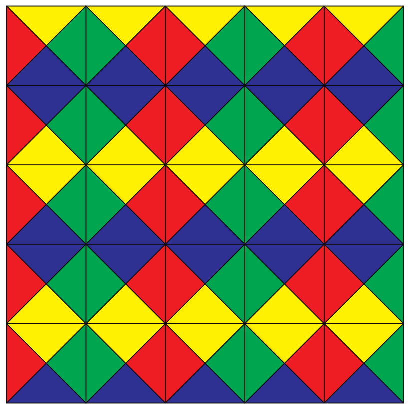
Titres alternatifs :
- Des rectangles « bien coloriés »
- Coloriages sous contraintes
- Un coloriage en règles
- Un coloriage dans les règles

Des petits carrés bien coloriés



Selon quelles contraintes ces petits carrés coloriés avec quatre couleurs sont-ils assemblés ? Peut-on construire d'autres grilles ayant un nombre de lignes et de colonnes différent ?
© J. Bernat / université de Lorraine et G. Reuiller / EPPDCSI.

Il ne faut pas grand-chose pour créer une situation propice à la recherche mathématique : de petits carrés formant des grilles rectangulaires, quatre couleurs et quelques règles d'assemblage simples suffisent… Nous voici prêts à goûter au plaisir d'explorer un problème et de mener des raisonnements pour finalement démontrer un résultat.

PAR **JULIEN BERNAT**, MATHÉMATICIEN À L'UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Pour la seconde fois, j'ai eu le plaisir de participer au salon Culture & jeux mathématiques organisé par le CIJM (Comité international des jeux mathématiques), qui s'est déroulé du 22 au 25 mai 2014 à Paris. Parmi les activités présentées, j'avais sélectionné un problème que j'apprécie particulièrement, dont l'origine exacte m'échappe. Il provient probablement d'un livre américain de jeux et puzzles, peut-être de l'un des nombreux ouvrages de Martin Gardner ?

QUEL EST LE PROBLÈME ?

On considère une collection de petits carrés de même taille dont les côtés sont de quatre couleurs différentes. Chaque carré peut être représenté comme un assemblage de quatre triangles rectangles isocèles dont les bases sont les côtés du carré. Un petit carré est « bien colorié » si chaque couleur est utilisée une seule fois. On peut montrer qu'il existe seulement six différents carrés bien coloriés (fig. 1). On dispose de nombreux petits carrés de chaque sorte avec lesquels on essaie de fabriquer des rectangles « bien coloriés », c'est-à-dire vérifiant les trois règles suivantes (fig. 2) :
– (R1) des petits carrés peuvent être placés côte à côte uniquement si les côtés qui se touchent sont de la même couleur ;
– (R2) chaque côté du rectangle présente une seule couleur ;
– (R3) les quatre couleurs doivent apparaître sur les côtés du rectangle.

Le public du salon était prié de reproduire les trois figures suivantes :
– un carré de trois petits carrés de côté (neuf petits carrés en tout),
– un autre de quatre petits carrés de côté (seize au total),
– et un rectangle de quatre petits carrés de longueur et trois de largeur (douze en tout).

UN CAS ÉPINEUX…

Dans la majorité des cas, le visiteur parvient, plus ou moins facilement, à réaliser les deux premières figures. En revanche, la dernière semble particulièrement ardue : certains passent de longues minutes à tenter de l'obtenir, sans succès (fig. 3).

Au bout d'un moment, il faut bien leur avouer l'inavouable : cette construction ne peut être formée ! Reste à le prouver… On peut recourir à une démonstration « par l'absurde » : on suppose que la figure existe et l'on montre qu'elle aboutit à une contradiction ne pouvant que remettre en cause cette existence.

Admettons qu'un tel rectangle puisse être obtenu. Il peut être représenté initialement comme un ensemble de triangles vides à colorier en respectant R1, R2 et R3. Ces triangles sont de deux types (fig. 4a) :
– soit ils sont situés sur le bord de la figure et leur base n'est pas en contact avec un autre triangle (appelons-les « triangles extérieurs »),
– soit ils ne sont pas situés sur le bord (triangles dits « intérieurs ») et font toujours face dans ce cas à un autre triangle qui devra être de la même couleur.

Sur l'une des largeurs, appliquons une couleur, par exemple le bleu. Pour satisfaire à R2 et R3, le bleu ne doit apparaître ni sur l'autre largeur ni sur les longueurs (fig. 4b). Par hypothèse, il y a ainsi exactement trois triangles extérieurs bleus. Or notre rectangle est constitué de 4 × 3 = 12 petits carrés, tous bien coloriés. On doit donc voir 12 triangles de chaque couleur après coloration. On en déduit qu'il y a 12 – 3 = 9 triangles intérieurs bleus. N'importe lequel de ces triangles intérieurs fait face à un autre triangle intérieur, forcément bleu sinon R1 n'est pas

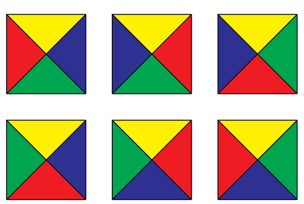


Figure 1. Aux rotations près, il n'y a que six différents petits carrés bien coloriés. © J. Bernat / université de Lorraine et G. Reuiller / EPPDCSI.

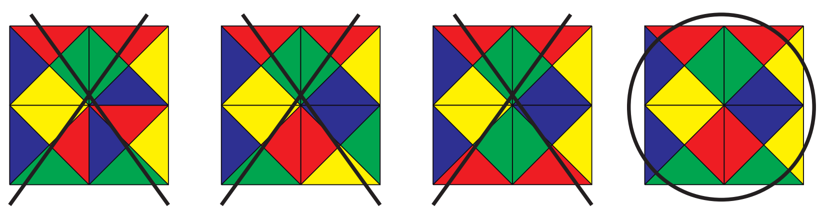


Figure 2. Les trois premières constructions enfreignent l'une des règles de coloration (respectivement R1, R2 et R3). La quatrième est un rectangle 2 × 2 bien colorié.
© J. Bernat / université de Lorraine et G. Reuiller / EPPDCSI.

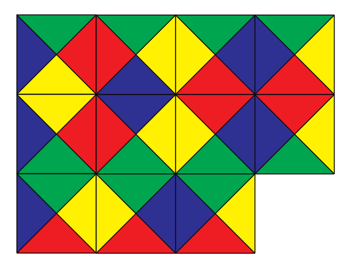


Figure 3. Tentative infructueuse de construction du rectangle 4 × 3. Impossible, en respectant R1, R2 et R3, de placer un dernier petit carré pour terminer le rectangle !
© J. Bernat / université de Lorraine et G. Reuiller / EPPDCSI.

a) b)

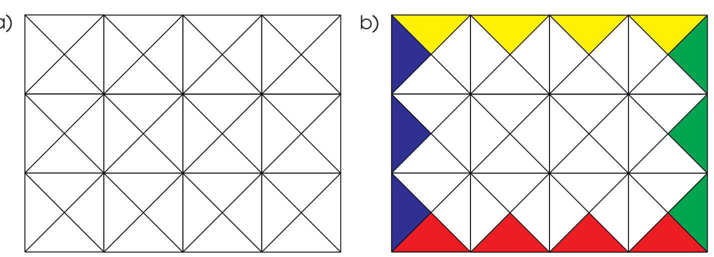


Figure 4. a) Un rectangle 4 × 3 = 12 peut être considéré comme un assemblage de 4 × 12 = 48 triangles rectangles isocèles tous identiques à colorier. b) Ici, seuls les triangles « extérieurs » ont été coloriés.
© J. Bernat / université de Lorraine et G. Reuiller / EPPDCSI.

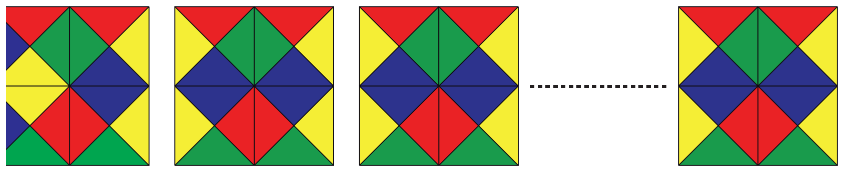


Figure 5. Méthode pour fabriquer un rectangle bien colorié de dimensions 2 et un nombre pair quelconque.

respectée. Par conséquent, on doit pouvoir grouper par deux les neuf triangles bleus intérieurs, ce qui équivaut à dire que 9 est un chiffre pair : absurde ! Notre preuve s'achève sur cette ultime observation.

… QUI N'EST PAS ISOLÉ !

Il est tentant (en tout cas pour un(e) mathématicien(ne)) de généraliser le résultat obtenu à d'autres tailles de rectangle. Considérons un rectangle bien colorié de dimensions quelconques et l'une des deux couleurs présentes sur ses longueurs. Que pouvons-nous dire de la parité du nombre total de triangles de cette couleur ? Il y a deux façons d'exprimer ce nombre. Tout d'abord, comme c'est aussi le nombre total de carrés composant le rectangle, il est égal au produit de sa longueur par sa largeur. Ensuite, il équivaut à la somme du nombre de triangles intérieurs de cette couleur (nécessairement pair à cause de R1) et du nombre de triangles extérieurs (égal à la longueur du rectangle). Puisqu'ajouter un nombre pair à un nombre quelconque ne change pas sa parité, on en conclut que la parité de la longueur du rectangle est également celle du nombre de triangles de la couleur étudiée. C'est donc aussi celle du produit de la longueur par la largeur. Pour les mêmes raisons, en examinant cette fois l'une des deux couleurs présentes sur les largeurs, nous déduisons que la parité de la largeur du rectangle est également celle du produit de la longueur par la largeur. Bref, dans un rectangle bien colorié, la longueur et la largeur ont obligatoirement la même parité.
Attention ! Nous ne pouvons affirmer pour l'instant qu'il est toujours possible de bien colorier un rectangle dont la longueur et la largeur sont de même parité : certains cas pourraient être irréalisables pour d'autres raisons. Nous pouvons attester en revanche qu'il est impossible de construire des rectangles dont les dimensions ne sont pas toutes deux paires ou toutes deux impaires.

NÉCESSAIRE, MAIS SUFFISANT ?

À présent, nous allons démontrer non seulement que tout rectangle dont les dimensions sont de même parité peut être bien colorié, et offrir de plus une méthode pour ce faire. Le cas le plus simple à traiter est celui d'un rectangle dont les deux dimensions sont impaires (se reporter à la figure en ouverture d'article). On impose deux couleurs, jaune et bleu, pour tous les triangles dont la base est horizontale, le rouge et le vert, étant appliqués à ceux à base verticale. On colorie d'abord les triangles extérieurs d'une longueur et d'une largeur – ici jaune en haut et rouge à gauche – avant d'alterner ces deux couleurs selon leur direction respective conformément à R1. Puisque les dimensions du rectangle sont impaires, les triangles extérieurs de côtés opposés exhibent des couleurs différentes, satisfaisant également à R3.
Pour étudier le cas de tous les rectangles dont les deux dimensions sont paires, travaillons exclusivement avec les carrés 2 × 2 qui les composent. Le principe consiste à partir du plus petit de ces rectangles, le carré 2 × 2, et à déterminer comment le prolonger, dans une direction puis dans l'autre. Introduisons d'abord une nouvelle définition. Appelons rectangle « presque bien colorié » un rectangle respectant R1 et R2, et tel qu'il y ait exactement trois couleurs distinctes sur ses bords : deux utilisées une fois et une troisième dite dominante qui apparaît sur deux bords opposés (tel le troisième carré de la figure 2). Nous avons déjà rencontré un carré 2 × 2 bien colorié : le dernier de la figure 2. En lui accolant n'importe quel nombre de carrés 2 × 2 presque bien coloriés identiques sur les bords de leur couleur dominante, nous obtenons un rectangle bien colorié dont la largeur est 2 et la longueur n'importe quel nombre pair (fig. 5).
Un tel rectangle peut être utilisé comme « socle » pour construire, par étages successifs, tout rectangle bien colorié dont les deux dimensions sont paires (fig. 6) :

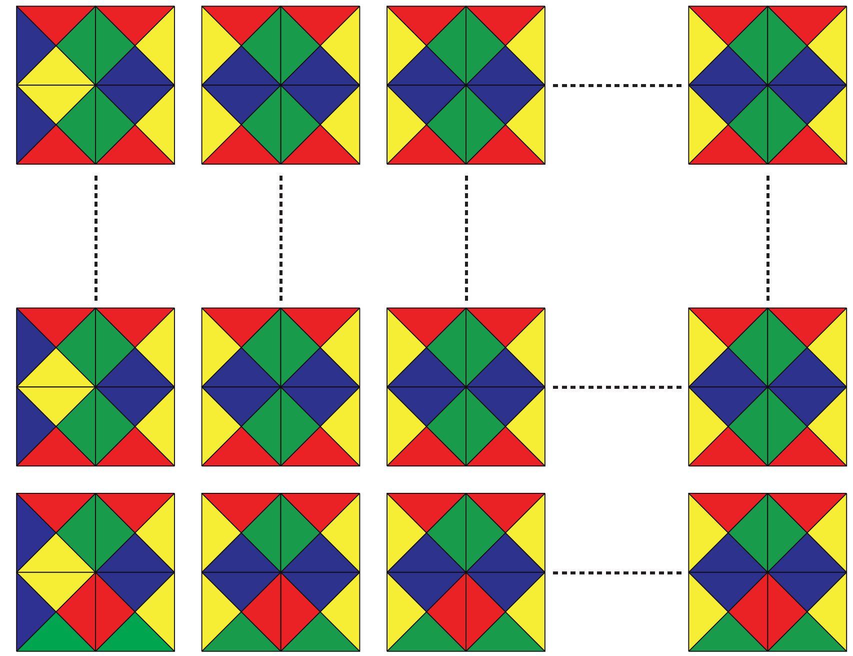


Figure 6. Méthode pour fabriquer un rectangle bien colorié avec deux dimensions paires quelconques.

il suffit de lui accoler, sur la longueur, des rectangles presque bien coloriés de mêmes dimensions, dont la couleur dominante est sur la longueur.
On peut reprocher aux rectangles obtenus leur motif très répétitif (à vous d'en trouver de plus esthétiques !). Néanmoins, nous avons montré qu'il est possible de construire, en respectant les trois règles initiales, tout rectangle dont les dimensions ont la même parité. Cela inclut n'importe quel carré, qui est en somme un rectangle dont la largeur et la longueur sont identiques… Nous pouvons donc affirmer qu'il est nécessaire et suffisant que la longueur et la largeur d'un rectangle aient la même parité pour que ce dernier puisse être bien colorié.

DES COLORIAGES PLUS COMPLEXES

Ce problème permet à de jeunes (et moins jeunes) enfants de manipuler des objets mathématiques concrets, tout en parvenant, à partir de notions simples, à un formalisme assez abouti. Pendant le salon, j'ai vu une petite fille expliquer à sa mère, qui avait manqué une grande partie de la démonstration, pourquoi elle ne parviendrait pas à fabriquer le rectangle 4 × 3 ! Cela permet également de faire comprendre l'utilité de mener un raisonnement mathématique. Si l'on voulait fabriquer un grand rectangle de 101 petits carrés de longueur et 100 de largeur (10 100 petits carrés au total), on pourrait réussir à poser assez facilement 10 099 petits carrés et se retrouver bloqué avec le dernier, comme pour la tentative avortée de la figure 3. On perdrait ainsi un temps prodigieux à réaliser le puzzle. Pire, on pourrait se persuader que la solution est proche et qu'il suffit de permuter quelques pièces. Confronté à la construction d'un objet mathématique possédant certaines propriétés, une analyse mathématique préalable, portant notamment sur son existence, écarte le risque de se lancer dans une entreprise vaine !
Ces petits carrés se retrouvent dans maintes autres activités ludiques tel le jeu « United square », présenté au salon Culture & jeux mathématiques 2013. Par ailleurs, au lieu de colorier les côtés de carrés avec quatre couleurs, on peut colorier les faces de cubes avec six couleurs pour tenter d'obtenir des « pavés droits bien coloriés »… **J. B.**

Pour en savoir plus

Sur le jeu « United Square » : > http://united-square.jimdo.com/jouez/