Interrogation écrite du 13 Mars 2020

Durée : 1 heure

Exercice 1. [10 points]

Une entreprise produit un bien unique en quantité Q, exprimée en tonnes avec $0 \leq Q \leq 300$. Son coût total, noté CT, exprimé en milliers d'euros, vaut $\text{CT} = 40Q + 16\,000$.

1. Déterminer :
   (a) son coût fixe, noté CF, [1 point]
   (b) son coût moyen, noté CM, [1 point]
   (c) son coût marginal, noté C_m. [1 point]
2. L'entreprise vend la totalité de sa production Q sur un marché unique au prix de vente unitaire : $P = 300 - Q$ exprimé en milliers d'euros par tonne.
   (a) Exprimer en fonction de Q la recette totale RT, puis le profit $\prod$ de l'entreprise. [1+1 points]
   (b) Déterminer pour quels niveaux de production Q l'entreprise réalise un bénéfice. [1 point]
   (c) Déterminer le niveau de production Q_0 qui maximise le profit $\prod$ de l'entreprise. Calculer le profit correspondant. [2+2 points]

Exercice 2. [10 points]

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer pour tout réel x dans $]0, +\infty[$, la dérivée de la fonction f en x, notée $f'(x)$. [1,5 point]
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$. [1,5 point]

   On admettra que : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3. Écrire l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1. On écrira l'équation de cette tangente sous la forme $y = ax + b$ avec a et b deux réels à déterminer. [2 points]
4. Montrer que pour tout x dans $]0, +\infty[$:
$$f''(x) = \frac{x-2}{e^x}.$$
   En déduire l'unique point d'inflexion de f. [1,5+0,5 point]
5. Montrer que la fonction f est concave sur l'intervalle $[0, 2]$ et convexe sur l'intervalle $[2, +\infty[$. [1 point]
6. Tracer sommairement la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T. [1+1 points]

Interrogation écrite du 13 Mars 2020

Durée : 1 heure

Exercice 1. [10 points]

Une entreprise produit un bien unique en quantité Q, exprimée en tonnes avec $0 \leq Q \leq 300$. Son coût total, noté CT, exprimé en milliers d'euros, vaut $\mathrm{CT} = 40Q + 16\,000$.

1. Déterminer :
   (a) son coût fixe, noté CF, [1 point]

   Solution: Le coût fixe est l'absence de production c'est-à-dire lorsque $Q = 0$. On obtient alors $\mathrm{CF} = 40 \times 0 + 16\,000 = 16\,000$.

   (b) son coût moyen, noté CM, [1 point]

   Solution: $\mathrm{CM} = \frac{\mathrm{CT}}{Q} = \frac{40Q+16\,000}{Q} = 40 + \frac{16\,000}{Q}$.

   (c) son coût marginal, noté C_m. [1 point]

   Solution: Le coût marginal est la dérivé du coût total donc $C_m = 40$.

2. L'entreprise vend la totalité de sa production Q sur un marché unique au prix de vente unitaire : $P = 300 - Q$ exprimé en milliers d'euros par tonne.
   (a) Exprimer en fonction de Q la recette totale RT, puis le profit $\prod$ de l'entreprise. [1+1 points]

   Solution: On a $\mathrm{RT} = P \times Q = (300 - Q) \times Q = 300Q - Q^2$. Le profit est la difference entre la recette total et le coût total :

   $$\prod = \mathrm{RT} - \mathrm{CT} = (300Q - Q^2) - (40Q + 16\,000) = -Q^2 + 260Q - 16\,000$$

   (b) Déterminer pour quels niveaux de production Q l'entreprise réalise un bénéfice. [1 point]

   Solution: L'entreprise réalise un bénéfice lorsque $\prod > 0$ c'est-à-dire lorsque :

   $$-Q^2 + 260Q - 16\,000 > 0$$

   . Le discriminant Δ vaut $\Delta = 3\,600$. Les deux racines sont :

   $$Q_1 = 160 \quad \text{et} \quad Q_2 = 100$$

   On obtient alors le tableau de signe suivant :

Q	0		100		160		300
$\prod$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Donc l'entreprise réalise un bénéfice lorsque $100 < Q < 160$.

(c) Déterminer le niveau de production Q_0 qui maximise le profit $\prod$ de l'entreprise. Calculer le profit correspondant. [2+2 points]

Solution: Il faut étudier les variations de $\prod$. Calculons sa dérivé :

$$\prod' = -2Q + 260$$

$\prod' = 0 \iff -2Q + 260 = 0 \iff Q = 130$, on obtient donc le tableau de variations suivant :

Q	0		130		300
$\prod'$		$+$	0	$-$	
$\prod$	-16 000	$\nearrow$	900	$\searrow$	-28 000

D'après le tableau de variations, le profit est maximum lorsque la quantité produite vaut 130 tonnes. Le profit correspondant est $\prod$ lorsque Q vaut 130 c'est-à-dire :

$$\prod = -130^2 + 260 \times 130 - 16\,000 = 900$$

Exercice 2. [10 points]

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer pour tout réel x dans $[0, +\infty[$, la dérivée de la fonction f en x, notée $f'(x)$. [1,5 point]

Solution: Il faut ici utiliser la formule $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$. On a pour tout réel x dans $[0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1 \times e^x - e^x \times x}{(e^x)^2} = \frac{e^x \times (1 - x)}{(e^x)^2} = \frac{1 - x}{e^x}$$

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$. [1,5 point]

On admettra que : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Solution: On sait que pour tout réel x dans $[0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1 - x}{e^x}$$

On a $f'(x) = 0 \iff x = 1$. Le dénominateur est toujours positif. Le numérateur est positif sur l'intervalle $[0, 1]$ et négatif sur l'intervalle $[1, +\infty[$. De plus, $f(1) = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

3. Écrire l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. [2 points]

Solution: On a $f(0) = \frac{0}{e^0} = 0$ et $f'(0) = \frac{1-0}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$. Ainsi, l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = x$$

Donc l'équation de la tangente T est : $y = x$.

4. Montrer que pour tout x dans $[0, +\infty[$:

$$f''(x) = \frac{x-2}{e^x}.$$

En déduire l'unique point d'inflexion de f. [1,5+0,5 point]

Solution: On a pour tout réel x dans $[0, +\infty[$:

$$f''(x) = \frac{(-1) \times e^x - e^x \times (1-x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x \times (-1-(1-x))}{(e^x)^2} = \frac{e^x \times (-2+x)}{(e^x)^2} = \frac{x-2}{e^x}$$

De plus,

$$f''(x) = 0 \iff \frac{x-2}{e^x} = 0 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2$$

Donc l'unique point d'inflexion de f est 2.

5. Montrer que la fonction f est concave sur l'intervalle $[0, 2]$ et convexe sur l'intervalle $[2, +\infty[$. [1 point]

Solution: Il faut étudier le signe de $f''(x)$. On sait que :

$$f''(x) = \frac{x-2}{e^x}$$

Le dénominateur est toujours positif. Le numérateur est positive sur l'intervalle $[2, +\infty[$ et négatif sur l'intervalle $[0, 2]$. On obtient alors le tableau de signes suivant :

x	0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi, la fonction f est concave sur l'intervalle $[0, 2]$ et convexe sur l'intervalle $[2, +\infty[$

6. Tracer sommairement la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T. [1+1 points]

Solution: On trace en bleu la droite T et en rouge la courbe $\mathscr{C}$: