Université de Lorraine-Site de Metz
Département de Mathématiques
Année universitaire 2019-2020
L2 Mathématiques UE : Algèbre linéaire 2

Examen Partiel du 16 novembre 2019

Durée : 02 heures.
Tous les résultats de tous les exercices doivent être justifiés.
Documents, calculatrices, ordinateurs et téléphones portables non autorisés.
Le sujet comporte deux pages.

Le barème est sur 23 points. Une note supérieure à 20 sera ramenée à 20.

Questions de cours

(1) Enoncer le théorème de la base incomplète. (**2 pts**).
(2) Donner la définition de la somme directe de k sous-espaces vectoriels $(E_i)_{1\leq i\leq k}$, k est un entier supérieur ou égal à 2. (**2 pts**).
(3) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F.

1. Montrer que $Im(u) = u(E)$ est un sous-espace de F. (**0,5 pt**).
2. Montrer que le noyau, $Ker(u)$, de u est un sous-espace de E. (**0,5 pt**).
3. On suppose, dans cette question que E est de dimension finie. Donner une relation entre les trois entiers : $dim(E)$, $dim\ Ker(u)$ et $dim\ Im(u)$. (**1 pt**).

Exercice 1

On considère la permutation suivante

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ en produit de cycles de support disjoints. (**1 pt**).
2. Déterminer la signature de σ. (**1 pt**).
3. Calculer σ^{2020}. (**1 pt**).

Exercice 2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ une famille libre de vecteurs de E. On définit les sous-espaces vectoriels suivants, de E :

$$F = Vect(a_1 + a_2, a_3), \qquad G = Vect(a_1 + a_3, a_4) \qquad \text{et} \qquad H = Vect(a_1 + a_4, a_2).$$

1. Déterminer les sous-espaces vectoriels suivants : $F \cap G$, $F \cap H$ et $G \cap H$. (**1,5 pts**)
2. La somme $F + G + H$ est-elle une somme directe ? (**1 pt**).
3. Trouver un vecteur v de $F + G + H$ qui admet deux décompositions différentes dans $F + G + H$. (**1 pt**).

Exercice 3

$\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z) = (x - 2y + z, 2x + y - 3z).$$

1. Montrer que f est une application linéaire. (**1 pt**).

2. Ecrire la matrice $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2)$ de f relativement aux bases canoniques $\mathcal{C}_3 = (a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}_2 = (b_1, b_2)$ de $\mathbb{R}^2$. (**1 pt**).

3. On considère les bases respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ suivantes

$$\mathcal{C}'_3 = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}'_2 = (b_1, b_1 - b_2).$$

   (a) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{C}_3$ vers la base $\mathcal{C}'_3$. (**1 pt**).
   (b) Déterminer la matrice de passage Q de la base $\mathcal{C}_2$ vers la base $\mathcal{C}'_2$ et Calculer sa matrice inverse Q^{-1}. (**1 pt**).
   (c) Soit $M = \mathcal{M}(f; \mathcal{C}'_3, \mathcal{C}'_2)$ de f relativement aux bases $\mathcal{C}'_3$, $\mathcal{C}'_2$. Exprimer la matrice M en fonctions des matrices A, P et Q^{-1} et la déterminer explicitement. (**1 pt**).
   (d) Sachant que f est surjective, déterminer $Ker(f)$ sans aucun calcul. (**1 pt**).

Exercice 4

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E tel que $f^2 - 2f - 3id_E = 0$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E. (**1 pt**).

2. Montrer que $Im(f - 3id_E) \subset Ker(f + id_E)$ et $Im(f + id_E) \subset Ker(f - 3id_E)$. (**1 pt**).

3. Trouver deux nombres réels a et b tels que

$$(\forall x \in E), \qquad x = a(f + id_E)(x) + b(f - 3id_E)(x). \quad (\textbf{1 pt}).$$

4. Montrer que

$$E = Ker(f - 3id_E) \oplus Ker(f + id_E). \quad (\textbf{1 pt}).$$

5. En déduire que

$$dim\ (E) = dim\ Ker(f + id_E) + dim\ Ker(f - 3id_E). \quad (\textbf{0,5 pt}).$$

Fin de l'énoncé.

Corrigé du Partiel du 16/11/19

EXERCICE 1

On considère la permutation suivante

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ en produit de cycles de support disjoints. (**1 pt**).
2. Déterminer la signature de σ. (**1 pt**).
3. Calculer σ^{2020}. (**1 pt**).

Solution:

1. On a : $\sigma = (1\,4\,7\,8) \circ (2\,6\,5) \circ (3\,9)$.
2. La signature d'un k-cycle est $(-1)^{k-1}$ donc comme la signature $\varepsilon : (\mathcal{S}_9, \circ) \to (\{-1, 1\}, \times)$ est un morphisme de groupes :
$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(1\,4\,7\,8)\,\varepsilon(2\,6\,5)\,\varepsilon(3\,9) = (-1)^{4-1}(-1)^{3-1}(-1)^{2-1} = 1.$$
3. L'ordre de σ est égal à $\text{ppcm}(2, 3, 4) = 12$, donc $\sigma^{12} = id_{\mathcal{S}_9}$. Or, $2020 = 12 \times 168 + 4$, donc :
$$\sigma^{2020} = \sigma^4 = (2\,6\,5)^4 = (2\,6\,5).$$

EXERCICE 2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ une famille libre de vecteurs de E. On définit les sous-espaces vectoriels suivants, de E :

$$F = Vect(a_1 + a_2, a_3), \qquad G = Vect(a_1 + a_3, a_4) \qquad \text{et} \qquad H = Vect(a_1 + a_4, a_2).$$

1. Déterminer les sous-espaces vectoriels suivants : $F \cap G$, $F \cap H$ et $G \cap H$. (**1,5 pts**)
2. La somme $F + G + H$ est-elle une somme directe ? (**1 pt**).
3. Trouver un vecteur v de $F + G + H$ qui admet deux décompositions différentes dans $F + G + H$. (**1 pt**).

Solution:

1. Soit $x \in F \cap G$. Alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{K}$ tels que :
$$x = \lambda_1(a_1 + a_2) + \lambda_2 a_3 = \lambda_3(a_1 + a_3) + \lambda_4 a_4$$
c'est-à-dire :
$$(\lambda_1 - \lambda_3)a_1 + \lambda_1 a_2 + (\lambda_2 - \lambda_3)a_3 - \lambda_4 a_4 = 0$$
Comme la famille $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ est libre, on a alors :
$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

D'où $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$. Donc $x = 0_E$ et donc $F \cap G \subset \{0_E\}$. La réciproque est immédiate car F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Donc $F \cap G = \{0_E\}$. On montre par un raisonnement similaire que $F \cap H = \{0_E\}$ et $G \cap H = \{0_E\}$.

2. Posons $V := \mathsf{Vect}(a_1, a_2, a_3, a_4)$. Comme la famille $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ est libre, alors $\mathsf{dim}(V) = 4$. F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de V car ils sont engendrés par des éléments de V. En particulier, $F + G + H$ est un sous-espace vectoriel de V. De plus, F, G et H sont de dimensions 2 car les vecteurs qui les engendrent ne sont pas colinéaires. Si la somme $F + G + H$ était directe, alors $\mathsf{dim}(F + G + H) = \mathsf{dim}(F) + \mathsf{dim}(G) + \mathsf{dim}(H) = 2 + 2 + 2 = 6 > 4 = \mathsf{dim}(V)$ ce qui n'est pas possible car $F + G + H$ est un sous-espace vectoriel de V. Donc la somme $F + G + H$ n'est pas directe.
3. Posons $v := a_1$. Alors v admet deux décompositions différentes :

$$\begin{aligned} v &= (-a_3) + (a_1 + a_3) + 0 \in F + G + H \\ &= (a_1 + a_2) + 0 + (-a_2) \in F + G + H \end{aligned}$$

<u>Exercice 3</u>

$\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x + y - 3z).$$

1. Montrer que f est une application linéaire. (**1 pt**).
2. Ecrire la matrice $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2)$ de f relativement aux bases canoniques $\mathcal{C}_3 = (a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}_2 = (b_1, b_2)$ de $\mathbb{R}^2$. (**1 pt**).
3. On considère les bases respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ suivantes

$$\mathcal{C}_3' = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}_2' = (b_1, b_1 - b_2).$$

   (a) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{C}_3$ vers la base $\mathcal{C}_3'$. (**1 pt**).
   (b) Déterminer la matrice de passage Q de la base $\mathcal{C}_2$ vers la base $\mathcal{C}_2'$ et Calculer sa matrice inverse Q^{-1}. (**1 pt**).
   (c) Soit $M = \mathcal{M}(f; \mathcal{C}_3', \mathcal{C}_2')$ de f relativement aux bases $\mathcal{C}_3'$, $\mathcal{C}_2'$. Exprimer la matrice M en fonctions des matrices A, P et Q^{-1} et la déterminer explicitement. (**1 pt**).
   (d) Sachant que f est surjective, déterminer $Ker(f)$ sans aucun calcul. (**1 pt**).

Solution:

1. Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (\lambda x + x' - 2(\lambda y + y') + \lambda z + z', 2(\lambda x + x') + \lambda y + y' - 3(\lambda z + z')) \\ &= (\lambda(x - 2y + z) + x' - 2y' + z', \lambda(2x + y - 3z) + 2x' + y' - 3z') \\ &= \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z') \\ &= \lambda f(u) + f(v). \end{aligned}$$

   Donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Il suffit d'évaluer f sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} f(1, 0, 0) = (1, 2) \\ f(0, 1, 0) = (-2, 1) \\ f(0, 0, 1) = (1, -3) \end{cases}$$

Donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. (a) La matrice de passage de la base $\mathcal{C}_3$ vers la base $\mathcal{C}'_3$ est $P := \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{C}_3, \mathcal{C}'_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) La matrice de passage de la base $\mathcal{C}_2$ vers la base $\mathcal{C}'_2$ est $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On remarque que $Q^2 = I_2$ donc $Q^{-1} = Q$.

   (c) D'après la formule du cours, on obtient : $M = Q^{-1}AP$. On trouve $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

   (d) Si f est surjective, alors $\mathsf{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. Donc d'après le théorème du rang :

$$3 = \mathsf{dim}(\mathbb{R}^3) = \mathsf{dim}(\mathsf{Im}(f)) + \mathsf{dim}(\mathsf{Ker}(f)) = 2 + \mathsf{dim}(\mathsf{Ker}(f)).$$

   Donc $\mathsf{Ker}(f)$ est de dimension 1. Il suffit de trouver un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ annulant f. La troisième colonne de M donne les composantes de $f(a_1 + a_2 + a_3)$ dans la base $\mathcal{C}'_2$. Puisque cette colonne est nulle, on a donc : $f(a_1 + a_2 + a_3) = 0$ c'est-à-dire que $a_1 + a_2 + a_3 = (1, 1, 1) \in \mathsf{Ker}(f)$. Ainsi,

$$\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Vect}(1, 1, 1).$$

Exercice 4

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E tel que $f^2 - 2f - 3id_E = 0$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E. (**1 pt**).
2. Montrer que $Im(f - 3id_E) \subset Ker(f + id_E)$ et $Im(f + id_E) \subset Ker(f - 3id_E)$. (**1 pt**).
3. Trouver deux nombres réels a et b tels que

$$(\forall x \in E), \qquad x = a(f + id_E)(x) + b(f - 3id_E)(x). \quad (\textbf{1 pt}).$$

4. Montrer que

$$E = \mathsf{Ker}(f - 3id_E) \oplus \mathsf{Ker}(f + id_E). \quad (\textbf{1 pt}).$$

5. En déduire que

$$dim\ (E) = \dim\ \mathsf{Ker}(f + id_E) + \dim\ \mathsf{Ker}(f - 3id_E). \quad (\textbf{0,5 pt}).$$

Solution:

1. f est un endomorphisme de E et on a : $f \circ (f - 2id_E) = 3id_E$ donc $f \circ (\frac{1}{3}f - \frac{2}{3}id_E) = id_E$. On a de même, $(\frac{1}{3}f - \frac{2}{3}id_E) \circ f = id_E$ Ainsi, f est bijective et son inverse est $f^{-1} = \frac{1}{3}f - \frac{2}{3}id_E$. Donc f est un automorphisme de E.
2. • Soit $y \in \mathsf{Im}(f - 3id_E)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) - 3x$. On a :

$$(f + id_E)(y) = f(y) + y = f^2(x) - 3f(x) + f(x) - 3x = (f^2 - 2f - 3id_E)(x) = 0.$$

   Donc $y \in \mathsf{Ker}(f + id_E)$. Ainsi, $\mathsf{Im}(f - 3id_E) \subset \mathsf{Ker}(f + id_E)$.

   • Soit $y \in \mathsf{Im}(f + id_E)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) + x$. On a :

$$(f - 3id_E)(y) = f(y) - 3y = f^2(x) + f(x) - 3f(x) - 3x = (f^2 - 2f - 3id_E)(x) = 0.$$

   Donc $y \in \mathsf{Ker}(f - 3id_E)$. Ainsi, $\mathsf{Im}(f + id_E) \subset \mathsf{Ker}(f - 3id_E)$.

3. Le couple $(a, b) = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ convient.

4. • Montrons que $E = \mathsf{Ker}(f - 3id_E) + \mathsf{Ker}(f + id_E)$. Soit $x \in E$. Posons : $\begin{cases} x_1 := \frac{1}{4}(f(x) + x). \\ x_2 := -\frac{1}{4}(f(x) - 3x). \end{cases}$

   Alors on a d'après la question 2 : $\begin{cases} x_1 \in \mathsf{Im}(f + id_E) \subset \mathsf{Ker}(f - 3id_E). \\ x_2 \in \mathsf{Im}(f - 3id_E) \subset \mathsf{Ker}(f + id_E). \end{cases}$
   De plus, $x = x_1 + x_2$ d'après la question 3.

   • Montrons que $\mathsf{Ker}(f - 3id_E) \cap \mathsf{Ker}(f + id_E) = \{0_E\}$. Soit $x \in \mathsf{Ker}(f - 3id_E) \cap \mathsf{Ker}(f + id_E)$. Alors $f(x) = 3x$ et $f(x) = -x$ donc $4x = 0_E$ et donc $x = 0_E$. La réciproque est immédiate car $\mathsf{Ker}(f - 3id_E)$ et $\mathsf{Ker}(f + id_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

   Finalement,
   $$E = \mathsf{Ker}(f - 3id_E) \oplus \mathsf{Ker}(f + id_E).$$

5. D'après la question précédente, on en déduit immédiatement en passant à la dimension que :
   $$\dim(E) = \dim[\mathsf{Ker}(f - 3id_E) \oplus \mathsf{Ker}(f + id_E)] = \dim(\mathsf{Ker}(f - 3id_E)) + \dim(\mathsf{Ker}(f + id_E))$$