. Calculer P^{-1} et $P^{-1}AP$.

Exercice 20
Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = P - (X-2)P'$.

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Montrer que f est un endomrphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Déterminer le noyau et l'image de f.

4. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$.

5. Montrer que $\mathcal{B}' = \{1, X-2, (X-2)^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

6. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.

7. Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 21
Soient E un espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$.

3. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = u(\mathrm{Ker}(u^2))$.

4. Montrer que $u(\mathrm{Ker}(v \circ u)) = \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u)$.

5. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.

(ii) $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.

Feuille d'exercices II

Exercice 1

Pour chacune des permutations σ suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Décomposer σ en produit de transpositions.
3. Donner la signature de σ.
4. Calculer σ_1^{100}, σ_2^{2001} et σ_3^{100}.

Exercice 2

Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer la signature de la permutation suivante:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soient $n \geq 2$ et $2 \leq k \leq n$ des entiers.
Combien le groupe S_n possède-t-il de cycles de longueur k ?

Exercice 4

1. Soient $n \geq 4$ et $a, b, c, d \in \{1, \cdots, n\}$ tous distincts. Caractériser $(ab) \circ (cd) \circ (da)$?
2. Que dire d'une permutation de S_n possédant au moins $n-1$ points fixes ?
3. Une permutation s telle que $s^2 = id$ est-elle nécessairement une transposition ?
4. Enumérer tous les éléments de S_4.

Exercice 5

Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des éléments de S_n de signature égale à 1.

1. Démontrer que $\mathcal{A}_n$ est un sous-groupe de S_n. ($\mathcal{A}_n$ est appelé groupe alterné d'indice n.)
2. Enumérer tous les éléments de $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$.
3. On suppose désormais que $n \geq 2$ et on fixe τ une transposition de S_n. Démontrer que l'application

$$\phi : S_n \to S_n, \ \sigma \mapsto \sigma \circ \tau$$

est une bijection. En déduire le cardinal de $\mathcal{A}_n$.

Feuille d'exercices III

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants dire si l'application φ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ est multilinéaire.

(1) $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) = x_1 + y_2 + z_3.$

(2) $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) = x_1y_3 + y_2z_1 + z_3x_2.$

(3) $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2.$

(4) $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) = x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3.$

(5) $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3.$

(6) $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(z_1 + z_3).$

(7) $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) = (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3).$

Exercice 2

(1) Montrer que l'espace des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel. En donner une base.

(2) Donner toutes les formes trilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^2$. Plus généralement que dire des formes m-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n lorsque $m > n$?

Exercice 3 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$, on considère les applications suivantes ω et α suivantes:

$$\omega : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$$

et

$$\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_3$$

(1) Montrer que ω est antisymétrique et bilinéaire.

A l'aide de ω et α, on déduit l'application

$$\omega \wedge \alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ (X, Y, Z) \mapsto \omega(X, Y)\alpha(Z) + \omega(Z, X)\alpha(Y) + \omega(Y, Z)\alpha(X).$$

(2) Montrer que $\omega \wedge \alpha$ est alternée.

(3) Montrer que $\omega \wedge \alpha$ est trilinéaire.

(4) Calculer $(\omega \wedge \alpha)(e_1, e_2, e_3)$. En déduire que $(\omega \wedge \alpha)(X, Y, Z) = \det(X, Y, Z)$ pour tous X, Y et Z dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 Soient n un entier strictement positif et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on rappelle que la trace $\operatorname{tr}(A)$ est la somme des coefficients diagonaux de A, c'est-à-dire $\operatorname{tr}(A) = \sum_{ij} a_{ij}$.

(1) Vérfier que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ dont on précisera une base et la dimension.

(2) Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* = \{\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \text{ linéaire}\}.$$

Vérifier que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ dont on précisera une base et la dimension.

(3) Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixée, on considère l'application

$$\alpha_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \ X \mapsto \operatorname{tr}(MX).$$

Vérfier que $\alpha_M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(4) On note ϕ l'application :

$$\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*, \ M \mapsto \alpha_M.$$

(a) Etudier l'injectivité et la surjectvitité de ϕ.

(b) En déduire que pour toute forme linéaire $\alpha \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$, il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\alpha(X) = \operatorname{tr}(AX)$ pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(c) Déterminer toutes les formes linéaires $\alpha \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ telles que

$$\alpha(XY) = \alpha(YX) \ \ \forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$$

Feuille d'exercices IV

Exercice 1 Calculer les déterminants suivants.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (7) $\begin{vmatrix} 1+i & 1-2i & 1+i \\ 1-2i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1+i & 1-2i \end{vmatrix}$ (8) $\begin{vmatrix} 1 & 15 & 9 & 5 \\ 2 & 18 & 10 & 6 \\ 3 & 21 & 11 & 7 \\ 4 & 24 & 12 & 8 \end{vmatrix}$ (9) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

Exercice 2

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(AB)$ et $\det(A+B)$. Que remarquez-vous ?

Exercice 3

(1) Calculer le rang des matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminer si la matrice $B_k = \begin{pmatrix} k & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible (on pourra discuter selon les valeurs de k).

(3) Soient a et b deux nombres réels. On considère la marice $M_{a,b} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \\ a & b & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Donner les valeurs minimales et maximales possibles pour le rang de $M_{a,b}$.

(b) Déterminer l'ensemble des valeurs de a et b pour lesquelles le rang de $M_{a,b}$ est 2.

(4) Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de A et en déduire le rang de A.

Exercice 4

Calculer le rang des marices suivantes.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&2&3&2\\2&3&4&2\\3&4&5&2\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\-2&-3&0&-5\\4&9&6&7\\1&-1&-5&5\end{pmatrix}$$

Exercice 5

(1) Montrer sans le calculer que le determinant suivant est divisible par 13 : $\begin{vmatrix}5&2&1\\4&7&6\\6&3&9\end{vmatrix}$

(2) Sans le développer, montrer que $\begin{vmatrix}1+a&a&a\\b&1+b&b\\c&c&1+c\end{vmatrix}=1+a+b+c$.

Exercice 6

(1) Soient $s_1, s_2, \cdots s_n$ des réels. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix}s_1&\cdots&\cdots&s_1\\\vdots&s_2&\cdots&s_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\s_1&s_2&\cdots&s_n\end{vmatrix}$

(2) Soit Δ_n le déterminant de taille $n\geq 1$ suivant : $\Delta_n=\begin{vmatrix}3&1&0&\cdots&0\\2&3&1&\ddots&\vdots\\0&2&3&\ddots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&1\\0&\cdots&0&2&3\end{vmatrix}$

(a) Démontrer que, pour tout $n\geq 1$, on a $\Delta_{n+2}=3\Delta_{n+1}-2\Delta_n$.
(b) En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n\geq 1$.

(3) Calculer le déterminant de la matrice $(i^j)_{1\leq i,j\leq n}$.

Exercice 7

Soient $n\geq 2$ et $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ n nombres complexes distincts. On se propose de calculer le déterminant de Vandermonde:

$$V(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&\cdots&1\\\alpha_1&\alpha_2&\cdots&\cdots&\alpha_n\\\alpha_1^2&\alpha_2^2&\cdots&\cdots&\alpha_n^2\\\vdots&\vdots&&&\vdots\\\alpha_1^{n-1}&\alpha_2^{n-1}&\cdots&\cdots&\alpha_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

(1) Calculer (sous forme factorisée) $V(\alpha_1,\alpha_2)$ et $V(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.
(2) Vérifier que $V(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},x)$ est une fonction polynômiale de x dont on précisera le degré.
(3) En déduire que $V(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},x)=V(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1})\Pi_{i=1}^{n-1}(x-\alpha_i)$.
(4) En déduire une expression générale de $V(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

Exercice 8

Soient n et p des entiers tels que $p < n$. Soient A une matrice réelle $n \times p$ et B une matrice réelle $p \times n$. Calculer le déterminant du produit AB.

Exercice 9

(1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère les vecteurs $(1, 2, -1)$, $(3, -1, 1)$ et $(\alpha, 1, 0)$. Pour quelle(s) valeur(s) de α, ces vecteurs forment-ils une famille libre dans $\mathbb{R}^3$?

(2) Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère les vecteurs $(1, 1, t)$, $(1, t, 1)$ et $(1, 1, t)$. Pour quelle(s) valeur(s) de t, ces vecteurs forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

(3) Soient $(z_0, z_1, \cdots, z_n)$ des nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que dans $\mathbb{C}_n[X]$ la famille $\{(X - z_0)^n, (X - z_1)^n, \cdots, (X - z_n)^n\}$ est libre.

(4) Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ une famille de vecteurs de E et $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ une famille de scalaires. On note $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les α_i pour que la famille $\{u_1 + s, u_2 + s, \cdots, u_n + s\}$ soit libre.

Exercice 10

(1) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

(2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

(3) Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) Montrer que la matrice suivante est inversible et calculer son inverse : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

(5) Supposons que A soit une matrice réelle $n \times n$ (avec $n \geq 1$) telle que $A^p = 0$ pour un certain entier $p \geq 1$. *(Dans ce cas on dit que A est une matrice nilpotente.)* Démontrer que la matrice $I_n - A$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 11

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = -Id_E$. Que peut-on dire de la dimension de E ?

Feuille d'exercices V

Exercice 1. Pour chacune des matrices suivantes, calculer son polynôme caractéristique (sous forme factorisée), déterminer ses valeurs propres et leurs multiplicités, puis déterminer les sous-espaces propres, une base et la dimension de chacun d'eux. Dire si la matrice est diagonalisable (sans la diagonaliser).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -9 & -5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. On munit le plan $\mathbb{R}^2$ d'une structure d'espace vectoriel avec la base canonique $\{e_1, e_2\}$. Soit $\mathcal{R}$ la rotation du plan de centre O et d'angle θ.

(1) Montrer que $\mathcal{R}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
(2) Si θ n'est pas un multiple de π, montrer que $\mathcal{R}$ n'admet aucun vecteur propre.
(3) Si $\theta = \pi$, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathcal{R}$.
(4) Si $\theta = 2\pi$, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathcal{R}$.

Exercice 3. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice suivante. Dans chacun des cas, déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les espaces propres. En déduire la transformation géométrique associée à la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soient $n \geq 1$ un entier et $\mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes d'une variable à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $2n$. Pour tout P dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$, on pose $f(P) = (X^2 - 1)P' - 2nXP$.

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
(2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
(3) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 5.

Que peut-on dire de la parité du polynôme caractéristique d'une matrice antisymétrique ?

Exercice 6.

(1) Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$, où $n \geq 1$ est un entier. Notons χ_A le polynôme caractéristique de A. Montrer que A et B n'ont pas de valeurs propres communes si, et seulement si, la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.
(2) Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Notons χ_f le polynôme caractéristique de f. Montrer que $P(f)$ est inversible si, et seulement si, P et χ_f sont premiers entre eux.

Feuille d'exercices VI

Exercice 1 On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer le polynôme minimal de A.
3. Montrer que A est diagonalisable, puis déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A et montrer que les valeurs propres de A sont -1 et 1.
2. Pour quelles valeurs de m la matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 **1.** Donner une matrice carrée 2×2 à coefficients réels qui soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.
2. Donner une matrice carrée 2×2 à coefficients réels qui ne soit diagonalisable ni sur $\mathbb{C}$ ni sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 Soit A l'une des deux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les puissances A^k, pour $k \in \mathbb{N}$, en diagonalisant la matrice A.
2. Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton et la division euclidienne des polynômes.

Exercice 5 On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A.
3. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Trouver une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$.
4. Déterminer le polynôme minimal de f.
5. Déterminer la décomposition de Dunford de B et de A.
6. Calculer B^n où n est un nombre entier positif.
7. Calculer $f^4((1,1,0))$.

Exercice 6 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie et soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 - 3f + 2 = 0$. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 7 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On admettra que i est une valeur propre de f.

1. Sans calculer le polynôme caractéristique de A, déterminer les valeurs propres de f

2. En déduire le polynome caractéristique de f.

3. Déduire de ce qui précède que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$.

Exercice 8 Diagonaliser, le cas échéant, les matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 9 Trigonaliser, le cas échéant, les matrices suivantes.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\qquad$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 10 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la dimension et une base des sous-espaces caractéristiques de A.

2. Déterminer la décomposition de Dunford de A.

Exercice 11 On considère l'endomorphisme ν de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique égale à

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la trace et le rang de ν. En déduire, sans aucun calcul, le polynôme caractéristique de ν.

2. Montrer que ν est nilpotente et donner son indice de nilpotence.

3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de ν est triangulaire supérieure.

Exercice 12 Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$$

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par la donnée de u_0 et u_1 et la relation de récurrence suivante, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Lorsque A est diagonalisable, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

3. On suppose que A est diagonalisable. On note U_n le vecteur $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

(a) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et de A, puis U_n en fonction de A et de U_0.

(b) En déduire une expression de u_n en fonction de u_0 et u_1.